北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Année académique 2020-2021
Examen de mi-semestre

GÉOMÉTRIE 2

Sujet - A

Numéro d'élève complet :..

Nom chinois :..

Prénom français :...

Mercredi 28 avril, 17h15 à 19h15.

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans la notation. Ce sujet comporte quatre exercices.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x + 2y - t = 0\}$$

et les vecteurs

$$\vec{u}_1 = (1, 2, -1, 1), \quad \vec{u}_2 = (-1, 4, 1, 5), \quad \vec{u}_3 = (2, 3, -2, 0) \quad \text{et} \quad \vec{u}_4 = (-1, 0, 1, 1).$$

On note

$$G = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4).$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F et donner la dimension de F.
3. Montrer que $\vec{u}_2 \in \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_4)$.
4. Déterminer la dimension de G.
5. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

---

1. $F = \mathrm{Vect}((1, 0, -1, 1), (0, 1, -1, 2))$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ comme espace vectoriel engendré par des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
2. La famille $((1, 0, -1, 1), (0, 1, -1, 2))$ est génératrice d'après la question précédente et libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de F. On en déduit que F est de dimension 2.
3. On a $\vec{u}_2 = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_4$ (en résolvant par exemple $\vec{u} = \lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_4$).
4. De la question précédente, on a $G = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$.
   La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est donc génératrice. On montre que cette famille est libre. C'est donc une base de G et $\dim(G) = 3$.
5. Comme $\dim(F) + \dim(G) = 5 > 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. On considère les polynômes suivants :

$$P_0 = X^2 - 2, \quad P_1 = (X - 1)(X + 1), \quad P_2 = (X - 2)(X + 1) \quad \text{et} \quad P_3 = (X - 1)(X + 2).$$

1. La famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est-elle libre dans $\mathbb{R}_2[X]$?
2. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer les coordonnées de P_0 dans la base (P_1, P_2, P_3).
4. Déterminer un supplémentaire de $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

---

1. La famille (P_0, P_1, P_2, P_3) n'est pas libre dans $\mathbb{R}_2[X]$ car $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, donc une famille libre a au plus trois éléments.
2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$. En évaluant en $X = 1$, on obtient $\lambda_2 = 0$, puis en évaluant en $X = -1$, on obtient $\lambda_3 = 0$, et finalement $\lambda_1 = 0$. Donc $(P1, P2, P3)$ est libre. Composée de trois éléments dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3, (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}_3$ tel que $P_0 = aP_1 + bP_2 + cP_3$. Par évaluation ou résolution d'un système, on obtient $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$.
   Les coordonnées de P_0 dans la base (P_1, P_2, P_3) sont donc $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
4. Comme $X^3 \notin \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$, la famille (P_1, P_2, P_3, X^3) est libre. Composée de 4 éléments dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 4, c'est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
   L'espace $G = \mathrm{Vect}(X^3)$ est donc un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3. On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On considère F l'ensemble des fonctions constantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et

$$G = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
2. Montrer que F et G sont des espaces supplémentaires dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

3. Montrer que $\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1 \right\}$ est un sous-espace affine.

---

1. •
   — $F \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
   — La fonction nulle sur $[0,1]$ est constante donc appartient à F.
   — Soient f et g deux éléments de F. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. f et g étant constantes, $\lambda f + g$ l'est aussi donc $\lambda f + g \in F$.

   De ces trois points, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(|0,1],\mathbb{R})$.
2. •
   — $G \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$,
   — $\int_0^1 0\mathrm{d}t = 0$ donc la fonction nulle sur $[0,1]$ appartient à G.
   — Soient $(f,g) \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

   $$\begin{aligned}\int_0^1 (\lambda f + g)(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \lambda f(t) + g(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda \times 0 + 0 \quad \text{car f et g appartiennent à G} \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Donc $\lambda f + g \in G$.

