# Sciences en français
# Mathématiques

École Centrale de Pékin

*Cours de mathématiques du cycle préparatoire*

14 juin 2021

# Table des matières

# Chapitre 1 Introduction aux mathématiques : vocabulaire, logique et raisonnements

## 1.1 Exemples d'objets mathématiques

### 1.1.1 Ensembles et éléments

Définition 1
*Un **ensemble** \集合\ $E$ est une collection d'objets, appelés **éléments** \元素\ de $E$.*

Définition 2
*On dit que $x$ **appartient** \$x$属于$E$\ à $E$ si $x$ est un élément de l'ensemble $E$. On note $x \in E$.*

Définition 3
*Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On dit que $E$ est **inclus** \$E$包含于$F$\ dans $F$ si tout élément de $E$ est aussi élément de $F$. On note $E \subset F$. On dit que $E$ est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de $F$.*

On travaillera avec les ensembles de nombres suivants :

| *Ensemble* | *Notation* | *Exemples d'éléments* |
|---|---|---|
| Nombres entiers naturels \自然数\ | $\mathbb{N}$ | $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$ |
| Nombres entiers relatifs \整数\ | $\mathbb{Z}$ | $\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ |
| Nombres rationnels \有理数\ | $\mathbb{Q}$ | $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*$ |
| Nombres réels \实数\ | $\mathbb{R}$ | $1,\ -3,\ \frac{1}{2},\ \sqrt{2},\ \pi,\ \ldots$ |
| Nombres complexes \复数\ | $\mathbb{C}$ | $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ |

Ces ensembles privés de 0 sont notés $\mathbb{N}^*$ (se lit « $\mathbb{N}$ étoile ») , $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$.

Exemples 4 *Donnons des exemples d'**inclusions**.*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Nous rencontrerons également les ensembles de nombres suivants.

- L'ensemble des **nombres réels positifs** ($\geq 0$ (se lit « supérieur ou égal à 0 ») ) est noté $\mathbb{R}_+$ (se lit « $\mathbb{R}$ plus ») .
- L'ensemble des **nombres réels strictement positifs** ($> 0$ (se lit « strictement supérieur à 0 ») ) est noté $\mathbb{R}_+^*$ (se lit « $\mathbb{R}$ plus étoile ») .
- L'ensemble des **nombres réels négatifs** ($\leq 0$ (se lit « inférieur ou égal à 0 ») ) est noté $\mathbb{R}_-$ (se lit « $\mathbb{R}$ moins ») .
- L'ensemble des **nombres réels strictement négatifs** ($< 0$ (se lit « strictement inférieur à 0 ») ) est noté $\mathbb{R}_-^*$ (se lit « $\mathbb{R}$ moins étoile ») .

### 1.1.2 Fonctions

DÉFINITION 5
*Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Une* ***fonction*** *(ou application)* \函数\ *de $E$ vers $F$ est un objet qui à tout élément $x$ de $E$ associe un et un seul élément $y$ de $F$, noté $f(x)$ (se lit « $f$ de $x$ ») .*

On note $f : E \longrightarrow F$ pour signifier que $f$ est une application de $E$ dans $F$.

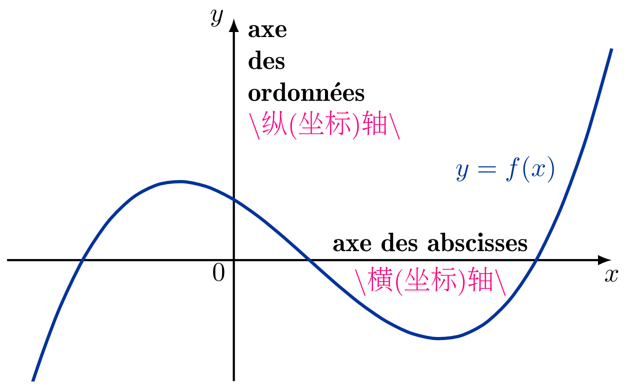
- $E$ est appelé **l'ensemble de définition** \定义域\ de $f$,
- $F$ est appelé **l'ensemble d'arrivée** \值域\ de $f$,
- $f(x)$ est appelé **l'image** \象\ de $x$ par $f$,

On peut préciser les images avec la notation

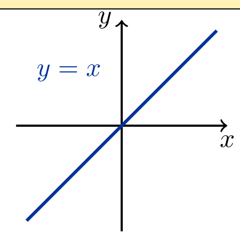
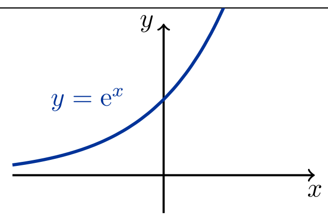
$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

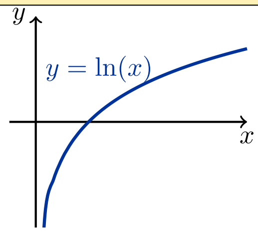
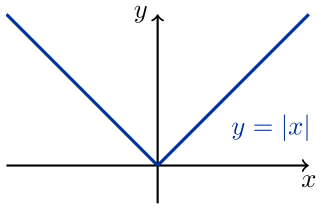
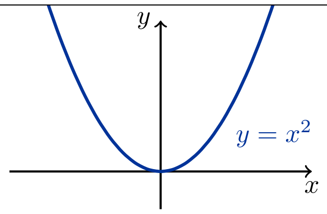
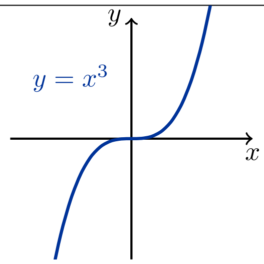
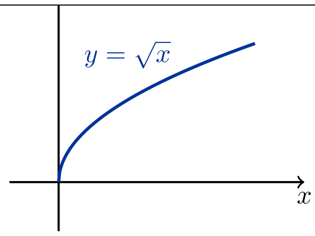
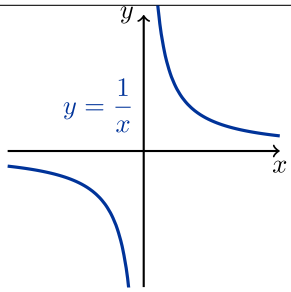
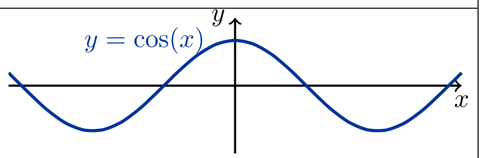
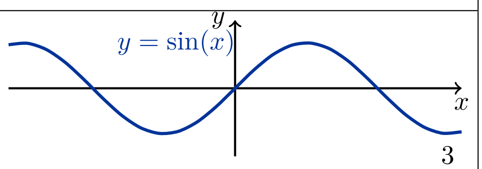
( « la fonction $f$ de $E$ dans $F$ qui à $x$ associe $f$ de $x$ » ou « la fonction $f$ de $E$ dans $F$, à $x$ on associe $f$ de $x$ » ).

DÉFINITION 6
*La* ***représentation graphique*** \图象\ *d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou courbe représentative) est l'ensemble des* ***points*** \点\ *de* ***coordonnées*** \坐标\ *$(x, f(x))$, où $x \in I$.*




Donnons des exemples de fonctions usuelles.

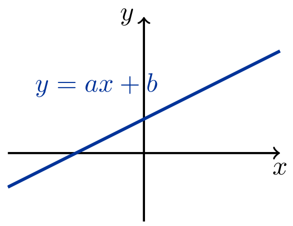
| *Nom de la fonction* | *Notation* | *Représentation graphique* |
|---|---|---|
| Identité<br>\恒同\ | $\mathrm{id} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ |  |
| Exponentielle<br>\指数函数\ | $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$<br>$\exp(x)$ : « exponentielle $x$ » |  |

| *Nom de la fonction* | *Notation* | *Représentation graphique* |
|---|---|---|
| Logarithme (népérien)<br>\对数函数\ | $\begin{array}{rccc} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$<br>$\ln(x)$ : « ln de $x$ » |  |
| Valeur absolue | $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lvert x \rvert \end{array}$<br>$\lvert x \rvert$ : « valeur absolue de $x$ » |  |
| Carré<br>\平方\ | $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$<br>$x^2$ : « $x$ au carré » |  |
| Cube<br>\立方\ | $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$<br>$x^3$ : « $x$ au cube »<br>ou « $x$ puissance 3 » |  |
| Racine carrée<br>\平方根\ | $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$<br>$\sqrt{x}$ : « racine carrée de $x$ » |  |
| Inverse<br>\反比例函数/倒数\ | $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$<br>$\dfrac{1}{x}$ : « 1 sur $x$ » |  |
| Cosinus<br>\余弦\ | $\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$<br>$\cos(x)$ : « cosinus $x$ » |  |
| Sinus<br>\正弦\ | $\begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$<br>$\sin(x)$ : « sinus $x$ » |  |

Les fonctions **affines** sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array},$$

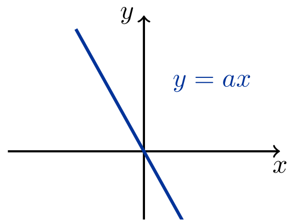
où $a,\, b \in \mathbb{R}$.




Dans le cas où $b = 0$, on parle de fonctions **linéaires**.
Ce sont donc les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array},$$

où $a \in \mathbb{R}$.




## 1.2 Quelques éléments de logique

### 1.2.1 Variables et propositions mathématiques

Définition 7
*Une **proposition** \命题\ (ou assertion) est une phrase mathématique qui est soit **vraie** \真\ (noté V), soit **fausse** \错误\ (noté F).*

Exemples 8

- « $1 + 1 = 2$ » *(se lit « 1 plus 1 égal 2 »)* *est une proposition, qui est vraie.*
- « $5 \times 2 = 4$ » *(se lit « 5 fois 2 égal 4 »)* *est une proposition, qui est fausse.*

En mathématiques, on utilise des **variables** \变量\. Il s'agit presque toujours de lettres ($x$, $y$, $a$, $b$, $n$, $\ldots$) parfois indicées ($x_1$, $x_2$, $\ldots$). C'est un nom d'objet, qui ne désigne pas un objet particulier mais des objets appartenant à un certain ensemble.

Souvent, une proposition dépend d'une ou plusieurs variables. Sa **valeur de vérité** (vraie ou fausse) peut alors être donnée lorsque l'on précise les **valeurs** \值\ des variables. En général, on note $P(x)$ une proposition qui dépend de la variable est $x$.

Exemples 9

- *La phrase $P(x)$ « $x + 1 = 2$ » est une proposition à une variable. Par exemple, $P(1)$ est vraie et $P(2)$ est fausse.*
- *La phrase $P(n, k)$ « $n + k = 3$ » est une proposition à deux variables. Par exemple, $P(2, 1)$ est vraie et $P(2, 0)$ est fausse.*
- *La phrase $P(x, A)$ « $x \in A$ » est une proposition à deux variables. Par exemple, $P(1, \mathbb{N})$ est vraie et $P(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ est fausse.*

Définition 10
*Soient $P$ et $Q$ deux propositions. Si $P$ est vraie lorsque $Q$ est vraie et si $P$ est fausse lorsque $Q$ est fausse, on dit que $P$ et $Q$ sont **logiquement équivalentes** ou qu'elles ont la même table de vérité. On note $P \equiv Q$.*

Exemple 11 — *Soient $P(x)$ la proposition « $x > 0$ » (se lit « $x$ strictement supérieur à 0 ») et $Q(x)$ la proposition « $-x < 0$ » (se lit « moins $x$ strictement inférieur à 0 ») . Alors $P(x) \equiv Q(x)$.*

Définition 12
*Soit $E$ un ensemble. Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable $x$. On note $\{x \in E \mid P(x)\}$ (se lit « l'ensemble des $x$ appartenant à $E$ tels que $P(x)$ ») l'ensemble des éléments de $E$ tels que $P(x)$ est vraie.*

Exemples 13

- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ *: c'est l'ensemble des nombres réels positifs.*
- $\mathbb{R}_-^* = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$ *: c'est l'ensemble des nombres réels strictement négatifs.*
- $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *: c'est l'**intervalle** \区间\ $[a, b[$ (fermé en $a$, ouvert en $b$).*
  *($a \leq x < b$ se lit, par exemple, « $x$ supérieur ou égal à $a$ et strictement inférieur à $b$ »)*
- $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est pair}\} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *: c'est l'ensemble des **nombres pairs** \偶数\.*
- $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est impair}\} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *: c'est l'ensemble des **nombres impairs** \奇数\.*

Remarque 14 — *À chaque fois que l'on écrit une phrase mathématique, il est sous-entendu qu'elle est vraie.*

### 1.2.2 Connecteurs logiques

À partir d'une ou plusieurs propositions, on peut construire d'autres propositions.

#### 1.2.2.a. Négation

Soit $P$ une proposition. La **négation** de $P$ est la proposition $non(P)$ (aussi notée $\neg P$), qui est

- vraie lorsque $P$ est fausse,
- fausse lorsque $P$ est vraie.

On représente les valeurs de vérité de $non(P)$ en fonction de celles de $P$ dans une table de vérité :

| $P$ | $non(P)$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

Généralement, on remplace la proposition $non(P)$ par une proposition logiquement équivalente.

| $P$ | $non(P)$ |
|---|---|
| $x > 4$<br>(se lit « $x$ est strictement supérieur à 4 ») | $x \leq 4$<br>(se lit « $x$ est inférieur ou égal à 4 ») |
| $a = 3$<br>(se lit « $a$ égal 3 ») | $a \neq 3$<br>(se lit « $a$ différent de 3 ») |
| $x \in \mathbb{N}$<br>(se lit « $x$ appartient à $\mathbb{N}$ »<br>ou « $x$ est un entier naturel ») | $x \notin \mathbb{N}$<br>(se lit « $x$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$ »<br>ou « $x$ n'est pas un entier naturel ») |
| $n$ est pair | $n$ est impair |
| L'ensemble $E$ a au moins deux éléments | L'ensemble $E$ a au plus un élément |
| $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction **croissante** \增函数\ | $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas croissante |
| Les **droites** \直线\ $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **parallèles** \平行\ | Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **sécantes** \相交/相割\. |

#### 1.2.2.b. « Ou »

Soient $P$ et $Q$ des propositions. La proposition « $P$ *ou* $Q$ » (aussi notée $P \vee Q$) est la proposition qui est

- fausse lorsque $P$ et $Q$ sont fausses simultanément,
- vraie dans les autres cas.

On résume cela dans une table de vérité :

| $P$ | $Q$ | $P$ *ou* $Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Exemples 15

| $P$ | $Q$ | $P$ *ou* $Q$ |
|---|---|---|
| $x \in [0,4]$ | $x \in [2,8]$ | $x \in [0,8]$ |
| $x > 0$ | $x = 0$ | $x \geq 0$ |
| $x \in A$ | $x \in B$ | $x \in A \cup B$<br>*(se lit « $x$ appartient à $A$ union $B$ »)* |

#### 1.2.2.c. « Et »

Soient $P$ et $Q$ des propositions. La proposition « $P$ *et* $Q$ » (aussi notée $P \wedge Q$) est la proposition qui est

- vraie lorsque les deux propositions sont vraies simultanément,
- fausse dans les autres cas.

On résume cela dans une table de vérité :

| $P$ | $Q$ | $P$ et $Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

Exemples 16

| $P$ | $Q$ | $P$ *et* $Q$ |
|---|---|---|
| $x \in [0,4]$ | $x \in [2,8]$ | $x \in [2,4]$ |
| $x < 10$ | $x \geq 2$ | $x \in [2,10[$ |
| $x \in A$ | $x \in B$ | $x \in A \cap B$<br>*(se lit « $x$ appartient à $A$ inter $B$ »)* |
| *ABCD est un **losange*** \菱形\ | *ABCD est un **rectangle*** \矩形\ | *ABCD est un **carré*** \正方形\ |

#### 1.2.2.d. Quelques règles de calcul

Proposition 17
*Soient $P$, $Q$ et $R$ des propositions. On a :*

- $non(non\,P) \equiv P$,
- $non(P \text{ et } Q) \equiv (non\,P) \text{ ou } (non\,Q)$,
- $non(P \text{ ou } Q) \equiv (non\,P) \text{ et } (non\,Q)$,

- *$P$ et ($Q$ ou $R$) $\equiv$ ($P$ et $Q$) ou ($P$ et $R$),*
- *$P$ ou ($Q$ et $R$) $\equiv$ ($P$ ou $Q$) et ($P$ ou $R$),*
- *La proposition « $P$ et (non $P$) » est toujours fausse,*
- *La proposition « $P$ ou (non $P$) » est toujours vraie : soit $P$ est vraie, soit non($P$) est vraie.*

**Preuve** — On peut démontrer ces propriétés avec des tables de vérité. Donnons un exemple.

| $P$ | $Q$ | $P$ et $Q$ | non($P$ et $Q$) | non($P$) | non($Q$) | non($P$) ou non($Q$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F | F | F |
| V | F | F | V | F | V | V |
| F | V | F | V | V | F | V |
| F | F | F | V | V | V | V |

Donc non($P$ et $Q$) $\equiv$ non($P$) ou non($Q$). □

Exemple 18 — *La négation de « $x \geq 1$ et $x < 4$ » est « $x < 1$ ou $x \geq 4$ ».*

Remarque 19 — *Une proposition qui ne peut être que fausse s'appelle une **contradiction** \矛盾\.*

#### 1.2.2.e. Implication

Soient $P$ et $Q$ des propositions. La proposition « $P \Rightarrow Q$ » (se lit « $P$ implique $Q$ » ou « si $P$, alors $Q$ ») est la proposition qui est

- fausse lorsque $P$ est vraie et $Q$ est fausse,
- vraie dans les autres cas.

On résume cela dans la table de vérité suivante :

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Remarque 20 — *Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que*

- *$P$ est une **condition suffisante** pour $Q$,*
- *$Q$ est une **condition nécessaire** pour $P$.*

Exemples 21

- *La proposition « 2 est pair $\Rightarrow$ 3 est impair » est vraie.*
- *La proposition « 2 est impair $\Rightarrow$ 3 est pair » est vraie (même si c'est surprenant).*
- *La proposition « 2 est pair $\Rightarrow$ 3 est pair » est fausse.*
- *La proposition « 2 est impair $\Rightarrow$ 3 est impair » est vraie.*
- *La proposition « Si $x > 2$ alors $x^3 > 8$ » est vraie.*

Ainsi, lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on ne peut rien dire sur la valeur de vérité de $P$.

