Révisions Géométrie 2

- **Espaces vectoriels**

  - Connaître les espaces vectoriels usuels (matrices, polynômes, fonctions, suites...)
  - Savoir montrer que F est un sev de E. En général, trois méthodes :
    1. Utiliser la caractérisation,
    2. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(...)$,
    3. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(f)$ où $f : E \longrightarrow G$ est une application linéaire.
  - Savoir montrer qu'une famille est libre et/ou génératrice
  - Déterminer une base d'un ev
    Si F est de dimension finie et que l'on connaît $\dim(F)$, on peut utiliser un argument de dimension pour justifier qu'une famille libre/génératrice est une base (inutile de démontrer les deux).
  - Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base.
    Cela est important pour écrire la matrice d'une application linéaire d'une base à une autre.
  - Connaître les dimensions des ev habituels et savoir calculer la dimension d'un ev (trouver une base par exemple)
  - Savoir calculer le rang d'une famille de vecteurs, le rang d'une matrice. On peut faire des opérations sur les colonnes dans les Vect pour faire apparaître des vecteurs identiques ou le vecteur nul et se ramener à une famille libre.
    Connaître aussi le rang d'une application linéaire f (dimension de l'image de f), on peut passer par une écriture matricielle si on est en dimension finie.
  - Montrer que des sev sont supplémentaires (revenir à la définition, ou s'aider des dimensions si on les connaît)
    Savoir décomposer un vecteur en la somme de deux vecteurs de la décomposition : cela permet d'obtenir la projection du vecteur sur un des espaces parallèlement à l'autre.
  - Savoir montrer qu'une application entre ev est linéaire
  - Calculer le noyau et l'image d'une application linéaire (à nouveau, on peut utiliser l'écriture matricielle si on est en dimension finie), déterminer leur dimension (penser au théorème du rang très utile)
  - Connaître les définitions d'endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
  - Savoir montrer qu'une application linéaire est injective, surjective, bijective.

- **Polynômes**

  - Écrire la division euclidienne de polynômes
  - Connaître les définitions d'une racine d'un polynôme et la caractérisation en termes de divisibilité, de multiplicité d'une racine et les caractérisations en termes de divisibilité ou à l'aide des dérivées
  - Définition d'un polynôme scindé, scindé à racines simples (attention à la différence entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$).
  - Nombre maximal de racines d'un polynôme non nul
  - Relations coefficients racines à savoir retrouver, surtout pour les polynômes de degré 2 et 3
  - Connaître les polynômes de Lagrange
  - Connaître la forme des polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

- Décomposer un polynôme en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (utilisation des nombres complexes souvent nécessaire, par exemple calculer les racines n-èmes d'un nombre complexe) Cette partie est utile pour faire des décompositions en éléments simples.
- Définition d'un idéal, d'un idéal principal et des anneaux principaux. Savoir que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont des anneaux principaux.
- Savoir calculer le pgcd de deux polynômes
- Définition des polynômes premiers entre eux, lemme de Gauss et théorème de Bezout

• **Fractions rationnelles**

- Connaître les opérations sur les fractions rationnelles
- Savoir déterminer la partie entière d'une fraction rationnelle, son degré
- Connaître la forme de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle et savoir déterminer les coefficients (plusieurs méthodes possibles, certaines sont plus efficaces que d'autres selon la fraction)

Exercices de révision

Exercice 1. Trouver un polynôme P de degré 5 tel que $P+10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P-10$ soit divisible par $(X-2)^3$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]\ ;\ P \longmapsto 2P-(X-1)P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer une base de l'image et du noyau de f.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
5. Monter que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.
6. Soit p la projection sur $\mathrm{Ker}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f)$.
   (a) Calculer $p(1+X+X^2)$.
   (b) Déterminer $f \circ p$ et $p \circ f$.

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{K}_n[X]$ un polynôme non nul.

1. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X],\ A \mid P\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Déterminer la dimension de F et un supplémentaire de F.

Exercice 4. Soit Φ l'application définie par

$$\Phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]\ ;\ P \longmapsto P(X+1)-P(X).$$

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Montrer que si $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.
   (b) En déduire $\mathrm{Ker}(\Phi)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soit P un polynôme non constant. Préciser le degré de $\Phi(P)$ en fonction de celui de P ainsi que le coefficient dominant de $\Phi(P)$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.b On note Φ_n l'application induite par Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\Phi_n : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]\ ;\ P \longmapsto \Phi(P).$$

   Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi_n)$ et montrer que $\mathrm{Im}(\Phi_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
5. En déduire que Φ est surjectif.