   De ces trois points, G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(|0,1],\mathbb{R})$.
3. • Soit $f \in F \cap G$. Comme $f \in F$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = \lambda$.
   On obtient alors $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \lambda \mathrm{d}t = \lambda$.
   Or $f \in G$, donc $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$, soit $\lambda = 0$.
   Donc, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = 0$. Donc f est la fonction nulle.
   Donc $F \cap G \subset \{0_{[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}}\}$, et l'inclusion réciproque étant évidente, finalement $F \cap G \subset \{0_{[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}}\}$.
   • On a $F + G \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
   Montrons l'inclusion réciproque.
   Soit $h \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On cherche $h \in F$ et $g \in G$ tel que $h = f + g$. Comme $f \in F$, il existe λ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = \lambda$, et donc $h(t) = \lambda + g(t)$.
   En intégrant entre 0 et 1, puisque $g \in G$, on a alors $\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t = \lambda$. Donc $\lambda = \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$ et on en déduit que, pour tout $t \in [0,1]$, $g(t) = h(t) - \lambda = h(t) - \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$.
   On peut donc écrire $h = \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t + \left(h - \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t\right)$ et $t \longmapsto \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t \in F$ et $t \longmapsto h - \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t \in G$.
   Donc $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \subset F + G$.
   D'où $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) = F + G$.
   • De ces deux points, on en déduit que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
4. • La fonction f_1 constante égale à 1 appartient à $\mathcal{F}$.
   • On montre ensuite que $\mathcal{F} = f_1 + G$ et F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
   Donc $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine, dirigé par G.

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathcal{C}_n(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

On note 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i,j) qui vaut 1.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\mathcal{C}_n(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on se place dans le cas $n = 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathcal{C}_2(\lambda I_2) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner la dimension de $\mathcal{C}_2(\lambda I_2)$.
   (b) Montrer que A et I_2 appartiennent à $\mathcal{C}_2(A)$.
   (c) En déduire qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\dim(\mathcal{C}_2(A)) = 1$.
3. Soient λ_1 et λ_2 deux nombres réels distincts. Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, déterminer $\dim(\mathcal{C}_2(A))$.
4. Nous allons démontrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\dim(\mathcal{C}_2(A)) = 3$.
   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathcal{C}_2(A)$ est de dimension 3.

(a) Démontrer, par un argument de dimension, que

$$\mathcal{C}_2(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1}) \neq \{0_2\} \text{ et } \mathcal{C}_2(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{1,2}, E_{2,2}) \neq \{0_2\}.$$

(b) En déduire que $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, puis chercher une contradiction.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{C}_2(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = \lambda I_2$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