Proposition 22
*On a $P \Rightarrow Q \equiv$ non($P$) ou $Q$.*

**Preuve** — Montrons que ces deux propositions ont la même table de vérité.

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | non($P$) | non($P$) ou $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | V |
| V | F | F | F | F |
| F | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V |

□

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 23
*La négation de la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est « $P$ et non$(Q)$ ».*

**Preuve** — *non$(P \Rightarrow Q)$ $\equiv$ non(non$(P)$ ou $Q$) $\equiv P$ et non$(Q)$.* □

Exemple 24 — *Soit $x \in \mathbb{R}$. La négation de « $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ » est $x^2 = 1$ et $x \neq 1$.*

Définition 25

- *La proposition « $Q \Rightarrow P$ » s'appelle la **réciproque** de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*
- *La proposition « non$(Q) \Rightarrow$ non$(P)$ » s'appelle la **contraposée** de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*

Exemple 26 — *Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la proposition « $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ »*

- *Sa contraposée est « $x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$ ».*
- *Sa réciproque est « $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ ».*

Proposition 27
*On a $P \Rightarrow Q \equiv$ (non $Q$) $\Rightarrow$ (non$P$).*

**Preuve** — *$P \Rightarrow Q \equiv$ non$(P)$ ou $Q \equiv Q$ ou non$(P) \equiv$ non(non$(Q)$) ou non$(P) \equiv$ non$(Q) \Rightarrow$ non$(P)$.* □

Proposition 28
*Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors $P \Rightarrow R$.*

#### 1.2.2.f. Équivalence

Soient $P$ et $Q$ des propositions. La proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » (se lit « $P$ équivalent à $Q$ » ou « $P$ si et seulement si $Q$ ») est la proposition qui est

- vraie lorsque les propositions P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses,
- fausse dans les autres cas.

On résume cela dans la table de vérité suivante :

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

Exemples 29

- *La proposition « $(1 = 1) \Leftrightarrow (0 = 0)$ » est vraie.*
- *La proposition « $(1 = 0) \Leftrightarrow (2 = 0)$ » est vraie.*
- *La proposition « $(1 = 0) \Leftrightarrow (0 = 0)$ » est fausse.*
- *Soit $x$ un nombre réel. La proposition « $x > 2$ si et seulement si $x^3 > 8$ » est vraie.*

Proposition 30
*On a $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.*

Si la proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie, on dit que $Q$ est une **condition nécessaire et suffisante** pour $P$ et on dit que $P$ et $Q$ sont **équivalentes**.

Remarque 31 — *Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on peut dire que $P$ et $Q$ ont les mêmes valeurs de vérité et donc $P \equiv Q$.*

### 1.2.3 Quantificateurs \量词\

#### 1.2.3.a. Quantificateurs universel et existentiel

Soit $E$ un ensemble. Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable $x$, avec $x \in E$.

Définition 32
*Le **quantificateur universel** \全称量词\, noté $\forall$ (se lit « pour tout » ou « quel que soit ») permet de définir la proposition « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » qui est*

- *vraie lorsque pour tous les éléments $x$ appartenant à $E$, $P(x)$ est vraie,*
- *fausse sinon (c'est-à-dire si $P(x)$ est fausse pour **au moins** \至少\ un élément $x$ de $E$).*

Exemples 33

- *La proposition « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ » est vraie.*
- *La proposition « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n-3)n > 0$ » est fausse : pour $n = 1$, $(n-3)n = -2 \leq 0$.*
- *La proposition « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$ » est vraie.*

Définition 34
*Le **quantificateur existentiel** \存在量词\, noté $\exists$ (se lit « il existe … tel que ») permet de définir la proposition « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » qui est*

- *vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément $x$ de $E$,*
- *fausse lorsque $P(x)$ est fausse pour tous les éléments $x$ de $E$.*

Remarque 35 — *« Il existe un » signifie « il existe **au moins** \至少\ un ».*

On rencontre parfois la notation « $\exists\,!\, x \in E,\ P(x)$ » (se lit « il existe un **unique** \唯一的\ élément $x$ de $E$ tel que $P(x)$ ») qui signifie qu'il existe un et un seul élément $x$ de $E$ vérifiant $P(x)$.

Exemples 36

- *La proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4$ » est vraie, par exemple, pour $x = 2$ ou $x = -2$.*
- *La proposition « $\exists\, n \in \mathbb{N},\ n^2 = 2$ » est fausse.*
- *La proposition « $\exists\,!\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) = 0$ » est vraie : l'unique élément de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\ln(x) = 0$ est $x = 1$.*

Remarque 37 — *Si la proposition « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » est vraie alors la proposition « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » est vraie. Mais la proposition « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » peut être vraie et la proposition « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » fausse. Voyons cela dans l'exemple qui suit.*

Exemples 38

- *La proposition « $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ » est fausse : par exemple, pour $x = -1$, $x<0$.*
- *La proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ » est vraie : par exemple, pour $x = 1$, $x \geq 0$.*

Les quantificateurs sont donc extrêmement importants en mathématiques. L'exemple précédent nous montre que sans précision sur la variable $x$, la proposition « $x \geq 0$ » n'a pas de sens.

Les symboles « $\forall$ » et « $\exists$ » ne sont pas des **abréviations** \缩写/简写\, ils ne doivent pas être utilisés dans une phrase en français.

Proposition 39
*On a*

- *non*$(\forall\, x \in E,\ P(x)) \ \equiv\ \exists\, x \in E,\ \textit{non}(P(x))$,
- *non*$(\exists\, x \in E,\ P(x)) \ \equiv\ \forall\, x \in E,\ \textit{non}(P(x))$.

Exemple 40 — *Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La négation de « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ ».*

On peut intervertir les quantificateurs de même nature.

Proposition 41
*Soit $P(x, y)$ une proposition dépendant de deux variables. On a*
- $\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in F,\ P(x, y) \ \equiv\ \forall\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ P(x, y)$.
- $\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x, y) \ \equiv\ \exists\, y \in F,\ \exists\, x \in E,\ P(x, y)$.

On ne peut pas intervertir $\forall$ et $\exists$. Par exemple, les propositions suivantes n'ont pas la même signification.
- La proposition « $\forall\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x, y)$ » signifie que pour tout $x \in E$, il existe une valeur $y \in F$ (qui dépend *a priori* de $x$) telle que $P(x, y)$ est vraie. On dit que $y$ dépend de $x$.
- La proposition « $\exists\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ P(x, y)$ » signifie qu'il existe une valeur $y \in F$ telle que $P(x, y)$ est vraie pour toutes les valeurs de $x$ dans $E$ (c'est le même $y$ pour tous les $x$).

Exemples 42
- *La proposition « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x \geq y$ » signifie que tout nombre réel $x$ est supérieur ou égal à un nombre réel $y$ (qui dépend de $x$). C'est une proposition qui est vraie : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut prendre $y = x - 1$ et on a $x \geq y$.*
- *Mais la proposition « $\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geq y$ » signifie que tout nombre réel $x$ est supérieur ou égal à un même nombre réel $y$. C'est une proposition qui est fausse.*

Proposition 43
*La négation de « $\forall\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x, y)$ » est « $\exists\, x \in E,\ \forall\, y \in F,\ non(P(x, y))$ ».*

Exemple 44 — *La négation de « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$ » est « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ y^2 \leq x$ ».*

Proposition 45
*On a*
- $\forall\, x \in E,\ (P(x)\ et\ Q(x)) \Leftrightarrow (\forall\, x \in E,\ P(x))\ et\ (\forall\, x \in E,\ Q(x))$,
- $\forall\, x \in E,\ (P(x)\ ou\ Q(x)) \Leftarrow (\forall\, x \in E,\ P(x))\ ou\ (\forall\, x \in E,\ Q(x))$,
- $\exists\, x \in E,\ (P(x)\ et\ Q(x)) \Rightarrow (\exists\, x \in E,\ P(x))\ et\ (\exists\, x \in E,\ Q(x))$,
- $\exists\, x \in E,\ (P(x)\ ou\ Q(x)) \Leftrightarrow (\exists\, x \in E,\ P(x))\ ou\ (\exists\, x \in E,\ Q(x))$,

Pour les deuxième et troisième points, il n'y a pas équivalence comme le montrent les exemples suivants.

Exemples 46
- *La proposition « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n$ est pair ou $n$ est impair $)$ » est vraie.*
  *Mais la proposition « $(\forall\, n \in \mathbb{N},\ n$ est pair$)$ ou $(\forall\, n \in \mathbb{N},\ n$ est impair$)$ » est fausse.*
- *La proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ (\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = 0)$ » est fausse.*
  *Mais la proposition « $(\exists\, x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 0)$ et $(\exists\, x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = 0)$ » est vraie.*
  *Pour expliciter le fait que le $x$ n'est pas le même dans la proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 0)$ » que dans la proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = 0$ », on pourra utiliser des lettres distinctes. Par exemple, on préférera la notation « $(\exists\, u \in \mathbb{R},\ \cos(u) = 0)$ et $(\exists\, v \in \mathbb{R},\ \sin(v) = 0)$ »*

#### 1.2.3.b. Variables muettes

On suppose que la variable $y$ n'apparaît pas dans $P(x)$. Alors

- $\forall x \in E,\ P(x) \ \equiv\ \forall y \in E,\ P(y)$.
- $\exists x \in E,\ P(x) \ \equiv\ \exists y \in E,\ P(y)$.

On dit que la variable apparaissant dans la proposition est **muette** \虚拟变量/哑变量\, on peut la remplacer par n'importe quelle lettre.

Donnons d'autres exemples fréquents en mathématiques où la variable est muette.

Exemples 47

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ *(se lit « l'ensemble des $x$ appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $x$ est supérieur ou égal à 1 »),*
- $\lim\limits_{t \to +\infty} \exp(-t) = 0$ *(se lit « la **limite** \极限\ lorsque $t$ tend vers $+\infty$ de exponentielle moins $t$ est égale à 0 »),*
- $\sum\limits_{k=1}^{5} k = 15$ *(se lit « la **somme** \和\ pour $k$ allant de 1 à 5 des $k$ est égale à 15 »),*
- $\prod\limits_{i=1}^{4} i = 24$ *(se lit « le **produit** \积\ pour $i$ allant de 1 à 4 des $i$ est égal à 24 »),*
- $x \longmapsto x^2 + x + 1$ *(se lit « la fonction qui à $x$ associe $x^2 + x + 1$ »),*
- *L'**équation** \方程\ $z^2 + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.*

## 1.3 Utilisation des quantificateurs : vocabulaire sur les fonctions

On introduit le vocabulaire à connaître sur les fonctions. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

| On dit que la fonction $f$ est | Définition | Illustration |
| --- | --- | --- |
| la fonction nulle \零函数\ | $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$ | |
| ~~est~~ s'annule \互相抵销\ | $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ | |
| positive (ou à valeurs positives) \正函数（取值都大于0）\ | $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ | |

| On dit que la fonction $f$ est | Définition | Illustration |
|---|---|---|
| constante<br>\常值函数\ | $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y).$<br>ou<br>$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C.$ | |
| croissante<br>\增函数\ | $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)).$ | |
| strictement croissante<br>\严格单调递增\ | $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x < y \Rightarrow f(x) < f(y)).$ | |
| décroissante<br>\减函数\ | $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)).$ | |
| strictement décroissante<br>\严格单调递减\ | $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x < y \Rightarrow f(x) > f(y)).$ | |
| monotone<br>\单调函数\ | $f$ est croissante ou $f$ est décroissante | |
| $T$-périodique<br>\周期为T的函数\ | $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$ | |

| On dit que la fonction $f$ est | Définition | Illustration |
|---|---|---|
| périodique | $\exists\, T \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$ | |
| majorée<br>\有上界\ | $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M.$ | |
| minorée<br>\有下界\ | $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ m \leq f(x).$ | |
| bornée<br>\有界\ | $f$ est majorée et $f$ est minorée. | |
| paire<br>\偶函数\ | $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x).$ | |
| impaire<br>\奇函数\ | $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x).$ | |

## 1.4 Formules en mathématiques : l'exemple de la trigonométrie

En mathématiques, une **formule** \公式/计算式\ est souvent une expression à apprendre par cœur ou à retrouver très rapidement. Les formules peuvent être utilisées directement en exercices. Nous donnons dans cette partie les formules à connaître en **trigonométrie** \三角函数\. Elles seront particulièrement utilisées en physique. Un **formulaire** est un ensemble de formules.

### 1.4.1 Rappel : les fonctions trigonométriques

On munit le plan \平面\ d'un repère orthonormé \直角坐标系\ $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition 48
*Le **cercle trigonométrique** \单位元（可用于研究三角函数）\ est le **cercle** \圆\ du plan de **centre** \圆心\ $(0, 0)$ et de **rayon** \半径\ $1$.*

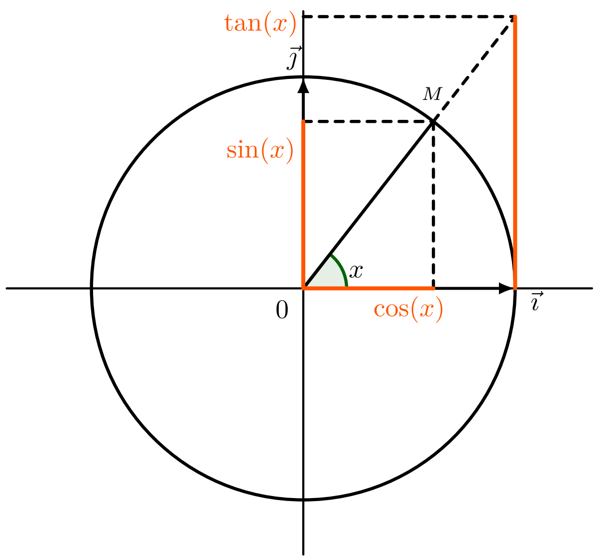
Définition 49
*Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $M$ le point du cercle trigonométrique tel que l'**angle** \角\ de **vecteur** \向量\ $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ est égal à $x$ (orienté dans le sens direct).*
*On note alors*

- $\cos(x)$ *l'**abscisse** \横坐标\ du point $M$,*
- $\sin(x)$ *l'**ordonnée** \纵坐标\ du point $M$.*

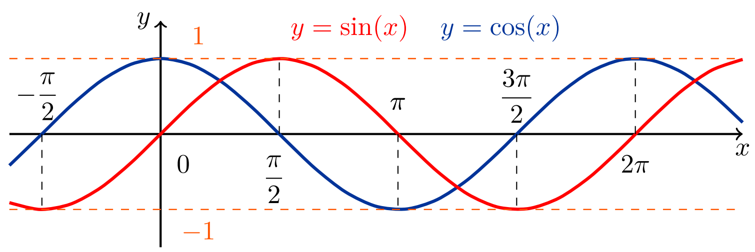
*On définit ainsi les fonctions cosinus et sinus de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$.*

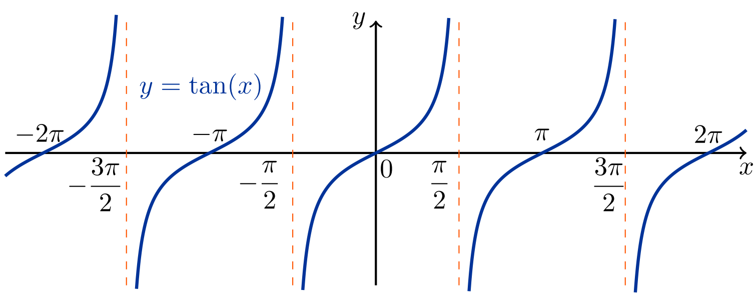
- *La fonction **tangente** \切线\ est alors définie, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (la barre \ se lit « privé de ») , par*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$




Les représentations graphiques sont les suivantes :



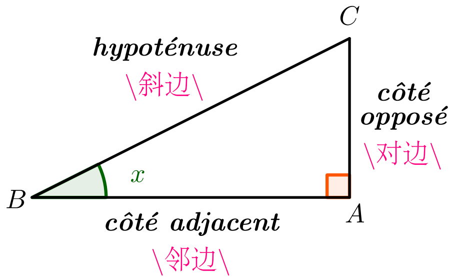
Remarque 50 — *Le cercle trigonométrique est l'ensemble des points* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $x^2 + y^2 = 1$.

Proposition 51

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $x^2 + y^2 = 1$. *Alors il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $x = \cos(\theta)$ *et* $y = \sin(\theta)$.

Donnons une interprétation sur les triangles \三角形\.

Proposition 52
*Soit* $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. *Soit* $ABC$ *un* ***triangle rectangle*** \直角三角形\ *en* $A$ *et tel que* $\widehat{ABC} = x$. *On a*




- $\cos(x) = \dfrac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$,
- $\sin(x) = \dfrac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$,
- $\tan(x) = \dfrac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}} = \dfrac{AC}{AB}$.

Proposition 53

- *Les fonctions* cos *et* sin *sont* $2\pi$*-périodiques :*
  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ *et* $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- *La fonction* tan *est* $\pi$*-périodique :* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}, \forall k \in \mathbb{Z}, \tan(x + k\pi) = \tan(x)$.
- *La fonction* cos *est paire :* $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$.
- *La fonction* sin *est impaire :* $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$.
- *La fonction* tan *est impaire :* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}, \tan(-x) = -\tan(x)$.

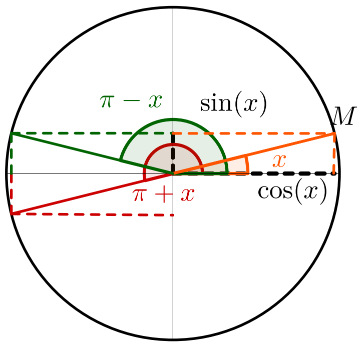
### 1.4.2 Formulaire

Les formules suivantes se retrouvent par lecture graphique.

Proposition 54 (Symétries \对称\)

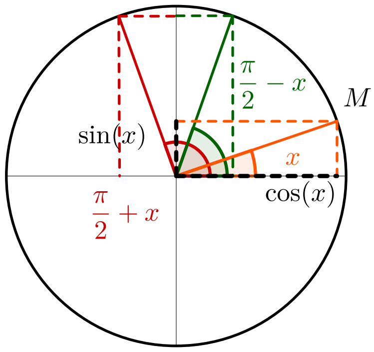
*Pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$,
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.




*Pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.



REMARQUE 55 — *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x) \quad \textit{et} \quad \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x).$$

Le tableau des valeurs remarquables est le suivant (à connaître !) :

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |
| $\tan(x)$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | X | $0$ |

On déduit facilement les autres valeurs par symétrie.

PROPOSITION 56 (Formules d'**addition** \加\ et de **soustraction** \减\ )

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$,
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$,
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$,
- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$,
- $\tan(a - b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.

Les formules suivantes s'obtiennent en prenant $a = b$ dans les formules d'addition.

PROPOSITION 57 (Formule de duplication)

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - \sin^2(a)$,
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$,
- $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$.

On en déduit alors les formules suivantes.

PROPOSITION 58 (Formules de linéarisation)

- $\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$,
- $\sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$.

PROPOSITION 59 (Formules de développement (**développer** \展开\))

- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$,
- $\cos(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b))$,
- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$,
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$.

PROPOSITION 60 (Formules de factorisation (**factoriser** \因式分解\))

- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,

## 1.5 Méthodes de démonstration

Un **raisonnement** \论证\ mathématique est un processus permettant d'établir, à partir de propositions vraies, de nouvelles propositions, de nouveaux résultats, en utilisant des principes logiques. Dans cette partie, nous étudions différents types de raisonnement.