---

1. — $\mathcal{C}_n(A) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   — $A0_n = 0_n = 0_n A$ donc $0_n \in \mathcal{C}_n(A)$.
   — Soient $(M_1, M_2) \in \mathcal{C}_n(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On a
   $$\begin{aligned} A(\lambda M_1 + M_2) &= \lambda A M_1 + A M_2 \\ &= \lambda M_1 A + M_2 A \quad \text{car } (M_1, M_2) \in \mathcal{C}_n(A) \\ &= (\lambda M_1 + M_2) A. \end{aligned}$$
   Donc $\lambda M_1 + M_2 \in \mathcal{C}_n(A)$.
   De ces trois points, $\mathcal{C}_n(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. (a) On a $\mathcal{C}_2(\lambda I_2) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par définition.
   Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $(\lambda I_2)M = \lambda M = M(\lambda I_2)$. Donc $M \in \mathcal{C}_2(\lambda I_2)$.
   Donc $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_2(\lambda I_2)$.
   D'où $\mathcal{C}_2(\lambda I_2) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On en déduit que $\mathcal{C}_2(\lambda I_2)$ est de dimension 4.
   (b) On a $AA = AA$ donc $A \in \mathcal{C}_2(A)$ et $AI_2 = A = I_2 A$ donc $I_2 \in \mathcal{C}_2(A)$.
   (c) Supposons par l'absurde qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\dim(\mathcal{C}_2(A)) = 1$. $\mathcal{C}_2(A)$ est donc une droite vectorielle et comme $(A, I_2) \in \mathcal{C}_2(A)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.
   Donc $\mathcal{C}_2(A) = \mathcal{C}_2(\lambda I_2) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ce qui est absurde puisque l'on a supposé que $\dim(\mathcal{C}_2(A)) = 1$.
   Il n'existe donc pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\dim(\mathcal{C}_2(A)) = 1$.
3. Posons $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Déterminons une base de $\mathcal{C}_2(A)$.
   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On a $M \in \mathcal{C}_2(A)$ si et seulement si $AM = MA$,
   soit si et seulement si
   $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$
   soit si et seulement si
   $$\begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ c\lambda_1 & d\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_1 \\ c\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix}.$$
   Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on en déduit que $M \in \mathcal{C}_2(A)$ si et seulement si $b = c = 0$, soit si et seulement si $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.
   Donc $\mathcal{C}_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc génératrice et libre (comme sous-famille de la base canonique). C'est donc une base de $\mathcal{C}_2(A)$.
   Donc $\dim(\mathcal{C}_2(A)) = 2$.
4. D'après la formule de Grassmann,
   $$\begin{aligned} \dim(\mathcal{C}_2(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1})) &= \dim(\mathcal{C}_2(A)) + \dim(\mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1}) - \dim(\mathcal{C}_2(A) + \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1}) \\ &\geq 3 + 2 - 4 = 1 \end{aligned}$$
   car $\dim(\mathcal{C}_2(A) + \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1}) \leq 4$ puisque $\mathcal{C}_2(A) + \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1}) \subset \mathcal{M}_2(R)$ de dimension 4.
   On en déduit que $\mathcal{C}_2(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1})) \neq \{0_2\}$ puisque $E = \{\vec{0}\}$ si et seulement si $\dim(E) = 0$.
   On montre de la même manière que $\mathcal{C}_2(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{1,2}, E_{2,2})) \neq \{0_2\}$
5. Comme $\mathcal{C}_2(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1})) \neq \{0_2\}$, il existe $M_1 \in \mathcal{C}_2(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1})$ avec $M \neq 0_2$. Comme $M_1 \in \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1})$, il existe $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $M_1 = a_1 E_{1,1} + b_1 E_{2,1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Comme $AM = MA$, on obtient
   $$\begin{pmatrix} a_1 a + b b_1 & 0 \\ a_1 c + b_1 d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a & b a_1 \\ b_1 a & b b_1 \end{pmatrix},$$
   donc, par identification, $\begin{cases} b b_1 = 0 \\ b a_1 = 0 \\ a_1 c + b_1 d = 0 \end{cases}$.
   Comme $(a_1, b_1) \neq (0,0)$, on en déduit que $b = 0$.
   De la même façon, avec $M_2 \in \mathcal{C}_2(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{1,2}, E_{2,2}))$, matrice non nulle, on obtient $c = 0$.
   Donc $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.
   Si $a = d$ alors $A = aI_2$ et d'après la question 2.a), $\dim(\mathcal{C}_2(A)) = 4 \neq 3$, ce qui est absurde.
   Si $a \neq d$, alors d'après la question 3, $\dim(\mathcal{C}_2(A) = 2 \neq 3$, ce qui est absurde.
   On en déduit que $\dim(\mathcal{C}_2(A)) = 3$ n'est pas possible.

6. D'après la question 1, si $A = \lambda I_2$, alors $\mathcal{C}_2(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}_2(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Cela signifie que A commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   De $AE_{1,1} = E_{1,1}A$, on obtient $b = c = 0$.
   De $AE_{2,1} = E_{2,1}A$, on obtient $a = d$.
   Donc $A = aI_2$.
   D'où le résultat.