Lorsque l'on écrit une proposition mathématique, il est sous-entendue qu'elle est vraie. Sinon, on ne l'écrit pas.

### 1.5.1 Vocabulaire

- Les **définitions** \定义\ introduisent du vocabulaire nouveau.
- Un **axiome** \公理\ est une proposition dont on décide qu'elle est vraie. Il ne se démontre pas.
- À partir des axiomes, on déduit des **théorèmes** \定理\, **propositions** \命题\, **lemmes** \引理\ et **corollaires** \推论\. Les théorèmes sont les propositions qui semblent les plus importantes, les lemmes sont des propositions qui servent à démontrer les théorèmes, les corollaires sont des conséquences directes de théorèmes.
- Une **démonstration** \证明\ ou une **preuve** est un texte qui justifie que la proposition est vraie.
- Une **conjecture** \猜想\ est une proposition dont on ne sait pas encore si elle est vraie ou fausse.

Une proposition s'énonce souvent sous la forme « Si $A$ alors $B$ » ( $A \Rightarrow B$ ).

- La proposition $A$ regroupe les **hypothèses** \假设\.
- La proposition $B$ regroupe les **conclusions** \结论\.

### 1.5.2 Quelques exemples de rédaction

Lorsque l'on dit « **Supposons** \假设\ $P$ », cela signifie que l'on suppose que la proposition $P$ est vraie.

Pour bien rédiger en mathématiques, on doit respecter certaines règles.

- On doit introduire les nouveaux objets.
  — Pour introduire une variable $x$ qui représente un **élément quelconque** \任意的(元素)\ d'un ensemble $E$, on peut écrire :
  « *Soit* $x \in E$ » ou « *Soit* $x$ *un élément de* $E$ ».
  — Pour donner un nom, par exemple $M$, à une quantité connue ou à un objet que l'on va souvent utiliser, on peut écrire :
  « ***Posons*** \令\ $M = \dots$ » ou « ***Notons*** \记\ $M = \dots$ ».
  Par exemple, « *Posons* $M = \dfrac{\sqrt{2}+3}{4}$ ».
- On doit mettre des liens logiques entre les arguments, comme par exemple :
  — « **Donc** » \因此/所以/那么\,
  — « **D'où** »,
  — « **Or** »,
  — « **Par conséquent** » \所以/因此\,
  — « **Ainsi** » \所以/因此\,
  — « **On en déduit que** » \我们从中可以推导出...\,
  — « **Finalement** » \总之/最后\, ...
- On peut annoncer ce que l'on va faire. Cela peut peut aider a bien clarifier l'objectif :
  « ***Montrons que*** ... \证明...\ ».

Le tableau suivant présente des exemples de rédaction selon ce que l'on doit démontrer.

| À démontrer | Idée | *Exemples de rédaction* |
| --- | --- | --- |
| Pour tout $x \in E$, $P(x)$.<br>« $\forall x \in E,\ P(x)$ » | On considère un élément quelconque $x$ de $E$ et on montre que $P(x)$ est vraie. | *Soit $x \in E$. Montrons $P(x)$.*<br>$\vdots$<br>*Donc $P(x)$.*<br>*D'où, pour tout $x \in E$, $P(x)$.* |
| Il existe $x \in E$ tel que $P(x)$.<br>« $\exists x \in E,\ P(x)$ » | En général, on donne explicitement un élément $x_0$ de $E$ tel que $P(x_0)$ est vraie (*trouver la valeur du $x_0$ est le plus difficile*) | *Posons $x_0 = \dots$ Montrons $P(x_0)$.*<br>$\vdots$<br>*Donc $P(x_0)$.*<br>*Il existe donc $x \in E$ tel que $P(x)$.* |
| Unicité d'un objet vérifiant une propriété $P(x)$ | On suppose qu'il en existe deux et on montre qu'ils sont égaux.<br>(*D'autres méthodes sont possibles.*) | *Soit $x$ et $x'$ des éléments de $E$. Supposons $P(x)$ et $P(x')$.*<br>*Montrons que $x = x'$.*<br>$\vdots$<br>*Donc $x = x'$. D'où l'unicité.* |
| Si $P$ alors $Q$.<br>« $P \Rightarrow Q$ » | On suppose que $P$ est vraie et on démontre que $Q$ est vraie. (*Rappelons que quand $P$ est fausse, cette implication est toujours vraie*). | *Supposons $P$. Montrons $Q$.*<br>$\vdots$<br>*Donc $Q$.*<br>*D'où, si $P$ alors $Q$.* |
| $P$ si et seulement si $Q$<br>« $P \Leftrightarrow Q$ » | • Méthode 1 : On raisonne par double implication, $P \Rightarrow Q$ puis $Q \Rightarrow P$<br>. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .<br>• Méthode 2 : On raisonne successivement par équivalence. | -*Supposons $P$. Montrons $Q$.*<br>$\vdots$<br>*Donc $Q$.*<br>-*Réciproquement, supposons $Q$. Montrons $P$.*<br>$\vdots$<br>*Donc $P$.*<br>-*D'où, $P$ si et seulement si $Q$.*<br>. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .<br>*$P$ si et seulement si*<br>$\vdots$<br>*si et seulement si $Q$.* |
| « *$P$ et $Q$* » | On montre que $P$ est vraie et que $Q$ est vraie. | -*Montrons $P$.*<br>$\vdots$<br>*Donc $P$.*<br>-*Montrons $Q$.*<br>$\vdots$<br>*Donc $Q$.*<br>-*D'où, $P$ et $Q$.* |
| « *$P$ ou $Q$* » | On peut montrer que « (*non $P$*) $\Rightarrow Q$ » est vraie. | *Supposons non$(P)$. Montrons $Q$.*<br>$\vdots$<br>*Donc $Q$.*<br>*D'où, $P$ ou $Q$.* |

Rappelons que pour prouver qu'une proposition $P$ est fausse, on peut montrer que sa négation $non(P)$ est vraie. Par exemple, pour montrer que la proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est fausse, on peut montrer que sa négation « $\exists\, x \in E,\ non(P(x))$ » est vraie. Donner un élément $x_0$ de $E$ tel que $non(P(x_0))$ est vraie s'appelle un **contre-exemple** \反例\.

- La flèche « $\Rightarrow$ » ne signifie pas « donc ». En effet, dire « $P$ est vraie donc $Q$ est vraie » n'est pas la proposition « $P \Rightarrow Q$ » (on ne sait pas si $P$ et $Q$ sont vraies ou fausses). On utilise finalement les faits suivants : *$P$ est vraie. Or $P \Rightarrow Q$ est vraie. Donc $Q$ est vraie.*
- Lorsque l'on utilise la flèche « $\Leftrightarrow$ », il faut être sûr que le sens direct ($\Rightarrow$) et le sens réciproque ($\Leftarrow$) soient vrais.

Remarque 61 — *Dans un exercice, pour appliquer un théorème de la forme $A \Rightarrow B$ (« Si $A$ alors $B$ »), on commence donc par vérifier que $A$ (les hypothèses) est vraie. On écrit par exemple*

*« On a $A$. Or d'après le théorème ..., $A$ implique $B$. Donc $B$ »*

Donnons des exemples de rédaction de démonstrations.

Exemples 62

- ***Démontrons*** \证明\ *que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $n$ est pair alors $n^2$ est pair.*
  *Il s'agit de la proposition « $\forall n \in \mathbb{Z},\ (n$ est pair $\Rightarrow n^2$ est pair) ».*

  Preuve *: Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que si $n$ est pair alors $n^2$ est pair.*
  *Supposons $n$ pair. Nous allons montrer que $n^2$ est pair.*
  *Par hypothèse, $n$ est pair, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. On a donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et $2k^2 \in \mathbb{Z}$.*
  *Donc $n$ est pair.*
  *Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $n$ est pair alors $n^2$ est pair.*

- *Démontrons que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.*
  *Il s'agit de la proposition « $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \big((a+b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)\big)$. »*

  Preuve *: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons, par double implication, que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.*

  ▷ *Supposons que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Montrons que $a = 0$ ou $b = 0$.*
  *Supposons $a \neq 0$. Nous allons montrer que $b = 0$.*
  *On sait que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et, par hypothèse, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Donc*

  $$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2.$$

  *Donc, $2ab = 0$, soit $ab = 0$. Or $a \neq 0$. Donc $b = 0$.*
  *Donc $a = 0$ ou $b = 0$.*
  *Donc si $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.*

  ◁ *Réciproquement, supposons $a = 0$ ou $b = 0$. Montrons que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.*
  *$-1^{er}$ cas : $a = 0$. Alors*

  $$(a+b)^2 = (0+b)^2 = b^2 = 0^2 + b^2 = a^2 + b^2.$$

  *$-2^{nd}$ cas : $b = 0$. Alors*

  $$(a+b)^2 = (a+0)^2 = a^2 = a^2 + 0^2 = a^2 + b^2.$$

  *−Donc, dans tous les cas, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.*
  *Donc si $a = 0$ ou $b = 0$ alors $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.*

  *Donc, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.*
  *$a$ et $b$ étant quelconques, on a le résultat.*

- *Démontrons que la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$ » est fausse.*

  Preuve *: Donnons un contre-exemple.*
  *Pour $n = 3$, on a $8 = 2^3 < 3^2 = 9$. Il existe donc un entier naturel $n$ tel que $2^n \leq n^2$. Donc la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$ » est fausse.*

Le cours de mathématiques est constitué d'une succession de propositions. Chaque proposition est suivie d'une démonstration (ou preuve). Il peut arriver qu'une démonstration soit trop difficile ou qu'elle soit démontrée plus tard dans le cours, on dit alors que la proposition est admise et on ne fait pas de démonstration.

L'exemple qui suit peut être vu comme un extrait d'un cours de trigonométrie. Nous donnons une proposition (à connaître), suivie d'une démonstration, d'un exemple et de quelques remarques.

EXEMPLE 63 —

PROPOSITION 64
*Soient $a$ et $b$ deux nombres réels non tous deux nuls. Il existe un nombre réel $\varphi$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi).$$

***Preuve*** — *Par hypothèse, $(a,b) \neq (0,0)$, donc $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$. Posons $x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $y_0 = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Alors $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Il existe donc $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 = \cos(\varphi)$ et $y_0 = \sin(\varphi)$.*
*Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc*

$$\begin{aligned}
a\cos(x) + b\sin(x) &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) - \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\right)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}(x_0\cos(x) - y_0\sin(x))\\
&= \sqrt{a^2+b^2}(\cos(\varphi)\cos(x) - \sin(\varphi)\sin(x))\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi).
\end{aligned}$$

***D'où le résultat*** \因此/由此我们能得到结论\. □

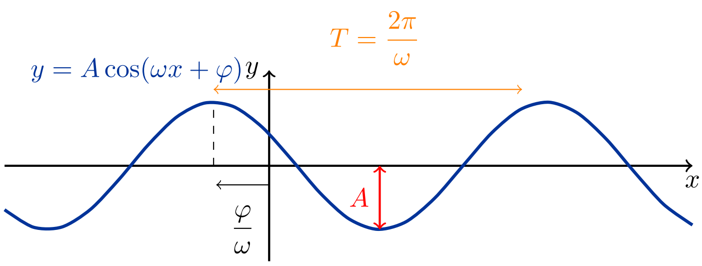
EXEMPLE 65 — *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}
\cos(x) + \sin(x) &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right)\\
&= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

REMARQUE 66 — *On pourrait démontrer de même que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un nombre réel $\psi$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

En physique, un **signal sinusoïdal** \正弦信号\ est une fonction de la forme $t \longmapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ , où $A$, $\omega$ et $\varphi$ sont des nombres réels. $A$ est appelé **amplitude** \振幅\, $\omega$ (se lit « omega ») est appelé **pulsation** \脉冲\ et $\varphi$ (se lit « phi ») est appelé **phase** \相位\.



La proposition précédente nous dit donc que la somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation $\omega$ est à nouveau un signal sinusoïdal de pulsation $\omega$. On peut en effet réécrire la proposition 64 sous la forme :
*Pour tout $(A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\omega \in \mathbb{R}$, il existe $A \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

### 1.5.3 Raisonnements classiques

#### 1.5.3.a. Raisonnement par contraposée (ou par contraposition)

Pour montrer que la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est vraie, on peut montrer que sa contraposée, qui est la proposition « $non(Q) \Rightarrow non(P)$ », est vraie. On parle de **raisonnement par contraposée** \换质换位\.

Exemple 67 — *Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $n^2$ est pair alors $n$ est pair.*

*Cette proposition s'écrit « $\forall n \in \mathbb{Z}$, ($n^2$ pair $\Rightarrow$ $n$ pair) ».*

Preuve : *Soit $n \in \mathbb{Z}$.*
*Plutôt que de montrer « $n^2$ pair $\Rightarrow$ $n$ pair », on montre la contraposée « $n$ impair $\Rightarrow$ $n^2$ impair », plus facile à démontrer.*
*Montrons par contraposée que si $n^2$ est pair alors $n$ est pair.*
*Supposons que $n$ est impair. Nous allons montrer que $n^2$ est impair.*
*Par hypothèse, $n$ est impair, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. On a donc*

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

*et $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$.*
*Donc $n^2$ est impair.*
*Donc si $n$ est impair alors $n^2$ est impair. On en déduit par contraposée que si $n^2$ est pair alors $n$ est pair.*
*D'où le résultat.*

#### 1.5.3.b. Raisonnement par l'absurde

On souhaite démontrer qu'une proposition $P$ est vraie. Le **raisonnement par l'absurde** \使用反证法\ consiste à supposer que $P$ est fausse, c'est-à-dire à supposer que $non(P)$ est vraie et montrer que cela conduit à une contradiction. On en déduit alors que $P$ est vraie.

Exemple 68 — *Démontrons que $\sqrt{2}$ est un* ***nombre irrationnel***[1] \无理数\.

Preuve : *Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Alors il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$,* ***premiers entre eux***[2]\互素/互质\, *tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.*
*On a donc $2q^2 = p^2$. On en déduit que $p^2$ est pair. Or, nous avons vu à l'exemple 67 que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $n^2$ est pair alors $n$ est pair. Donc $p$ est pair. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. On a donc $p^2 = 4k^2$, puis $2q^2 = 4k^2$. Donc finalement, $q^2 = 2k^2$. On en déduit que $q^2$ est pair. Donc, comme précédemment, $q$ est pair.*
*On en déduit que 2* ***divise*** \整除\ *$p$ et 2 divise $q$. Ceci est* ***absurde*** \矛盾\ *car cela contredit le fait que $p$ et $q$ sont premiers entre eux !*
*Donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.*

1. L'ensemble des nombres irrationnels est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : ce sont les nombres réels qui ne sont pas des nombres rationnels
2. Si un entier naturel $d$ divise $p$ et divise $q$ alors $d = 1$

#### 1.5.3.c. Raisonnement par disjonction de cas

Le **raisonnement par disjonction de cas** \分类讨论\ permet de simplifier un raisonnement en distinguant toutes les situations possibles. Cela est notamment utilisé lorsque la proposition dépend d'une variable $x$.

EXEMPLE 69 — *Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.*

Preuve : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Distinguons les cas selon que $n$ est pair ou $n$ est impair.*
• $1^{er}$ *cas : $n$ est pair. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. On a donc*

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$$

*et $k(2k+1)$ est un entier naturel.*
• $2^{nd}$ *cas : $n$ est impair. Alors il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k'+1$. On a donc*

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k'+1)(2k'+2)}{2} = (2k'+1)(k'+1)$$

*et $(2k'+1)(k'+1)$ est un entier naturel.*
• *Donc, dans tous les cas, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.*
*D'où le résultat.*

#### 1.5.3.d. Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Démontrer **par récurrence** \数学归纳法\ que la proposition « $\forall n \geq n_0,\ P(n)$ » est vraie repose sur le principe suivant :

Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation** \第一步/起始步骤\) ET pour tout $n \geq n_0$, « $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ » est vraie (**hérédité** \第二步/推递步骤\), alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

REMARQUE 70 — *En général, $n_0$ vaut 0, 1 ou 2.*

On peut donc, par exemple, rédiger un raisonnement par récurrence comme suit :

> « *Démontrons le résultat par récurrence. Notons, pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ la propriété "...... "* »
>
> - Initialisation : *Vérifions $P(n_0)$ (ce $n_0$ est à déterminer en fonction de l'énoncé et la vérification est souvent facile.)*
>
>   $\vdots$
>
>   D'où $P(n_0)$.
> - Hérédité : *Soit $n \geq n_0$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$. Dans cette étape, on va utiliser la propriété $P(n)$, qui est l'**hypothèse de récurrence** \归纳假设\.*
>
>   $\vdots$
>
>   *D'où $P(n+1)$.*
>
> *Par récurrence, on en déduit donc que, pour tout $n \geq n_0$, on a $P(n)$.*

EXEMPLE 71 — *Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Preuve : *Démontrons le résultat par récurrence. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété :*

$$« 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} ».$$

- *Initialisation : Pour $n = 1$, on a $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. D'où $P(1)$.*
- *Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$ :*

$$« 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} ».$$

*On a*

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = (1 + 2 + \ldots + n) + (n+1).$$

*Donc d'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$,*

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

*D'où $P(n+1)$.*

*Par récurrence, on a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Le principe que l'on vient de détailler est appelé une **récurrence simple** \第一数学归纳法\ : on déduit $P(n+1)$ directement de $P(n)$. Parfois, on ne peut déduire $P(n+2)$ que de $P(n+1)$ et $P(n)$. On parle alors de **récurrence double** \两步数学归纳法\. Le principe est le suivant :

Si $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies (*initialisation*) ET pour tout $n \geq n_0$, la proposition « $(P(n)$ et $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$ » est vraie (*hérédité*), alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 72 — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la **suite** \数列\ définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_1 = 3, \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

*Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.*

Preuve : *Démontrons par récurrence le résultat. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la propriété :*

$$« u_n = 1 + 2^n ».$$

- *Initialisation : On a $u_0 = 2 = 1 + 2^0$ et $u_1 = 3 = 1 + 2^1$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.*
- *Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$, montrons $P(n+2)$ :*

$$« u_{n+2} = 1 + 2^{n+2} ».$$

*On a $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, donc par hypothèses de récurrence,*

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3 \times (1 + 2^{n+1}) - 2 \times (1 + 2^n) \\ &= 3 + 3 \times 2^{n+1} - 2 - 2^{n+1} \\ &= 1 + (3-1) \times 2^{n+1} \\ &= 1 + 2 \times 2^{n+1} \\ &= 1 + 2^{n+2}. \end{aligned}$$

*D'où $P(n+2)$.*

*Par récurrence, on a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.*

Enfin, il arrive que $P(n+1)$ ne puisse se déduire que de $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, ..., $P(n)$. On parle alors de **récurrence forte** \第二数学归纳法/强数学归纳法\. Le principe est le suivant :

Si $P(n_0)$ est vraie (*initialisation*) ET pour tout $n \geq n_0$, la proposition « $(P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ et ... et $P(n)) \Rightarrow P(n+1)$ » est vraie (*hérédite*), alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

EXEMPLE 73 — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n u_0$.*

Preuve : *Démontrons le résultat par récurrence. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la propriété :*

$$\text{« } u_n \leq 2^n u_0 \text{ ».}$$

- *Initialisation : On a $u_0 \leq 2^0 u_0$, donc $P(0)$ est vraie.*
- *Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, supposons $P(k)$. Montrons $P(n+1)$ :*

$$\text{« } u_{n+1} \leq 2^{n+1} u_0 \text{ ».}$$

*On a $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$. Donc par hypothèses de récurrence,*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq \sum_{k=0}^{n} 2^k u_0 = u_0 \sum_{k=0}^{n} 2^k = u_0 \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \\ &\leq 2^{n+1} u_0 \quad \text{car } u_0 \leq 0. \end{aligned}$$

*D'où $P(n+1)$.*

*Par récurrence forte, on en déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n u_0$.*

Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. Cette somme s'appelle une **somme géométrique** \等比级数\.

#### 1.5.3.e. Raisonnement par analyse-synthèse

Lorsque l'on veut chercher les solutions d'un problème et montrer que celles que l'on a trouvées sont les seules, on utilise le raisonnement par **analyse-synthèse** \分析综合法\.

Ce raisonnement s'effectue en deux étapes :

1. *Analyse* : On suppose que l'on a une solution du problème et on cherche à déterminer le maximum de propriétés vérifiées par cette solution.
2. *Synthèse :* On détermine parmi les éléments vérifiant les propriétés obtenues dans l'analyse quels sont ceux effectivement solutions du problème (il n'y en a pas d'autres).

On obtient ainsi l'ensemble des solutions du problème.

Ce raisonnement est particulièrement utile pour démontrer l'**existence** \ 存在性\ et l'**unicité** \唯一性\ d'une solution à un problème.

EXEMPLE 74 — *Déterminons l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Preuve : *Raisonnons par analyse-synthèse.*
• *Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y - f(x)) = 2 - x - y$.*
*Soit $x \in \mathbb{R}$. Prenons $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Alors $f(0) = 2 - x - f(x)$. Donc $f(x) = 2 - f(0) - x$.*
*Donc $f$ est de la forme $f(x) = a - x$ où $a \in \mathbb{R}$.*

• *Synthèse : Déterminons parmi les fonctions de la forme* $x \longmapsto a - x$ *celles qui vérifient la condition de l'énoncé. Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Soit* $f : x \longmapsto a - x$.
*On a*

$$\begin{aligned} f(y - f(x)) &= f(y - (a - x)) \\ &= f(y + x - a) \\ &= a - (y + x - a) \\ &= 2a - x - y. \end{aligned}$$

*Donc* $f$ *vérifie la condition de l'énoncé si et seulement si* $2a = 2$, *soit encore si et seulement si* $a = 1$.
• *Conclusion : Il existe donc une unique fonction vérifiant la condition de l'énoncé, c'est la fonction* $x \longmapsto 1 - x$.

# Chapitre 2 Vecteurs du plan et de l'espace

Dans ce deuxième chapitre, nous commençons par introduire le vocabulaire utilisé en **géométrie** \几何\, puis nous nous intéressons aux vecteurs, utilisés notamment en physique.

## 2.1 Vocabulaire en géométrie

### 2.1.1 Géométrie dans le plan

On introduit tout d'abord le vocabulaire utilisé lorsque l'on fait de la géométrie dans le **plan** \平面\, aussi appelée **géométrie plane** \平面几何\.

| Vocabulaire | Définition/Illustration | Vocabulaire | Définition/Illustration |
|---|---|---|---|
| Point<br>\点\ | | Figure (géométrique)<br>\图形\ | Un ensemble de points |
| Droite<br>\直线\ | | Demi-droite<br>\射线\ | |
| Segment<br>\线段\ | | Milieu d'un segment<br>\线段的中点\ | |
| Droites sécantes<br>\相交的直线\ | | Droites parallèles<br>\平行线\ | |

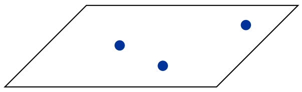
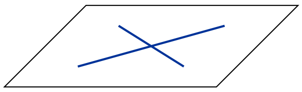
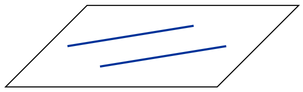
| | | | |
|---|---|---|---|
| Angle droit<br>\直角\ | | Droites perpendiculaires<br>\垂直的直线\ | |
| Droites confondues<br>\重合的直线\ | | Points alignés<br>\共线的点\ | |
| Point d'intersection<br>\交点\ | | Médiatrice d'un segment<br>\线段的垂直平分线\ | La droite passant par le milieu du segment et qui lui est perpendiculaire. |
| Projection orthogonale (ou projeté orthogonal) d'un point $M$ sur une droite $\mathcal{D}$<br>\某个点到某条直线的垂直（正交）投影\ | Le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par $M$. | Polygone<br>\多边形\ | Figure plane formée par une ligne brisée et fermée |
| Côté d'un polygone<br>\多边形的边\ | Segment qui constitue le polygone | Sommet<br>\多边形的顶点\ | Intersection de deux côtés |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Diagonale \对角线\ | Segment qui relie deux sommets non **consécutifs** \相邻的\ | Triangle \三角形\ | Polygone à trois côtés |
| Triangle isocèle \等腰三角形\ | | Triangle équilatéral \等边三角形\ | |
| Triangle rectangle \直角三角形\ | | Quadrilatère \四边形\ | Polygone à quatre côtés |
| Parallélogramme \平行四边形\ | | Rectangle \矩形\ | |
| Losange \菱形\ | | Carré \正方形\ | |
| Trapèze \梯形\ | | Cercle \圆\ | |
| Symétrique d'un point par rapport à une droite \某个点关于某条直线的对称（点）\ | | Symétrique d'un point $A$ par rapport à un point $O$ \点A关于点O对称\ | |

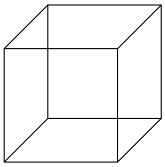
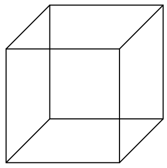
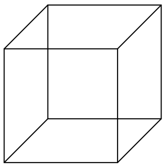
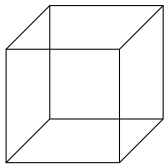
Les définitions et propriétés des quadrilatères particuliers (parallélogramme, rectangle, losange et carré) sont à connaître et seront rappelées en TD.

### 2.1.2 Géométrie dans l'espace

Un plan est défini par trois points non alignés ou deux droites sécantes ou deux droites strictement parallèles (parallèles et non confondues).

Un plan est une partie de l'**espace** \空间\. Le vocabulaire introduit dans la partie précédente est donc encore utilisé lorsque l'on fait de la géométrie dans l'espace.

| Vocabulaire | Définition/Illustration | Vocabulaire | Définition/Illustration |
|---|---|---|---|
| Droites (ou points) coplanaires<br>\共面的直线\ | Droites (ou points) appartenant à un même plan.<br> | Droites de même direction | Droites parallèles.<br> |
| Droites orthogonales<br>\正交直线\ | Droites qui sont parallèles à des droites se coupant à angle droit.<br> | Droites perpendiculaires<br>\垂直直线\ | Droites sécantes et orthogonales.<br> |
| Sphère<br>\球面\ | | Cube<br>\立方体\ | |
| Tétraèdre<br>\四面体\ | | Cylindre<br>\圆柱\ | |

## 2.2 Notion de vecteurs et opérations élémentaires

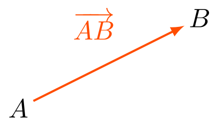
### 2.2.1 Définitions

Définition 1
*Soient $A$ et $B$ deux points du plan ou de l'espace. Le **vecteur** \向量\ $\overrightarrow{AB}$ est défini par la donnée d'un point $A$, appelé **origine** \起点\ du vecteur, d'un point $B$, appelé **extrémité** \终点\ du vecteur, et du sens « de $A$ vers $B$ ».*

*Si $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le **vecteur nul** \零向量\, noté $\vec{0}$.*

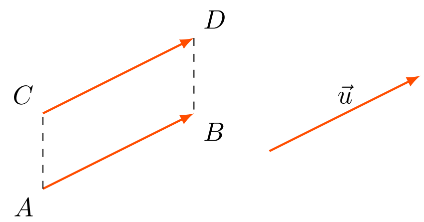
*Si $A$ et $B$ sont des points distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc caractérisé par :*
- *une **direction** \通常表示向量指向的方向\ : la droite $(AB)$ qui le dirige,*
- *un **sens** \通常表示运动的方向，例如从点$A$到点$B$的方向。\ : de $A$ vers $B$,*
- *une **norme** \范数（可理解为向量的长度）\ : la distance $AB$.*

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par une flèche de $A$ vers $B$ qui indique le sens du vecteur.




Définition 2
*Deux vecteurs sont **égaux** \相等\ s'ils ont même direction, même sens et même norme.*

Ainsi, on peut déplacer un vecteur en une autre origine, en respectant la direction, le sens et la norme. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut alors se noter $\vec{u}$, si l'on ne souhaite pas préciser l'origine et l'extrémité. On dit que $\vec{u}$ est un **représentant** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Il est entièrement caractérisé par sa direction, son sens et sa norme.




Proposition 3
*Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.*

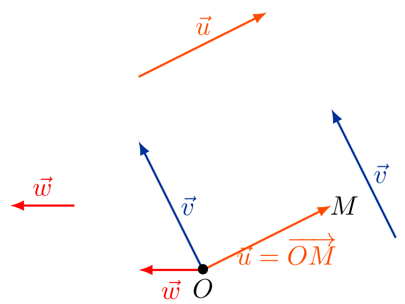
La norme du vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$ et celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. On a donc $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$. En physique, la norme est parfois appelée **intensité**.

Définition 4
*On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ est **unitaire** \单位向量\ si la norme de $\vec{u}$ est égale à 1 :*

$$\|\vec{u}\| = 1.$$

Remarque 5 — *Pour un vecteur $\vec{u}$ non nul, on peut toujours associer un vecteur unitaire de même sens et de même direction en divisant par la norme : $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ est de norme 1.*

Il est parfois plus facile de considérer des vecteurs ayant tous une même origine $O$. À chaque point $M$ du plan ou de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{OM}$. En physique, un vecteur a parfois une origine naturelle. Par exemple, un vecteur associé à une **force** \力（物理）\ est représenté à partir du point d'application de cette force. Un **vecteur vitesse** \速度向量\ associé à un **point matériel** \质点\ est représenté à partir de l'endroit où se trouve ce point.



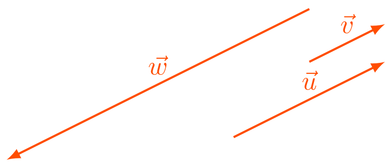
PROPOSITION 6
*Un vecteur $\vec{u}$ est nul si et seulement si sa norme est nulle :*

$$\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0.$$

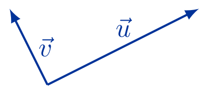
*Autrement dit, pour tout point $A$ et tout point $B$, $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.*

DÉFINITION 7

- *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont* ***colinéaires*** \共线\ *si l'un des vecteurs est nul ou s'ils même direction.*
- *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont* ***orthogonaux*** \正交的\ *si l'un des vecteurs est nul ou s'ils ont des directions orthogonales. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$*




VECTEURS COLINÉAIRES.

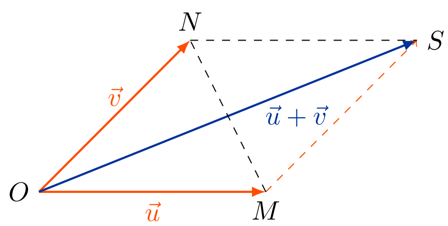



VECTEURS ORTHOGONAUX.

### 2.2.2 Somme de vecteurs

Les opérations sur les vecteurs se visualisent géométriquement.

DÉFINITION 8
*La* ***somme*** \向量的和\ *de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur obtenu par la règle du parallélogramme :*
*On considère les points $O$, $M$ et $N$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ et on construit le parallélogramme $OMSN$. Alors $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{OS}$.*
*On peut aussi construire directement le point $S$ à partir du point $M$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ : il vérifie $\overrightarrow{MS} = \vec{v}$.*



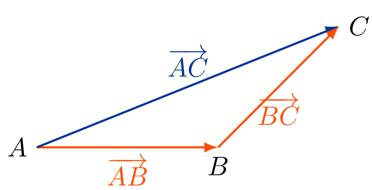

En physique, on ne peut additionner que des vecteurs de même dimension physique. Lorsque qu'un point matériel $M$ est soumis à deux forces, l'effet de ces deux forces (en même temps) est matérialisée par une seule force, appelée **résultante** appliquée au point $M$, agissant suivant la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont les deux forces à additionner.

PROPOSITION 9
*La somme de deux vecteurs vérifie les propriétés suivantes.*

- *Elle est* ***commutative*** \交换的/满足交换律（对于求和这一运算来说）\ *: $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$,*
- *Elle est* ***associative*** \结合的/满足结合律\ *: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$. On peut donc écrire plus simplement $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.*
- *Elle vérifie $\vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$.*
- *Tout vecteur $\vec{u}$ possède un* ***opposé*** \相反的\, *noté $-\vec{u}$, qui vérifie $\vec{u}+(-\vec{u}) = (-\vec{u})+\vec{u} = \vec{0}$.*

PROPOSITION 10 (Relation de Chasles)

*Soient $A$, $B$ et $C$ trois points.*
*Alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.*



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Cela découle de la relation de Chasles.

Proposition 11
*Deux vecteurs opposés ont même norme, même direction mais des sens opposés.*

Proposition 12 (**Inégalité triangulaire** \三角不等式\)
*Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a*

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|,$$

*avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.*

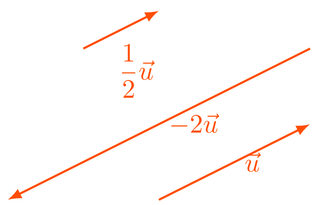
En général, on a donc $\|\vec{u}+\vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

### 2.2.3 Multiplication par un scalaire

Définition 13
*Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}$ un vecteur. La multiplication du vecteur $\vec{u}$ par le nombre réel $\lambda$, appelé **scalaire** \标量（对应于向量的数量乘法，即向量的数乘）\, est le vecteur, noté $\lambda\vec{u}$ caractérisé par :*

- *la même direction que le vecteur $\vec{u}$,*
- *le même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$, et un sens opposé si $\lambda < 0$,*
- *une norme égale à $|\lambda|\,\|\vec{u}\|$.*

*Si $\lambda = 0$, $\lambda\vec{u}$ est le vecteur nul.*




Proposition 14
*Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Soient $\lambda$ (se lit « lambda ») et $\mu$ (se lit « mu ») deux nombres réels. On a*

- $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$,
- $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$.

Proposition 15
*Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{v}$.*

Remarque 16 — *Si l'un des vecteurs est nul alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*

Proposition 17
*Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points.*

- *Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*
- *Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.*

Exemple 18 — *Soit $ABC$ un triangle. Soient $E$, $F$ et $G$ des points tels que*

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} \text{ et } \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

*Alors les points $E$, $F$ et $G$ sont alignés.*

***Preuve*** — *Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires en les exprimant en fonction de $\overrightarrow{AB}$.*

- *On a $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, donc $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, soit $\overrightarrow{BG} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.*

*On en déduit que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BG}$. Le quadrilatère $AEGB$ est donc un parallélogramme. D'où $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}$.*

- *Par la relation de Chasles, on a*

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

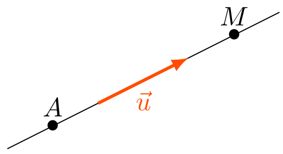
- *Finalement, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EG}$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont donc colinéaires, et les points $E$, $F$ et $G$ sont donc alignés.* □

Définition 19

*Soient $A$ et $B$ deux points distincts. On appelle **vecteur directeur** \方向向量\ de la droite $(AB)$ tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$. On dit aussi que le vecteur $\vec{u}$ dirige la droite $(AB)$.*

Proposition 20

*Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan ou de l'espace passant par un point $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$. Un point $M$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.*

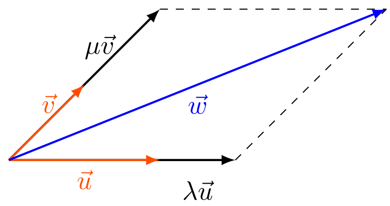



Définition 21

*Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On dit qu'un vecteur $\vec{w}$ est **combinaison linéaire** \线性组合\ des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que*

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

*On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** \共面\.*




Proposition 22

*Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points de l'espace. Les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.*

## 2.3 Système de coordonnées

### 2.3.1 Repères et coordonnées

Définition 23

- *Une **base** \基底/基\ **du plan** est une famille de deux vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ telle que tout vecteur $\vec{u}$ du plan s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ :*

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, \exists!\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2.$$

  *Les **coordonnées** \坐标\ (ou composantes) du vecteur $\vec{u}$ sont $x_1$ et $x_2$. Lorsque la base est précisée, on note les coordonnées $(x_1, x_2)$.*

- *Une **base de l'espace** est une famille de trois vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ telle que tout vecteur de l'espace s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$*

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \exists!\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

  *Les coordonnées (ou composantes) du vecteur $\vec{u}$ sont $x_1$, $x_2$ et $x_3$. Lorsque la base est précisée, on note les coordonnées $(x_1, x_2, x_3)$.*

Remarque 24 —

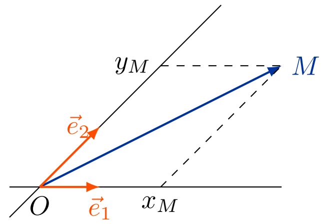
- *Dans le plan, une base est constituée de deux vecteurs non colinéaires.*
- *Dans l'espace, une base est constituée de trois vecteurs non coplanaires.*

Un repère permet de définir la position d'un point.

Définition 25
*Un **repère** \坐标系\ **du plan** est l'ensemble constitué d'une origine $O$ quelconque et d'une base de vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Les coordonnées $(x_M, y_M)$ d'un point $M$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans cette base :*

$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{e}_1 + y_M\vec{e}_2$$

*et $M$ a pour coordonnées $(x_M, y_M)$.*

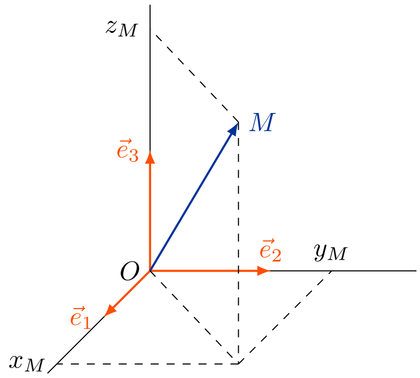



Définition 26

*Un **repère de l'espace** est l'ensemble constitué d'une origine $O$ quelconque et d'une base de vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Les coordonnées $(x_M, y_M, z_M)$ d'un point $M$ dans le repère $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans cette base :*

$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{e}_1 + y_M\vec{e}_2 + z_M\vec{e}_3$$

*et $M$ a pour coordonnées $(x_M, y_M, z_M)$.*




De tels repères sont parfois appelés **repères cartésiens** \笛卡儿坐标系/平面直角坐标系\ et les coordonnées sont appelées **coordonnées cartésiennes**. Muni d'un repère, le plan peut être identifié à $\mathbb{R}^2$ et l'espace à $\mathbb{R}^3$.

### 2.3.2 Calculs avec les coordonnées

Dans cette partie, on considère un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace. Les résultats sont donnés dans l'espace mais sont également valables dans le plan en enlevant la coordonnée selon l'un des vecteurs de la base.

Proposition 27
*Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x, y, z)$ et $(x', y', z')$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

- *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.*
- *Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$.*
- *Le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.*

**Preuve** —

- Cela découle de l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base.
- On a $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ et $\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$. Par somme des deux vecteurs, on obtient donc
$$\vec{u} + \vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 + x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3 = (x + x')\vec{e}_1 + (y + y')\vec{e}_2 + (z + z')\vec{e}_3.$$
Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a donc pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$.
- On a
$$\begin{aligned}\lambda\vec{u} &= \lambda(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)\\ &= (\lambda x)\vec{e}_1 + (\lambda y)\vec{e}_2 + (\lambda z)\vec{e}_3.\end{aligned}$$
Le vecteur $\lambda\vec{u}$ a donc pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

□

Proposition 28
*Soient $A$ et $B$ deux points de l'espace de coordonnées respectives $(x_A, y_A, z_A)$ et $(x_B, y_B, z_B)$. Alors*

- *Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$,*

- *Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées* $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2}, \dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

**Preuve** —

- On applique la relation de Chasles en introduisant le point $O$, origine du repère :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\\ &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\\ &= x_A\vec{e}_1 + y_A\vec{e}_2 + z_A\vec{e}_3 - (x_B\vec{e}_1 + y_B\vec{e}_2 + z_B\vec{e}_3)\\ &= (x_A - y_A)\vec{e}_1 + (y_A - y_B)\vec{e}_2 + (z_A - z_B)\vec{e}_3.\end{aligned}$$

  Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a donc pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

- Notons $I$ le milieu du segment $[AB]$. On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, donc par égalité des coordonnées, on obtient

$$\begin{cases} x_I - x_A = x_B - x_I \\ y_I - y_A = y_B - y_I \\ z_I - z_A = z_B - z_I \end{cases},$$

  et donc

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A+y_B}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2} \end{cases}.$$

  D'où le résultat.

□

Exemple 29 — *Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère de l'espace. Considérons les points $A(2,0,1)$, $B(1,-2,1)$, $C(5,5,0)$ et $D(-3,-5,6)$. Alors les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires.*

***Preuve*** — *Montrons que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.*

*$\overrightarrow{AD}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, soit si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que*

$$\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}.$$

*Or, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 3\beta = -5 \\ -2\alpha + 5\beta = -5 \\ -\beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -5 \\ \alpha = -10 \end{cases}.$$

*Le système étudié a donc des solutions et le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc coplanaires. On en déduit que les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires.* □

### 2.3.3 Repère orthonormé

Définition 30
*Un repère du plan ou de l'espace est dit **orthogonal** \直角坐标系\ si les vecteurs de la base sont **deux à deux** \两两\ orthogonaux.*

Définition 31
*Un repère du plan ou de l'espace est dit **orthonormé** \单位直角坐标系\ si les vecteurs de la base sont deux à deux orthogonaux et unitaires.*

En physique, les repères orthonormés du plan sont souvent notés $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ou $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et les repères orthonormés de l'espace sont souvent notés $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Rappelons l'énoncé du **théorème de Pythagore** \勾股定理\, qui permet de calculer des longueurs dans des repères orthonormés.

Théorème 32 (Théorème de Pythagore)
*Soit $ABC$ un triangle. Le triangle $ABC$ est rectangle en $B$ si et seulement si*

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Du théorème de Pythagore, on déduit les résultats suivants, vrais dans un repère orthonormé.

Proposition 33

- *Dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x, y)$ a pour norme*

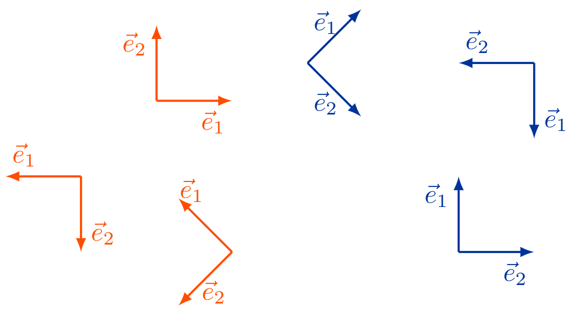
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- *Dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x, y, z)$ a pour norme*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

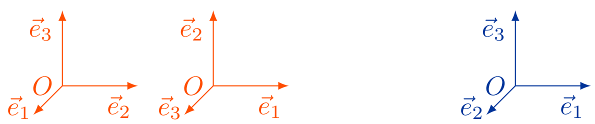
### 2.3.4 Orientation du plan et de l'espace

Définition 34
*Dans le plan, on considère qu'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est **direct** \右手坐标系\ si l'angle de vecteur $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ vaut $+\frac{\pi}{2}$ (orienté dans le sens direct \反钟向\). Sinon, on dit que le repère est **indirect** \右手坐标系\.*



Repère directs. Repères indirects.

Définition 35
*Dans l'espace, on considère un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soient $A$ le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1$ et $B$ le point tel que $\overrightarrow{OB} = \vec{e}_2$. Pour distinguer les repères directs et indirects, nous pouvons utiliser la règle du bonhomme d'Ampère. On imagine un bonhomme se tenant debout dans l'axe $(0, \vec{e}_3)$ les pieds positionnés en 0 et regardant vers $A$. On dit que le repère est **direct** si le bonhomme a le point $B$ à sa gauche. Sinon, on dit que le repère est **indirect**.*



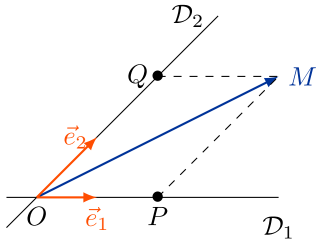
Repères directs. Repères indirects.

On parlera également de base directe ou indirecte.

### 2.3.5 Projection

On munit le plan d'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On note $\mathcal{D}_1$ la droite **dirigée par** $\vec{e}_1$ et $\mathcal{D}_2$ la droite dirigée par $\vec{e}_2$.

DÉFINITION 36
*Soit $M$ un point du plan de coordonnées $(x_M, y_M)$. Le point $P$ défini par $\overrightarrow{OP} = x_M\vec{e}_1$ s'appelle la **projection de $M$ sur la droite $\mathcal{D}_1$ parallèlement à la droite $\mathcal{D}_2$** \点$M$到直线$D1$（平行于直线$D2$）的投影\ [1].*
*Le point $Q$ défini par $\overrightarrow{OQ} = y_M\vec{e}_2$ s'appelle la **projection de $M$ sur la droite $\mathcal{D}_2$ parallèlement à la droite $\mathcal{D}_1$**.*

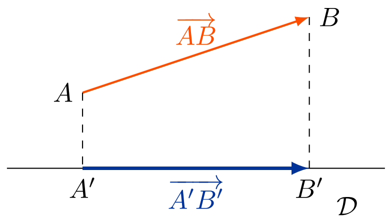



Avec les notations précédentes, le quadrilatère $OPMQ$ est un parallélogramme. Les coordonnées de $P$ sont $(x_M, 0)$ et celles de $Q$ sont $(0, y_M)$.

On obtient donc la coordonnée $x_M$ selon $\vec{e_1}$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ en projetant \投影\ $\overrightarrow{OM}$ sur la droite dirigée par $\vec{e}_1$, parallèlement à l'autre vecteur de la base.

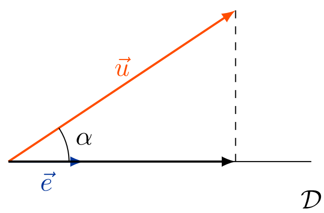
DÉFINITION 37

*Soient $A$ et $B$ deux points. La **projection orthogonale** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur une droite $\mathcal{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ où $A'$ (resp. $B'$) est le projeté orthogonal du point $A$ (resp. $B$) sur la droite $\mathcal{D}$.*




PROPOSITION 38

*Soient $\vec{u}$ un vecteur et $\vec{e}$ un vecteur unitaire. Notons $\alpha$ (se lit « alpha ») l'angle entre les vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{u}$, noté $(\vec{e}, \vec{u})$.*
*La projection orthogonale de $\vec{u}$ sur la droite dirigée par $\vec{e}$ est le vecteur $\|\vec{u}\| \cos(\alpha)\vec{e}$.*




## 2.4 PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

En physique, la notion de **produit scalaire** \点乘/积/数量积\ intervient notamment dans la définition du travail d'une force.

### 2.4.1 Définition

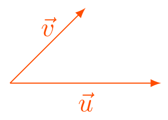
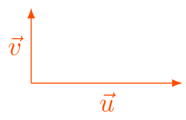
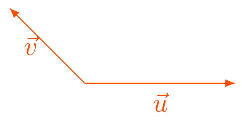
DÉFINITION 39
*Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre réel défini par*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\alpha),$$

*où $\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$.*

Le signe du produit scalaire dépend de l'angle entre les deux vecteurs :

1. \仅为字面翻译，关于投影，中文和法语的表达习惯有所不同，同学们最好能理解几几何上的表示。\

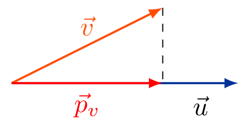
| Angle **aigu** \锐角\ | Angle droit | Angle **obtus** \钝角\ |
|---|---|---|
| $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$ | $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ | $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ |
|  |  |  |

Par parité du cosinus, on peut toujours considérer l'angle $\alpha$ dans $[-\pi,\pi]$.

Proposition 40
*Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est nul si et seulement si l'un des vecteurs est nul ou si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.*

Proposition 41
*Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a*

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{p}_v=\begin{cases}\|\vec{u}\|\,\|\vec{p}_v\| & si\ (\vec{u},\vec{v})\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ -\|\vec{u}\|\,\|\vec{p}_v\| & sinon\end{cases}$$




*où $\vec{p}_v$ est la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la droite dirigée par $\vec{u}$.*

En particulier, si $\vec{e}$ est un vecteur unitaire, $\vec{u}\cdot\vec{e}=\pm\|\vec{p}_u\|$ où $\vec{p}_u$ est la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur la droite dirigée par $\vec{e}$.

### 2.4.2 Propriétés du produit scalaire

Proposition 42
*Soit $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ un repère orthonormé. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x,y,z)$ et $(x',y',z')$. Alors*

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'.$$

**Preuve** — Par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3)\cdot(x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2+z'\vec{e}_3)\\&=x\vec{e}_1\cdot(x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2+z'\vec{e}_3)+y\vec{e}_2\cdot(x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2+z'\vec{e}_3)+z\vec{e}_3\cdot(x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2+z'\vec{e}_3)\\&=xx'+yy'+zz',\end{aligned}$$

en utilisant la fait que $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_i=1$ et pour $i\neq j$, $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=0$. □

On utilise parfois la notation en colonnes, plus visuelle :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=xx'+yy'+zz'.$$

Exemple 43 — *Soit $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ un repère orthonormé. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ deux vecteurs.*

*On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times2-1\times4+2\times1=0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonaux.*

*On a $\|\vec{u}\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+4^2+1^2}=\sqrt{21}$.*

Proposition 44

*Le produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :*

- *Il est* ***symétrique*** \对称的（数量积是一个对称的形式）\ *: Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u},$$

- *Il est* ***bilinéaire*** \双线性\ *: Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel $\lambda$,*

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{et} \quad (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Proposition 45

*Soit $\vec{u}$ un vecteur. Le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même se note $\vec{u}^2$ et vérifie $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$.*

Proposition 46

*Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé. Les coordonnées $(x_M, y_M, z_M)$ d'un point $M$ vérifient*

$$\begin{cases} x_M = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_1 \\ y_M = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_2 \\ z_M = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_3 \end{cases}.$$

Pour déterminer les coordonnées $(x_1, x_2, x_3)$ d'un vecteur $\vec{u}$ dans un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on peut donc calculer, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $x_i = \vec{u} \cdot \vec{e}_i$.

Souvent, pour résoudre une **équation vectorielle** \向量方程\ (équation avec des vecteurs) à laquelle on aboutit dans un problème physique, on la réécrit en plusieurs d'**équations scalaires** \标量方程\ (équation avec des nombres), portant sur les coordonnées des vecteurs.

Proposition 47 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

*Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a*

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$$

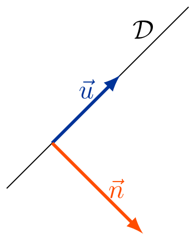
*avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*

*De plus, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens,*

*et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposé.*

Définition 48

*Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé du plan. Soit $\mathcal{D}$ une droite dirigée par un vecteur $\vec{u}$. Tout vecteur $\vec{n}$ non nul et orthogonal à $\vec{u}$ est appelé* ***vecteur normal*** \直线的法向量\ *à la droite $\mathcal{D}$.*




Proposition 49

*Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé. Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par le point $A$. Un point $M$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.*

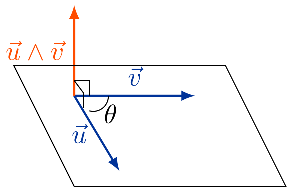
## 2.5 Produit vectoriel

### 2.5.1 Définition

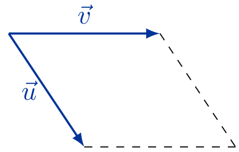
Définition 50

*Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Le* ***produit vectoriel*** \外积/叉乘/向量积\ *des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, défini de la façon suivante :*

- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$,*
- *Sinon,*
  1. *$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$,*
  2. *la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est directe,*
  3. *$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,|\sin(\theta)|$ où $\theta$ (se lit « thêta ») est l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*




La norme du produit vectoriel de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ correspond à l'**aire** \面积\ du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
L'aire d'un triangle $ABC$ est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.




La proposition suivante permet de tester la colinéarité de deux vecteurs.

Proposition 51

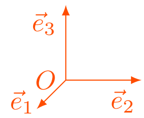
*Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*

### 2.5.2 Propriétés du produit vectoriel

Proposition 52

*Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée directe. Alors*

$$\begin{cases} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 = \vec{0} \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2 = \vec{0} \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3 = \vec{0}. \end{cases}$$




Proposition 53

*Le produit vectoriel vérifie les propriétés suivantes :*

- *Il est* ***antisymétrique*** \反对称的（向量积是一个反对称的形式）\ *: Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u},$$

- *Il est bilinéaire : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel $\lambda$,*

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \quad \text{et} \quad (\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}).$$

Proposition 54

*Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé direct. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x, y, z)$ et $(x', y', z')$. Alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

**Preuve** — On a

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \wedge (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3)$$

puis par les propriétés du produit vectoriel, on obtient

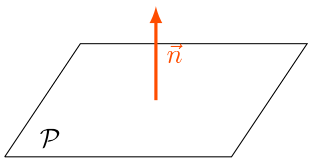
$$\begin{aligned}\vec{u}\wedge\vec{v} &= x\vec{e}_1\wedge(x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2+z'\vec{e}_3)+y\vec{e}_2\wedge(x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2+z'\vec{e}_3)+z\vec{e}_3\wedge(x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2+z'\vec{e}_3)\\ &= xx'\vec{e}_1\wedge\vec{e}_1+xy'\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2+xz'\vec{e}_1\wedge\vec{e}_3\\ &+ xy'\vec{e}_2\wedge\vec{e}_1+yy'\vec{e}_2\wedge\vec{e}_2+yz'\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3\\ &+ zx'\vec{e}_3\wedge\vec{e}_1+zy'\vec{e}_3\wedge\vec{e}_2+zz'\vec{e}_3\wedge\vec{e}_3\\ &= (xy'-yx')\vec{e}_3+(zx'-xz')\vec{e}_2+(yz'-zy')\vec{e}_1.\end{aligned}$$

□

EXEMPLE 55 — *Soient* $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. *Alors* $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

DÉFINITION 56

*Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On appelle* ***vecteur normal*** \平面的法向量\ *au plan $\mathcal{P}$ un vecteur non nul et orthogonal à tout vecteur du plan $\mathcal{P}$.*




PROPOSITION 57
*Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul. Alors $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$.*

PROPOSITION 58
*Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace* ***dirigé par*** *les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.*

EXEMPLE 59 — *Soit $A$, $B$ et $C$ trois points de l'espace. Le plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A$, $B$ et $C$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.*

PROPOSITION 60
*Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par le point $A$. Un point $M$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.*

### 2.5.3 Double produit vectoriel

DÉFINITION 61
*Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. On appelle* ***double produit vectoriel*** \双重外积\ *le vecteur $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$.*

PROPOSITION 62
*Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs. Alors*

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}.$$

**Preuve** — Se vérifie avec les coordonnées. □

REMARQUE 63 — *Le produit vectoriel $\vec{x}=\vec{v}\wedge\vec{w}$ est un vecteur normal au plan dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{x}$, orthogonal à $\vec{x}$, se trouve dans le plan dirigé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$ sont donc coplanaires.*

EXEMPLE 64 — *Soit* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *une base orthonormée directe. On a, par exemple,*

$$\begin{cases} (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \wedge \vec{e}_3 = \vec{0} \\ (\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1) \wedge \vec{e}_2 = \vec{0} \\ (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) \wedge \vec{e}_1 = \vec{0} \end{cases} \qquad et \quad \begin{cases} (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \\ (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \\ \dots \end{cases}$$

En général, $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \neq (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$. En effet, le vecteur $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ se trouve dans le plan dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ alors que le vecteur $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ se trouve dans le plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

# Chapitre 3 Fonctions réelles

L'objectif de ce chapitre est d'apprendre à rédiger en français ce que vous connaissez certainement déjà sur les fonctions. On pourra utiliser des notions étudiées dans le cours d'Analyse 1 après avoir introduit le vocabulaire nécessaire. Une partie du vocabulaire a été donnée dans le chapitre 1.

## 3.1 Généralités sur les fonctions

### 3.1.1 Introduire une fonction

Voici pour commencer différentes manières d'introduire une fonction.

- « Soit $f$ une fonction de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$ »,
- « Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction »,
- « Notons $f : R_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $x \longmapsto \sqrt{x}$ »
- « Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$ »,
- « Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x)$ »,
- « Soit $f$ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par $f(x) = \ln(x)$ ».

Il faut bien distinguer $f$ (la fonction) et $f(x)$ (un nombre réel).

Écrire « ... la fonction $f(x)$... » n'a pas de sens car $f(x)$ n'est pas une fonction, c'est l'image de $x$ par la fonction $f$. On écrira donc « ... la fonction $f$... » ou « ... la fonction $f : x \longmapsto f(x)$... » . Par exemple, « La fonction $x \longmapsto x^2 + 1$ est paire. » et non « La fonction $x^2 + 1$ est paire. »

Parfois, on ne précise pas l'ensemble de définition, soit parce que c'est clair, soit parce qu'il est à déterminer. Par exemple, « Soit $g : x \longmapsto \sqrt{x^2 + x - 6}$. »

### 3.1.2 Intervalles et ensemble de définition

Nous avons déjà vu que l'on peut décrire un ensemble $F$ à l'aide d'une propriété $\mathcal{P}$ : $F = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$ (se lit « l'ensemble des $x$ appartenant à $E$ tels que $P(x)$ ») . Cela signifie que $F$ est l'ensemble des éléments de $E$ qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$.

Par exemple, $P = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est pair}\}$ désigne l'ensemble des nombres pairs, $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ désigne l'**intervalle** \区间\ $[0, 1]$.

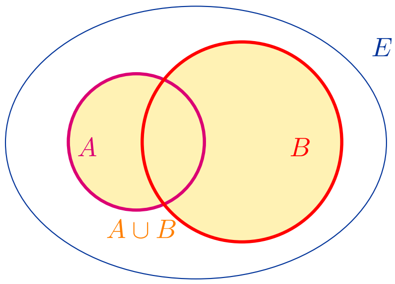
Plus généralement, on utilise les intervalles de $\mathbb{R}$ suivants, avec $a < b$ :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalle fermé),
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalle ouvert),
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (intervalle fermé en $a$, ouvert en $b$),
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (intervalle ouvert en $a$, fermé en $b$),
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ ,
- $]a, +\infty = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$,
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$,
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$,

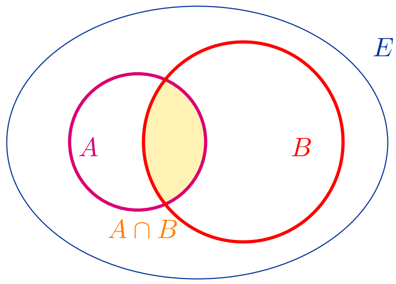
L'**ensemble vide** \空集\, noté $\emptyset$, (l'ensemble qui ne contient aucun élément) et l'ensemble $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ sont également des intervalles.

Définition 1

- *On appelle **union** \并集\ de $A$ et $B$, notée $A \cup B$, l'ensemble des éléments appartenant soit à $A$, soit à $B$ :*
$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$
- *On appelle **intersection** \交集\ de $A$ et $B$, notée $A \cap B$, l'ensemble des éléments appartenant à $A$ et à $B$ :*
$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$




Union




Intersection

Exemples 2

- $]-\infty, 3] \cup [2, 4] = ]-\infty, 4]$,
- $]-1, 1[ \cup [1, 2] = ]-1, 2]$,
- $]-1, 1] \cap [0, 1[ = [0, 1[$,
- $]-1, 0[ \cap [0, 1] = \emptyset$.

Remarque 3 — *Une intersection d'intervalles est un intervalle mais une union d'intervalles n'est pas toujours un intervalle.*

L'ensemble de définition d'une fonction s'écrit souvent sous la forme d'une union d'intervalles.

Exemple 4 — *Déterminons l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + x - 6}$.*

*La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.*

*Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x - 6 \geq 0$ si et seulement si $x \in ]-\infty, -3] \cup [2, +\infty($.*

*Pour trouver cela, on peut par exemple calculer le **discriminant** \判别式\ $\Delta = 1^2 - 4 \times \times (-6) = 25$ de $x^2 + x - 6$ pour trouver les **racines** $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2$, et par exemple tracer un **tableau de signes**.*

*Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction $f$ est $\mathcal{D}_f = ]-\infty, -3] \cup [2, +\infty[$.*

### 3.1.3 Tableau de variations

#### 3.1.3.a. Monotonie

Étudier le **sens de variations** \变化方向\ d'une fonction sur son ensemble de définition consiste à trouver les intervalles sur lesquels $f$ est croissante et sur lesquels $f$ est décroissante. On résume parfois cela dans un **tableau de variations**.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | $1$ | | | | $0$ |
| | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $-10$ | $\nearrow$ | |

Tableau de variations n° 1

La notion de **monotonie** \单调性\ (être croissant ou être décroissant) n'a de sens que sur un intervalle. Par exemple, la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-^* = ]-\infty, 0[$, sur $\mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[$ mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ puisque $-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$.

#### 3.1.3.b. Extrema

Définition 5

*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*

- *On dit que $f$ admet un **maximum** (global) \最大值\ en $a$ si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$.*
  *On appelle $f(a)$ le maximum de $f$ et on note $f(a) = \max_I(f)$ ou $\max_{x\in I}(f(x))$.*
- *On dit que $f$ admet un **maximum local** \极大值\ en $a$ s'il existe $h > 0$ tel que pour tout $x \in I\cap]a-h, a+h[$, $f(x) \leq f(a)$.*
- *On dit que $f$ admet un **minimum** (global) \最小值\ en $a$ si pour tout $x \in I$, $f(a) \leq f(x)$.*
  *On appelle $f(a)$ le minimum de $f$ et on note $f(a) = \min_I(f)$ ou $\min_{x\in I}(f(x))$.*
- *On dit que $f$ admet un **minimum local** \极小值\ en $a$ s'il existe $h > 0$ tel que pour tout $x \in I\cap]a-h, a+h[$, $f(a) \leq f(x)$.*

Remarque 6 — *Si une fonction admet un maximum ou un minimum, on dit qu'elle admet un **extremum** \极值点\ (ou des extrema).*

Sur un tableau de variations, on repère facilement les extrema.

Exemple 7 — *Reprenons le tableau de variations n° 1.*

- *La fonction $f$ admet un maximum en $0$, qui vaut $1$.*
- *La fonction $f$ n'admet pas de minimum.*
- *La fonction $f$ admet un minimum local en $1$, qui vaut $-10$.*

Remarque 8 — *Une fonction peut ne pas avoir de minimum ou maximum et si elle en a, il n'est pas forcément atteint en un unique élément.*

Exemple 9 — *La fonction* $\cos$ *admet un maximum, qui vaut $1$, atteint en tout point de $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.*

#### 3.1.3.c. Limites

Lorsque l'on étudie une fonction, on s'intéresse généralement aux **limites** \极限\ de la fonction aux **bornes** \定义域的界\ de son ensemble des définition.

Si $f$ **admet une limite** $\ell$ en $a$ \存在极限\, on note :

$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ (se lit « limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $a$ égale $\ell$ » ou « limite de $f(x)$ en $a$ vaut/égale $\ell$ »)

ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ (se lit « $f(x)$ tend vers $\ell$ lorsque $x$ tend vers $a$ »)

Exemples 10

- *Sur le tableau de variations précédent,* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
- *Les fonctions* sin *et* cos *n'admettent pas de limite en* $\pm\infty$.

Nous ne revenons pas sur les opérations et calculs de limites vus en Analyse 1.

### 3.1.4 Image d'un intervalle par une fonction

Définition 11
*Soit* $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. Pour tout* $x \in \mathcal{D}_f$ *et tout* $y \in \mathbb{R}$, *si* $y = f(x)$, *on dit que* $y$ *est l'**image** de* $x$ *par* $f$ *et que* $x$ *est un **antécédent*** \原象\ *de* $y$.

Définition 12
*Soit* $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. Soit* $I$ *un intervalle inclus dans* $\mathcal{D}_f$. *L'**image de*** $I$ *par la fonction* $f$, *noté* $f(I)$, *est l'ensemble des images des éléments* $x$ *appartenant à* $I$ *:*

$$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I, y = f(x)\}.$$

On peut utiliser un tableau de variations pour déterminer l'image d'un intervalle $I$ par une fonction $f$.

Exemples 13
- *En reprenant le tableau de variations n*$^o$ *1, l'image de* $[0, 1]$ *par la fonction* $f$ *est* $f([0, 1]) = [-10, 1]$.
- *L'image de l'intervalle* $[-1, 3[$ *par la fonction* $f : x \longmapsto x^2$ *est* $f(I) = [0, 9[$.
- *L'image de* $\pi\mathbb{Z} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *par la fonction* sin *est* $\{0\}$.
- *L'image de l'intervalle* $[0.13, 5.8]$ *par la **fonction partie entière*** $E$ \取整函数\ *est* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Remarque 14 — *L'image d'un intervalle n'est donc pas forcément un intervalle.*

Définition 15
*Soit* $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* $f$ *est **à valeurs dans*** $A$ *si pour tout* $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \in A$ *Autrement dit,* $f(\mathcal{D}_f) \subset A$.

Exemples 16
- *La fonction* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $x \longmapsto x^2$ *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$.
- *La fonction* sin *est à valeurs dans* $[-1, 1]$.

Remarque 17 — *Revenons sur les différentes manières de décrire un ensemble.*
- *On peut donner la liste de tous les éléments de l'ensemble* $E$ *entre accolades* $\{\ \}$.
  *Par exemple,* $E_1 = \{a, b, c, d\}$, $E_2 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $E_3 = \{1, 2, 3, 4\}$ *ou* $E_4 = \{1, \ldots, n\}$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$. $E_1$ *est parfois noté* $[\![1, 4]\!]$ *et* $E_2$ *est parfois noté* $[\![1, n]\!]$.
  *L'ordre des éléments n'a pas d'importance :* $\{a, b\} = \{b, a\}$. *Généralement, un élément apparaît une seule fois :* $\{a, b, a\} = \{a, b\}$.
- *On peut décrire un ensemble* $F$ *à l'aide d'une propriété* $\mathcal{P}$ *(voir paragraphe précédent).*
- *Enfin, comme on vient de le voir, un ensemble peut se noter* $\{f(x), x \in E\}$ *(se lit « l'ensemble des* $f$ *de* $x$ *avec* $x$ *appartenant à* $E$ *») où* $f$ *est une fonction de* $E$ *dans* $F$.
  *Par exemple, l'ensemble* $P$ *des nombres pairs peut aussi se noter* $P = \{2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
  *L'ensemble des carrés parfaits est l'ensemble* $\{x^2, x \in \mathbb{N}\} = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots\} = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$.

### 3.1.5 Opérations sur les fonctions

DÉFINITION 18
*Soient* $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions définies sur un même ensemble* $\mathcal{D}$*. Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

- *La* ***somme*** *de* $f$ *et* $g$ *est la fonction, notée* $f + g$*, définie, pour tout* $x \in \mathcal{D}$*, par*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

- *La* ***différence*** *de* $f$ *par* $g$ *est la fonction, notée* $f - g$*, définie, pour tout* $x \in \mathcal{D}$*, par*

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

- *Le* ***produit*** *de* $f$ *et* $g$ *est la fonction, notée* $fg$*, définie, pour tout* $x \in \mathcal{D}$ *par*

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

- *Le* ***produit*** *de* $f$ *et* $\lambda$ *est la fonction, notée* $\lambda f$*, définie, pour tout* $x \in \mathcal{D}$*, par*

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

- *Si la fonction* $g$ *ne s'annule pas, le* ***quotient*** \商\ *de* $f$ *par* $g$ *est la fonction, notée* $\frac{f}{g}$ *(se lit « $f$ sur $g$ »)* *, définie, pour tout* $x \in \mathcal{D}$*, par*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

DÉFINITION 19
*Soient* $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions définies sur des ensembles* $\mathcal{D}_f$ *et* $\mathcal{D}_g$*. On suppose que la fonction* $f$ *est à valeurs dans* $\mathcal{D}_g$*. La* ***composée*** $g \circ f$ *(se lit « $g$ rond $f$ »)* \函数$f$和$g$的复合\ *est la fonctions définie, pour tout* $x \in D_f$*, par*

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right).$$

EXEMPLE 20 — *Soient* $f$ *et* $g$ *les fonctions définies par*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}.$$

*Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = f(x) + 1 = x^2 + 1$

*et* $\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = \big(g(x)\big)^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$

*Donc* $g \circ f$ *et* $f \circ g$ *ne sont pas égales.*

## 3.2 CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

### 3.2.1 Continuité

DÉFINITION 21

- *Soit* $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. Soit* $a \in \mathcal{D}_f$*. On dit que* $f$ *est* ***continue en*** $a$ \在$a$点连续\ *si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$*.*
- *L'ensemble des fonctions continues sur un ensemble* $\mathcal{D}$*, c'est-à-dire continues en tout point de* $\mathcal{D}$*, est noté* $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$*.*

Proposition 22

- *Les **fonctions usuelles** \常用函数\ du tableau p.3 sont continues sur leur ensemble de définition.*
- *Soient $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f$ et $g$ sont des fonctions continues sur $D$ alors $f+g$, $fg$, $\lambda f$ et $\dfrac{f}{g}$ (si $g$ ne s'annule pas sur $D$) sont continues sur $\mathcal{D}$.*
- *Soient $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f$ est à valeurs dans $\mathcal{D}_g$. Si $f$ et $g$ sont continues alors $g \circ f$ est continue sur $\mathcal{D}_f$.*
- *Soient $I$ et $J$ deux intervalles et $f : I \longrightarrow J$ une fonction **bijective de $I$ sur $J$** \从$I$到$J$的双射\. Si $f$ est continue sur $I$ alors sa **bijection réciproque** \逆映射\ $f^{-1}$ (se lit « $f$ moins $-1$ ») est continue sur $J$.*

Il existe des fonctions non continues.

Exemple 23 — *La fonction partie entière $E$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Elle est **discontinue** \不连续\ en tout point $n \in \mathbb{Z}$. Par exemple, la limite de $E$ à gauche en $1$ vaut $0$ ($\lim\limits_{x\to 1^-} E(x) = 0$) et la limite de $E$ à droite en $1$ vaut $1$ ($\lim\limits_{x\to 1^+} E(x) = 1$).*

### 3.2.2 Dérivabilité

#### 3.2.2.a. Définitions et formules

Définition 24

- *Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. On dit que $f$ est **dérivable en $a$** \在$a$点可导\ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Si c'est le cas, cette limite s'appelle la **dérivée de $f$ en $a$** \$a$点的导数\, et est notée $f'(a)$ (se lit « $f$ prime de $a$ ») ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ (se lit « d de $f$ sur d $x$ en $a$ ») .*
- *L'ensemble des fonctions dérivables sur un ensemble $D$, c'est-à-dire dérivables en tout point de $D$, est noté $\mathcal{D}(D, \mathbb{R})$.*
- *Pour tout $f \in \mathcal{D}(D, \mathbb{R})$, la fonction $x \longmapsto f'(x)$, notée $f'$, est appelée la **dérivée de $f$**.*

On n'écrit pas $(f(x))'$, cela n'a pas de sens car $f(x)$ est un nombre, mais $f'(x)$.

Exemple 25 — *Les fonctions usuelles du tableau p.3 sont dérivables sur leur ensemble de définition, sauf la fonction racine carrée et la fonction valeur absolue qui ne sont pas dérivables en $0$.*

Définition 26
*Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. La **tangente de $f$ en $a$** \$a$点的切线\ est la droite d'équation $y = f(a) + (x-a)f'(a)$.*

Proposition 27
*Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. Si $f$ est dérivable en $a$ alors $f$ est continue en $a$.*

La réciproque est fausse, la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue en $0$ mais n'est pas dérivable en $0$.

Proposition 28

- *Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f$ et $g$ sont dérivables sur $D$ alors $f+g$, $fg$, $\lambda f$ et $\dfrac{f}{g}$ (si $g$ ne s'annule pas sur $I$) sont dérivables sur $D$ et on a*

$$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad (\lambda f)' = \lambda f' \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

- *Soient $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f$ est à valeurs dans $\mathcal{D}_g$. Si $f$ et $g$ sont dérivables alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et*

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

- *Soient $I$ et $J$ deux intervalles. Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective de $I$ sur $J$. Si $f$ est dérivable sur $I$ et si $f'$ ne s'annule pas, alors la bijection réciproque de $f$, $f^{-1}$, est dérivable sur $J$ et*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Voici le tableau avec les dérivées des fonctions usuelles et l'ensemble de dérivabilité.

| *Fonction $f$* | *Ensemble de définition* | *Ensemble de dérivabilité* | *Dérivée $f'$* |
|---|---|---|---|
| $\lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $0$ |
| $x^n$ où $n \in \mathbb{Z}^*$ | $\begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } n > 0 \\ \mathbb{R}^* \text{si } n < 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } n > 0 \\ \mathbb{R}^* \text{si } n < 0 \end{cases}$ | $nx^{n-1}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\mathbb{R}_+$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin(x)$ |
| $\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\cos(x)$ |
| $\tan(x)$ | $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ + \pi\mathbb{Z}$ | $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ + \pi\mathbb{Z}$ | $1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$ |
| $\exp(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\exp(x)$ |
| $\ln(x)$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\arccos(x)$ (se lit « arc cosinus ») | $[-1, 1]$ | $]-1, 1[$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arcsin(x)$ (se lit « arc sinus ») | $[-1, 1]$ | $]-1, 1[$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan(x)$ (se lit « arc tangente ») | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\mathrm{ch}(x)$ (se lit « cosinus hyperbolique ») | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathrm{sh}(x)$ |
| $\mathrm{sh}(x)$ (se lit « sinus hyperbolique ») | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathrm{ch}(x)$ |

**Preuve** —

Démontrons, par exemple, le résultat pour tan et arccos.

• Sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ + \pi\mathbb{Z}$, sin et cos sont dérivables et cos ne s'annule pas. On a donc, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ + \pi\mathbb{Z}$, $\tan'(x) = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$.

On en déduit que $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ et $\tan'(x) = 1 + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

• La fonction $\cos : ]0, \pi[ \longrightarrow ] - 1, 1[$ est bijective, dérivable sur $]0, \pi[$ et sa dérivée, $-\sin$, ne s'annule pas sur $]0, \pi[$. Donc par dérivation d'une fonction réciproque, on a

$$\arccos'(x) = \frac{1}{(\cos' \circ \arccos)(x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$\square$

REMARQUE 29 — *La relation* $\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ *est parfois utile.*

*Par exemple, pour tout* $x \in ]-\pi, \pi[+2\pi\mathbb{Z}$*, si on pose* $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$*, en utilisant les formules de trigonométrie et cette relation, on obtient les formules suivantes :*

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

#### 3.2.2.b. Étude des variations d'une fonction

PROPOSITION 30
*Soit $I$ un **intervalle** de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Alors*

- *$f$ est constante si et seulement si $f'$ est nulle sur $I$.*
- *$f$ est croissante (resp. décroissante) sur $I$ si et seulement si $f'$ est positive (resp. négative) sur $I$.*
- *$f$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si $f'$ est positive et $f'$ est non nulle sur tout intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. En particulier, si $f'$ est strictement positive (resp. strictement négative) sauf éventuellement en un **nombre fini de points** \有限个点\ alors $f$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $I$ .*

Ce théorème est faux si $I$ n'est pas un intervalle.

MÉTHODE 31 — *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I$.*

- *Pour montrer que $f = g$ sur l'intervalle $I$, on peut montrer que $f' = g'$, puis montrer que pour un certains $x_0 \in I$, $f(x_0) = g(x_0)$. Cela revient à montrer que la fonction $f - g$ est nulle.*
- *Pour montrer que $f \leq g$ sur l'intervalle $I$, on peut montrer que la fonction $g - f$ est positive en étudiant par exemple ses variations.*

EXEMPLE 32 — *Montrons que pour tout* $x \in ] - 1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leq x$.

*Posons, pour tout* $x \in ] - 1, +\infty[$, $h(x) = x - \ln(1 + x)$. *Alors $h$ est dérivable sur* $] - 1, +\infty[$ *et pour tout* $x \in ] - 1, +\infty[$, $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{1 + x} = \dfrac{x}{x + x}$.

*On en déduit le tableau de variations suivant :*

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | \|\| | $-$ | $z$ | $+$ | |
| $h(x)$ | \|\| | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

*D'après le tableau de variations, on en déduit que pour tout* $x \in ] - 1, +\infty[$, $h(x) \geq 0$.

*Donc, pour tout* $x \in ] - 1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leq x$.

#### 3.2.2.c. Dérivées successives

Si une fonction $f$ est dérivable sur $D$ et si sa dérivée $f'$ est également dérivable sur $D$, alors la fonction $(f')'$ est notée $f''$ (se lit « $f$ seconde ») et est appelée la **dérivée seconde** \二阶导数\ de $f$. On dit que $f$ est deux fois dérivable sur $D$.

Plus généralement, on peut définir la **dérivée $n$-ième** \n阶导数\ de $f$, si elle existe.

DÉFINITION 33
*Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit les **dérivées successives** \逐次导数\ de $f$ sur $D$ par*

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n+1)} = (f^{(n)})' \quad \text{(à condition que } f^{(n)} \text{ existe)} \end{cases}.$$

*Soit $n \in \mathbb{N}$. Si la fonction $f^{(n)}$ est bien définie, on l'appelle la **dérivée $n$-ième de $f$** ou la **dérivée d'ordre $n$** \n级微商\. On dit que $f$ est $n$ fois dérivable sur $D$.*

*Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f$ est $n$ fois dérivable sur $D$, on dit que $f$ est **indéfiniment dérivable** \无穷阶可导\.*

REMARQUES 34

- *On note souvent $f$, $f'$, $f''$ plutôt que $f^{(0)}$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$.*
- *La proposition 28 se généralise aux dérivées successives.*

EXEMPLES 35

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp$ est $n$ fois dérivable et $\exp^{(n)} = \exp$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \longmapsto x^n$ est $k$ fois dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n \times (n-1) \times \dots (n-k+1)x^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 \quad \text{si } k > n \end{cases}.$$

## 3.3 Primitives et intégrales

DÉFINITION 36
*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une **primitive** \原函数\ de $f$ sur $I$ si $F$ est dérivable sur $I$ de dérivée $f$ :*

$$F' = f.$$

EXEMPLE 37 — *Les fonctions $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^2 + 1$ ou encore $x \longmapsto x^2 - 5$ sont des primitives de la fonction $x \longmapsto 2x$.*

Sur un intervalle, les primitives d'une fonction sont égales **à constante près** \相差一个常数\. Plus précisément :

PROPOSITION 38
*Si $F$ et $G$ sont deux primitives de $f$ sur un intervalle $I$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $G = F + \lambda$.*

**Preuve** — Soient $F$ et $G$ des primitives de $f$. On a donc $G' = f = F'$, donc $(G - F)' = 0$. La fonction $G - F$ est donc constante. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G - F = \lambda$. D'où $G = F + \lambda$. □

THÉORÈME 39
*Toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $I$ admet des primitives sur $I$.*

Une primitive se note parfois $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$ (se lit « intégrale de $f$ de $x$ d $x$ ») .

Les primitives usuelles se lisent dans le tableau p.49, en faisant la lecture de droite à gauche, et on peut toujours ajouter une constante.

Des formules de dérivation, on déduit que toute fonction de la forme $f' \times (g' \circ f)$ admet $g \circ f$ comme primitive.

Exemples 40

- *Une primitive de* $x \longmapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ *est* $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$.
- *Une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ *est* $x \longmapsto \ln(|u(x)|)$.
- *Pour* $n \neq -1$, *une primitive de* $x \longmapsto u'(x)u(x)^n$ *est* $x \longmapsto \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1}$.
- *Une primitive de* $x \longmapsto u'(x)\cos(u(x))$ *est* $x \longmapsto \sin(u(x))$.
- *Une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$ *est* $x \longmapsto \arctan(u(x))$.

Exemple 41 — *Une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{2}{4x^2+1}$ *est* $x \longmapsto \arctan(2x)$.

Proposition 42
*Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur l'intervalle* $I$. *Soit* $F$ *une primitive de* $f$ *sur* $I$. *Alors, pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

*(* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *se lit «* ***intégrale*** \积分\ *entre a et b de f de t d t. »)*

Exemple 43 — $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

Proposition 44
*Soient* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions continues sur* $I$ *et* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. *Soient* $(a,b) \in I^2$.

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$.
- ***Linéarité*** : $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
- ***Positivité*** : *Si* $f$ *est positive sur* $[a,b]$ *(avec* $a \leq b$*) alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$.
- ***Croissance*** : *Si* $f \leq g$ *sur* $[a,b]$ *(avec* $a \leq b$*) alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
- ***Relation de Chasles*** : *Pour tout* $c \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.
- ***Inégalité triangulaire*** : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exemple 45 — $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin(t)\mathrm{d}t - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\pi} - [-\cos(t)]_{\pi}^{2\pi} = 4$.

PROPOSITION 46
*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $I$. Soit $a \in I$. La fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$.*

## 3.4 Quelques fonctions usuelles

### 3.4.1 Fonctions polynomiales et rationnelles

DÉFINITION 47

- *On appelle **fonction polynomiale** \多项式函数\ toute fonction $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme*

$$x \longmapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

*avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Les $a_i$ sont appelés les **coefficients** \系数\ de $P$. Si $a_n \neq 0$, alors $n$ est le **degré** \次数\ de $P$.*

- *Le quotient d'une fonction polynomiale par une fonction polynomiale non nulle est appelé une **fonction rationnelle** \有理函数\.*

DÉFINITION 48
*Soit $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que $\lambda$ est **racine** \根\ de $P$ si $P(\lambda) = 0$.*

PROPOSITION 49
*Soit $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est racine de $P$, on peut factoriser $P$ par $X - \lambda$ : il existe une fonction polynomiale $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $P = (X - \lambda)Q$.*

EXEMPLE 50 — *On remarque que $-1$ est racine de la fonction polynomiale $x \longmapsto x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ et on obtient $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x+1)(x^2 - 3x + 1)$.*

*Considérons la fonction rationnelle $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $x \longmapsto \dfrac{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{x+1}$.*

*Alors une simplification de $f$ est $f(x) = x^2 - 3x + 1$.*

### 3.4.2 Fonctions exponentielle et logarithme

DÉFINITION 51
*L'unique primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en $1$ est appelée **logarithme népérien** et notée $\ln$.*

PROPOSITION 52
*Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Alors $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.*

*En particulier, $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.*

**Preuve** — Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$. Alors $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi'(x) = \dfrac{y}{xy} - \dfrac{1}{x} = 0$. Donc $\varphi$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\varphi(1) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $y = \dfrac{1}{x}$, on obtient $0 = \ln(1) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Donc $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

On en déduit $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \dfrac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on obtient $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Posons $p = -n \in \mathbb{N}$. Alors $\ln(x^n) = \ln\left(\frac{1}{x^p}\right) = -\ln(x^p) = -p\ln(x) = n\ln(x)$. □

PROPOSITION 53

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$,
- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

**Preuve** —

• La fonction ln est croissante puisque de dérivée positive. Elle admet donc une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$.

On a $\ln(2^n) = n\ln(2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\ln(2) > 0$. Mais $\ln(2^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ par hypothèse.

Donc par unicité de la limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $t = \frac{1}{x}$. Alors $t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\ln(x) = -\ln(t) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$.

• Soit $x > 1$. On a $\ln(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} - 1 \leq \sqrt{x}$. Or $\ln(x) = 2\ln(\sqrt{x})$.

Donc $\ln(x) \leq 2\sqrt{x}$. Donc $0 \leq \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

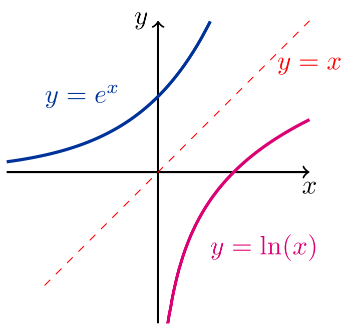
Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $t = \frac{1}{x}$. Alors $t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, donc $x\ln(x) = -x\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\dfrac{\ln(t)}{t} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. □

DÉFINITION 54
*La bijection réciproque de la fonction* $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la fonction* ***exponentielle****, notée* exp. *Elle est définie par*

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & \exp(x) = y \textit{ tel que } y > 0 \textit{ et } \ln(y) = x \end{array}.$$

REMARQUE 55 — *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln(x)) = x$.




PROPOSITION 56
*Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. *En particulier, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

**Preuve** — Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y$, donc $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(\dfrac{1}{\exp(x)}\right) = -\ln(\exp(x)) = -x$, donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(\exp(x)^n) = n\ln(\exp(x)) = nx$, donc $\exp(x)^n = \exp(nx)$. □

Proposition 57

- $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$,
- $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$,
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$.

**Preuve** — La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\exp(\mathbb{R}) = ]0, +\infty[$.

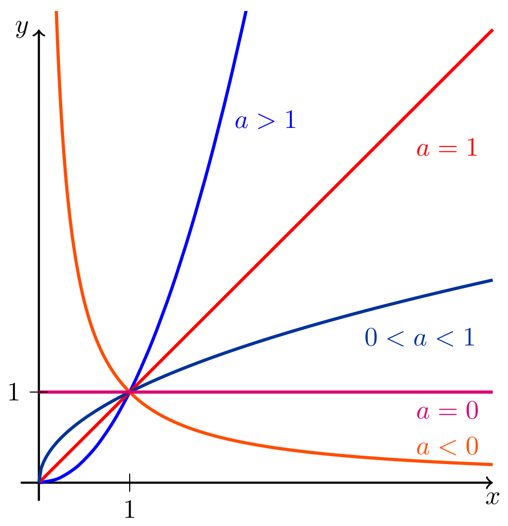
Donc $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.

Posons $t = \exp(x)$. Alors $t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{\exp(x)}{x} = \frac{t}{\ln(t)} = \frac{1}{\frac{\ln(t)}{t}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. $\square$

### 3.4.3 Fonctions puissances

Définition 58
*Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.*

- *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit le nombre réel $x$ **puissance** $a$ \幂函数\ par $x^a = \exp(a\ln(x))$.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la **racine $n$-ième** \n次根\ de $x$ le nombre réel $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.*




Proposition 59
*Soit $a \in \mathbb{R}$.*

- *La fonction $x \longmapsto x^a$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \longmapsto ax^{a-1}$.*
- *Si $a > 0$, on **prolonge** \延拓\ la fonction $x \longmapsto x^a$ en 0 en posant $0^a = 0$. On obtient une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. On parle de **prolongement par continuité** \连续性延拓\ en 0.*
- *Si $a > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty$ et $\lim_{x \to 0} x^a = 0$.*
- *Si $a < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^a = 0$ et $\lim_{x \to 0} x^a = +\infty$.*

**Preuve** —

- Posons $f_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $x \longmapsto x^a$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a(x) = \exp(a\ln(x))$, donc $f_a$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$f_a'(x) = \frac{a}{x}\exp(a\ln(x)) = a\exp((a-1)\ln(x)) = ax^{a-1}.$$
- Soit $a > 0$. Alors $a\ln(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$ et donc $x^a = \exp(a\ln(x)) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $f_a$ est continue en 0 en posant $0^a = 0$.
- Soit $a > 0$. D'après le point précédent, $\lim_{x \to 0} x^a = 0$. De plus, $a\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $x^a = \exp(a\ln(x)) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Soit $a < 0$. Alors $a\ln(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $x^a = \exp(a\ln(x)) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$. De plus, $a\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et donc $x^a = \exp(x\ln(a)) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\square$

REMARQUES 60

- *Si $a = n \in \mathbb{Z}$, on retrouve les* ***puissances entières*** \整数幂\ *puisque*

$$\exp(n\ln(x)) = (\exp(\ln(x)))^n = x^n.$$

- *La racine $n$-ième de $x$, $y = \sqrt[n]{x}$, vérifie $y^n = 1$.*

PROPOSITION 61

*Soient $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*

- $\ln(x^a) = a\ln(x)$,
- $x^a \times x^b = x^{a+b}$, *et en particulier,* $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^a$ *et* $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$,
- $(x^a)^b = x^{ab}$,
- *Si $a \neq 0$, $y = x^a$ si et seulement si $x = \sqrt[a]{y}$.*

**Preuve** — Par exemple, $\ln(x^a) = \ln(\exp(a\ln(x))) = a\ln(x)$. Les autres cas sont laissés en exercice. □

PROPOSITION 62

*Pour tout $a > 0$ et tout $b \in \mathbb{R}$,*

- *Si $a < b$* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{x^b} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^b}{x^a} = 0$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^b e^{-ax} = 0$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^b}{x^a} = 0$,
- $\lim\limits_{x\to 0} x^a |\ln(x)|^b = 0$.

**Preuve** —

- On a $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$, donc d'après la proposition 59, comme $a - b < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{a-b} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^{b-a} = +\infty$.
- On a $x^b\exp(-ax) = \exp(b\ln(x) - ax) = \exp\left(-ax\left(1 - \dfrac{b}{a}\dfrac{\ln(x)}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Le résultat est évident si $b \leq 0$. Supposons $b > 0$.

$$\frac{(\ln(x))^b}{x^a} = \left(\frac{\frac{b}{a}\ln(x^{\frac{a}{b}})}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b = \left(\frac{b}{a}\right)^b\left(\frac{\ln(u)}{u}\right)^b \text{ où } u = x^{\frac{a}{b}}.$$

Comme $\dfrac{a}{b} > 0$, $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et $\dfrac{\ln(u)}{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit ensuite le résultat.

- En posant $t = \dfrac{1}{x}$, on trouve la dernière limite à l'aide de la limite précédente. □

# Chapitre 4 Nombres complexes

## 4.1 Écriture algébrique

### 4.1.1 Forme algébrique

Définition 1

- *L'**ensemble des nombres complexes** est noté $\mathbb{C}$ et contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et un élément $i$ tel que $i^2 = -1$.*
- *Tout nombre complexe $z$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Cette écriture est appelée **forme algébrique** \代数式\ de $z$. Le nombre réel $a$ est appelé **partie réelle** \实部\ de $z$ et est noté $\mathrm{Re}(z)$ (se lit « partie réelle de $z$ ») . Le nombre réel $b$ est appelé **partie imaginaire** \虚部\ de $z$ et est noté $\mathrm{Im}(z)$ (se lit « partie imaginaire de $z$ ») .*
- *L'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est nulle est appelé **ensemble des imaginaires purs** \纯虚数\ et est noté $i\mathbb{R} = \{ib \mid b \in \mathbb{R}\}$.*

Remarque 2 —

- *Les nombres réels sont les nombres complexes de partie imaginaire nulle.*
- *Pour tout $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$, $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$. En particulier, $a + ib = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$.*

Proposition 3

- *Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $z = z'$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$.*
- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$.*
- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.*

Définition 4 (Opérations)
*L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est muni d'une addition $+$ et d'une multiplication $\times$ définies par :*

- *Pour tout $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$, $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$.*
- *Pour tout $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$, $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.*
- *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\dfrac{1}{a + ib} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$.*

Remarque 5 — *On remarque que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$, donc en général, $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z')$, et en particulier, $\mathrm{Re}(z^2) \neq \mathrm{Re}(z)^2$.*

*De même, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z')$ donc en général, $\mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$, et en particulier, $\mathrm{Im}(z^2) \neq \mathrm{Im}(z)^2$.*

Proposition 6

- *Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.*
- *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha z) = \alpha\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\alpha z) = \alpha\mathrm{Im}(z)$.*

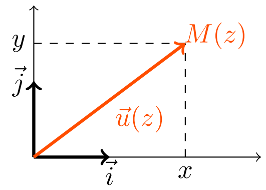
### 4.1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Définition 7
*On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.*

- *Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le point $M(z)$ de coordonnées $(x, y)$ est appelé le **point image** de $z$ et $z$ est appelé l'**affixe** de $M(z)$.*

- *Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, le vecteur $\vec{u}(z)$ du plan de coordonnées $(x, y)$ est appelé le* ***vecteur image*** *de $z$ et $z$ est appelé l'****affixe*** *du vecteur $\vec{u}(z)$.*

REMARQUE 8 — *Avec cette identification entre le plan et $\mathbb{C}$, la droite passant par $O$ et dirigée par $\vec{i}$ est identifiée à l'ensemble des nombres réels et la droite passant par $O$ et dirigée par $\vec{j}$ est identifiée à l'ensemble des imaginaires purs.*




PROPOSITION 9
*Soient $A$ et $B$ deux points du plan.*

- $z_B - z_A$ *est l'affixe du vecteur* $\overrightarrow{AB}$,
- $z_A + z_B$ *est l'affixe du vecteur* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
- $\alpha z_A$ *est l'affixe du vecteur* $\alpha\overrightarrow{OA}$.

**Preuve** —

Notons $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Alors le vecteurs $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Donc $z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$.

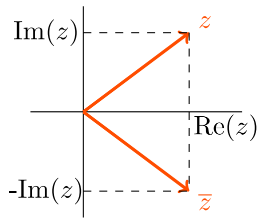
Les autres points se traitent de même. □

### 4.1.3 Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION 10
*Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle* ***conjugué*** \共轭\ *de $z$, noté $\overline{z}$ (se lit « z barre ») , le nombre complexe*

$$\overline{z} = a - ib.$$

REMARQUE 11 — *On a* $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ *et* $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.




PROPOSITION 12 *Pour tout* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$,
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, *et plus généralement, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$,
- $\overline{\overline{z}} = z$,
- *Si* $z \neq 0$ $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ *et si* $z' \neq 0$, $\overline{\dfrac{z}{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

**Preuve** — Traitons le dernier point.

On a $\overline{z} \times \overline{\dfrac{1}{z}} = \overline{z \times \dfrac{1}{z}} = \overline{1} = 1$, donc $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$. On en déduit que $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \dfrac{1}{z'}} = \overline{z} \times \overline{\dfrac{1}{z'}} = \overline{z} \times \dfrac{1}{\overline{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$. □

PROPOSITION 13
*Pour tout* $z \in \mathbb{C}$,

- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$,
- $z \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $\overline{z} = z$.
- $z \in i\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\overline{z} = -z$.

EXEMPLE 14 — *Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculons le conjugué de $3 + iz$.*

*On a* $\overline{3+iz} = \overline{3} + \overline{iz} = 3 + \overline{i}\overline{z} = 3 - i\overline{z}$.

REMARQUE 15 — *Soient deux nombres complexes $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$. Alors $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = a_1a_2 + b_1b_2 = \overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2}$ où $z_1$ et $z_2$ sont les affixes de $M_1$ et $M_2$.*

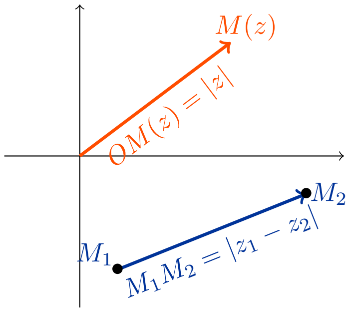
### 4.1.4 Module d'un nombre complexe

DÉFINITION 16
*Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **module** \模\ de $z$, noté $|z|$ (se lit « module de $z$ ») le nombre réel positif*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

REMARQUE 17 — *Si $z = a \in \mathbb{R}$ alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$ où $|a|$ est la valeur absolue de $a$. Ainsi, le module d'un nombre réel est égal à la valeur absolue de ce réel.*

REMARQUE 18 — *Le module de $z$ est égal à la norme du vecteur d'affixe $z$ et pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, le module de $z_1 - z_2$ est égal à la distance $M_1M_2$ où $z_1$ et $z_2$ sont les affixes de $M_1$ et $M_2$.*




PROPOSITION 19 *Pour tout $R > 0$,*

- *le cercle de centre $A$ et de rayon $R$ est égal à $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_A| = R\}$,*
- *le **disque fermé** \闭圆盘\ de centre $A$ et de rayon $R$ est égal à $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_A| \leq R\}$,*
- *le **disque ouvert** \开圆盘\ de centre $A$ et de rayon $R$ est égal à $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_A| < R\}$,*

PROPOSITION 20
*Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.*

- $|z|^2 = z\overline{z}$,
- $|z| = |-z| = |\overline{z}|$,
- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda z| = |\lambda|\,|z|$,*
- $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$,
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ *et* $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$,
- $|zz'| = |z||z'|$ *et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$,*
- *Si $z' \neq 0$, alors* $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$,
- *Si $z' \neq 0$, alors* $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$, *en particulier,* $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{\overline{z'}}{|z'|^2}$.

EXEMPLE 21 — *On a* $\dfrac{2+i}{3-4i} = \dfrac{(2+i)(3+4i)}{|3-4i|^2} = \dfrac{6+8i+3i-4}{25} = \dfrac{2+11i}{25}$

*et*

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1^2+(-1)^2} = i.$$

Proposition 22 (Inégalité triangulaire)
*Soit* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. *Alors*

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

*avec égalité si et seulement si* $z' = 0$ *ou s'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $z = \lambda z'$.

**Preuve** —

• On a

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} \\ &= (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2\left|\mathrm{Re}(z\overline{z'})\right| + |z'|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{z'}| + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\ &= (|z| + |z'|)^2, \end{aligned}$$

d'où $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

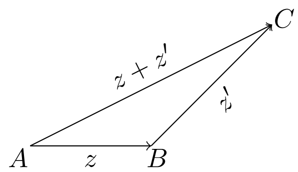
• Si $z' \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda z'$ alors

$$\begin{aligned} |z + z'| &= |(1 + \lambda)z'| \\ &= (1 + \lambda)|z'| \\ &= |z'| + \lambda|z'| \\ &= |z'| + |z|. \end{aligned}$$

• Réciproquement, supposons que $|z + z'| = |z| + |z'|$. Alors, d'après les inégalités précédentes, $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = |z\overline{z'}|$ et donc $z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$ car les nombres complexes donc la partie réelle est égale au module sont les nombres réels positifs.

Supposons $z' \neq 0$. Alors $\dfrac{z\overline{z'}}{|z'|^2} = \dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda z'$. □

Remarque 23 — *L'inégalité triangulaire s'interprète en disant que dans un triangle* $ABC$, *la longueur d'un côté est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés : en notant* $z$ *l'affixe de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $z'$ *celle de* $\overrightarrow{BC}$,




$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right\| = |z + z'| \leq |z| + |z'| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|.$$

Proposition 24
*Soit* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. *On a*

$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|.$$

**Preuve** — D'après l'inégalité triangulaire,

$$|z| = |(z + z') - z'| \leq |z + z'| + |-z'| = |z + z'| + |z'|.$$

Donc $|z| - |z'| \leq |z + z'|$. Par symétrie des rôles, $|z'| - |z| \leq |z + z'|$.

D'où $\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'|$.

En remplaçant $z'$ par $-z'$, on obtient $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$. L'inégalité $|z \pm z'| \leq |z| + |z'|$ découle de l'inégalité triangulaire. □

Remarque 25 — *L'inégalité triangulaire se généralise par récurrence : pour tous nombres complexes* $z_1$, …, $z_n$

$$|z_1 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + \ldots + |z_n|.$$

## 4.2 Équations du second degré à coefficients complexes

Définition 26
*Soit $z \in \mathbb{C}$. Les **racines carrées** de $z$ sont les solutions complexes de l'équation $\omega^2 = z$ d'inconnue $\omega$.*

La notation $\sqrt{x}$ est exclusivement réservée au cas où $x \in \mathbb{R}_+$. Dans $\mathbb{C}$, nous ne pouvons pas privilégier une solution par rapport à une autre comme dans $\mathbb{R}$ (il n'y a pas de notion d'ordre sur $\mathbb{C}$).

Proposition 27
*Tout nombre complexe $z$ non nul admet exactement deux racines carrées, qui sont opposées.*

**Preuve** — Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $z$ s'écrit sous la forme $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\omega = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Alors

$$\begin{aligned}
\omega^2 = z &\Leftrightarrow \omega^2 = z \text{ et } |\omega|^2 = |z| \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow a^2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2} + x}{2} \text{ et } b^2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{2} \text{ et } 2ab = y
\end{aligned}$$

Comme $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, les nombres réels $\frac{\sqrt{x^2+y^2} + x}{2}$ et $\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{2}$ sont positifs. Ils possèdent donc deux racines carrées réelles, l'une positive et l'autre négative. Comme $2ab = y$, $a$ et $b$ sont les racines carrées de même signe si $y$ est positif et les racines carrées de signes opposés sinon. $z$ admet donc exactement deux racines carrées $\omega = a + ib$, opposées et distinctes.

□

Exemple 28 — *Déterminons les racines carrées de $8 - 6i$ dans $\mathbb{C}$.*

*Pour tout $\omega = x + iy \in \mathbb{C}$,*

$$\begin{aligned}
\omega^2 = 8 - 6i &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + i(2xy) = 8 - 6i \\ |\omega|^2 = |8 - 6i| \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy = -3 < 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow z = 3 - i \ ou \ z = -3 + i.
\end{aligned}$$

*Les racines carrées de $8 - 6i$ sont donc $3 - i$ et $-3 + i$.*

Proposition 29
*Soient $a$, $b$ et $c$ des nombres complexes avec $a \neq 0$. On considère l'équation du second degré*

$$az^2 + bz + c = 0.$$

*Notons $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ le discriminant de cette équation.*

- *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et*

$$az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2.$$

- *Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ où $\delta$ vérifie $\delta^2 = \Delta$. On a alors*

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

**Preuve** — Nous allons utiliser la **mise sous forme canonique**. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right) \end{aligned}$$

• Si $\Delta = 0$, alors $az^2 + bz + c = a\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ et donc $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$ est l'unique solution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

• Supposons $\Delta \neq 0$. Alors $\Delta$ admet deux racines carrées complexes distinctes $\delta$ et $-\delta$ vérifiant $\delta^2 = \Delta$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a donc

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\delta}{2a}\right)\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\delta}{2a}\right) \\ &= a\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right). \end{aligned}$$

Donc les solutions de l'équation sont $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-b+\delta}{2a}, \dfrac{-b+\delta}{2a}\right\}$. □

Exemple 30 — *Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$.*
*Le discriminant est $\Delta = (4+i)^2 - 4(5+5i) = -5 - 12i \neq 0$.*
*Déterminons les racines carrées de $\Delta$ dans $\mathbb{C}$. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\delta = a + ib$.*

$$\begin{aligned} \delta^2 = z &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = -12 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 9 \\ ab = -6 < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \delta = 2 - 3i \ ou \ \delta = -2 + 3i. \end{aligned}$$

*Ainsi, $\delta = 2 - 3i$ vérifie $\delta^2 = \Delta$. Les solutions de l'équation $z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$ sont donc*

$$z_1 = \frac{(4+i) + (2-3i)}{2} = 3 - i \ et \ z_2 = \frac{(4+i) - (2-3i)}{2} = 1 + 2i$$

*On en déduit que $z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = (z - 3 + i)(z - 1 - 2i)$.*

On déduit de la proposition précédente le résultat bien connu suivant.

PROPOSITION 31
*Soient $a$, $b$ et $c$ des nombres réels avec $a \neq 0$. On considère l'équation du second degré*

$$az^2 + bz + c = 0.$$

*Notons $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$ le discriminant de cette équation.*

- *Si $\Delta > 0$, l'équation admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions réelles distinctes $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.*
- *Si $\Delta = 0$, l'équation admet dans $\mathbb{C}$ une solution réelle $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*
- *Si $\Delta < 0$, l'équation admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions complexes non réelles conjuguées* \共轭根\ $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ *et* $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

**Preuve** — Comme $a$, $b$ et $c$ sont des nombres réels, $\Delta \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta = 0$, on peut appliquer directement la proposition précédente.
- Si $\Delta > 0$ alors $\delta = \pm\sqrt{\Delta}$ vérifie $\delta^2 = \Delta$. On en déduit alors les solutions de l'équation de la proposition précédente.
- Si $\Delta < 0$ alors $-\Delta > 0$ et $\delta = \pm i\sqrt{-\Delta}$ vérifie $\delta^2 = \Delta$. On en déduit alors les solutions de l'équation de la proposition précédente. □

PROPOSITION 32
*Soient $a$, $b$ et $c$ des nombres complexes avec $a$ non nul. Soient $z_1$ et $z_2$ les solutions complexes de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Alors $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$.*

**Preuve** — On a la factorisation $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$. Comme $a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2$, par identification, on obtient $-a(z_1 + z_2) = b$ et $az_1z_2 = c$. On en déduit le résultat. □

COROLLAIRE 33
*Soient $a$ et $b$ des nombres complexes. Les solutions du système $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ sont les deux racines du polynôme $X^2 - aX + b$.*

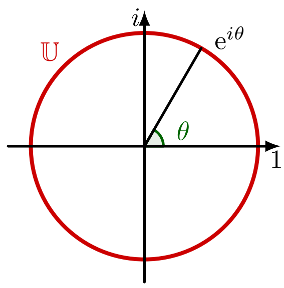
**Preuve** — Cela découle de $(X - x)(X - y) = X^2 - (x + y)X + xy$. □

EXEMPLE 34 — *Déterminons les solutions du système $\begin{cases} x + y = 4 + i \\ xy = 5 + 5i \end{cases}$.*

*Le couple $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ est solution de ce système si et seulement si $x$ et $y$ sont racines du polynôme $X^2 - (4 + i)X + 5 + 5i$. Or, d'après ce qui précède, les racines sont $3 - i$ et $1 + 2i$. Donc les solutions du système sont les couples $(3 - i, 1 + 2i)$ et $(1 + 2i, 3 - i)$.*

## 4.3 Forme trigonométrique

### 4.3.1 Nombres complexes de module 1




Définition 35

- *On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :*

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

- *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose*

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Remarque 36 — *$\mathbb{U}$ est l'ensemble des affixes des points situés sur le cercle trigonométrique.*

Proposition 37
*Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. Autrement dit,*

$$\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

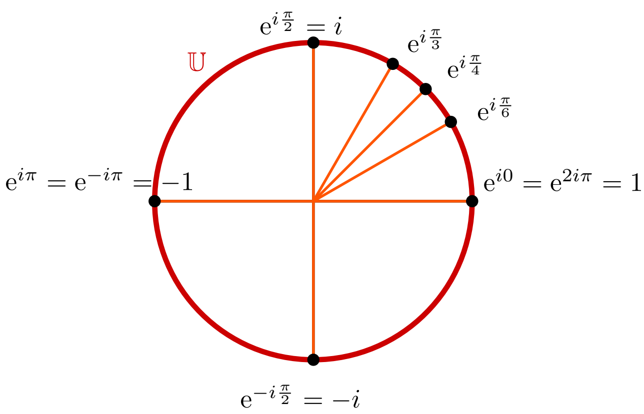
**Preuve** — Soit $z = x + iy \in \mathbb{U}$. Alors $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ (unique à $2\pi$ près) tel que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$. Donc $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \mathrm{e}^{i\theta}$.

Réciproquement, $\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right| = |\cos(\theta) + i\sin(\theta)| = \sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} = 1$, donc $\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{U}$. □

Proposition 38
*Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'}$ si et seulement si $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$ (se lit « $\theta$ congru à $\theta'$ modulo $2\pi$ ») (c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$).*

Remarque 39 —

- *Il y a unicité de $\theta$ modulo $2\pi$.*
- *Notons $M$ le point d'affixe $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. Le point $M$ a donc pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Le nombre $\theta$ est donc une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.*



EXEMPLES 40

- $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow e^{i\theta} = e^{i0} \Leftrightarrow \theta \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- $e^{i\theta} = i \Leftrightarrow e^{i\theta} = e^{i\pi/2} \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$.

PROPOSITION 41
*Soit* $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$,
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

**Preuve** —

• On a

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') \\ &= e^{i(\theta+\theta')}. \end{aligned}$$

• D'une part, $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$.

D'autre part, $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^{i0} = 1$. Donc $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

• Le dernier point se démontre par récurrence. □

REMARQUE 42 — *En remarquant que* $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$ *et* $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$, *on peut retrouver les formules de trigonométrie. Par exemple,* $\cos(x + y) = \mathrm{Re}(e^{i(x+y)}) = \mathrm{Re}(e^{ix}e^{iy}) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.

PROPOSITION 43 (Formules d'Euler)
*Soit* $\theta \in \mathbb{R}$.

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$,
- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

**Preuve** — Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$.

En prenant $z = e^{i\theta}$, on a donc le résultat. □

EXEMPLES 44

- $1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$.
- *Plus généralement, pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a-b}{2}}\left(e^{i\frac{a+b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a-b}{2}}\left(e^{i\frac{a+b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

*Ces formules permettent de retrouver les formules de factorisation des fonctions trigonométriques (transformer une somme en produit), en prenant les parties réelles ou imaginaires.*

Les formules d'Euler permettent de **linéariser** \线性化\ des expressions trigonométriques, c'est-à-dire transformer une expression donnée sous la forme d'un polynôme en $\cos(x)$ et $\sin(x)$, en une expression sous la forme de combinaison linéaire de $\cos(x)$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)$, …, $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$, …. C'est une technique importante. Elle est notamment utilisée pour le calcul d'intégrales de la forme $\int_a^b \cos(x)^m \sin(x)^n \mathrm{d}x$.

Pour cela, nous avons besoin de la **formule du binôme de Newton :**

PROPOSITION 45 (Binôme de Newton)
*Pour tout* $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

*où* $\displaystyle \binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

On peut s'aider du **triangle de Pascal** pour trouver les premiers **coefficients binomiaux** \二项式系数\ $\binom{n}{k}$. Ce triangle est construit à partir de la formule suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$ :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

| $n \backslash p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | | | | $\ddots$ |

Pour linéariser, l'idée est d'utiliser la formule d'Euler, puis de développer à l'aide de la formule du binôme de Newton et enfin de factoriser en utilisant à nouveau la formule d'Euler.

EXEMPLES 46

- *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Linéarisons* $\sin^5(x)$. *On a*

$$\begin{aligned} \sin^5(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^5 \\ &= \frac{1}{32i}\left(\mathrm{e}^{5ix} - 5\mathrm{e}^{3ix} + 10\mathrm{e}^{ix} - 10\mathrm{e}^{-ix} + 5\mathrm{e}^{-3ix} - \mathrm{e}^{-5ix}\right) \\ &= \frac{1}{32i}\left((\mathrm{e}^{5ix} - \mathrm{e}^{-3ix}) - 5(\mathrm{e}^{3ix} - \mathrm{e}^{-3ix}) + 10(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)\right). \end{aligned}$$

- *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *Linéarisons* $\cos^4(\theta)\sin^2(\theta)$. *On a*

$$\begin{aligned} \cos^4(\theta)\sin^2(\theta) &= \left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta})\right)^4 \left(\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta})\right)^2 \\ &= -\frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{4i\theta} + 4\mathrm{e}^{2i\theta} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2i\theta} + \mathrm{e}^{-4i\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{2i\theta} - 2 + \mathrm{e}^{-2i\theta}\right) \\ &= -\frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{6i\theta} + 2\mathrm{e}^{4i\theta} - \mathrm{e}^{2i\theta} - 4 - \mathrm{e}^{-2i\theta} + 2\mathrm{e}^{-4i\theta} + \mathrm{e}^{6i\theta}\right) \\ &= -\frac{1}{32}\left(\cos(6\theta) + 2\cos(4\theta) - \cos(2\theta) - 2\right). \end{aligned}$$

  *Ainsi,*

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^4(\theta)\sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta &= -\frac{1}{32}\int_0^{2\pi} \left(\cos(6\theta) + 2\cos(4\theta) - \cos(2\theta) - 2\right)\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{32}\left[\frac{\sin(6\theta)}{6} + 2\frac{\sin(4\theta)}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{2} - 2\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Proposition 47 (Formules de Moivre)
*Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,*

- $\cos(nx) = \mathrm{Re}\left((\mathrm{e}^{ix})^n\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right)$,
- $\sin(nx) = \mathrm{Im}\left((\mathrm{e}^{ix})^n\right) = \mathrm{Im}\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right)$.

Les formules de Moivre permettent au contraire de "dé-linéariser" des expressions trigonométriques, c'est à dire de transformer une expression avec $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ sous la forme d'un polynôme en $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exemples 48

- *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a*

$$\cos(4x) = \mathrm{Re}((\mathrm{e}^{ix})^4) = \mathrm{Re}((\cos(x) + i\sin(x))^4)$$

*et*

$$\sin(4x) = \mathrm{Im}((\mathrm{e}^{ix})^4) = \mathrm{Im}((\cos(x) + i\sin(x))^4).$$

*Par la formule du binôme de Newton,*

$$\begin{aligned}(\cos(x) + i\sin(x))^4 &= \cos(x)^4 + 4\cos(x)^3(i\sin(x)) + 6\cos(x)^2(i\sin(x))^2 + 4\cos(x)(i\sin(x))^3 + \sin(x)^4\\ &= \cos(x)^4 - 6\cos(x)^2\sin(x)^2 + \sin(x)^4 + i(4\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)^3).\end{aligned}$$

*On en déduit les expressions suivantes*

$$\cos(4x) = \cos(x)^4 - 6\cos(x)^2\sin(x)^2 + \sin(x)^4,$$

*et*

$$\sin(4x) = 4\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)^3.$$

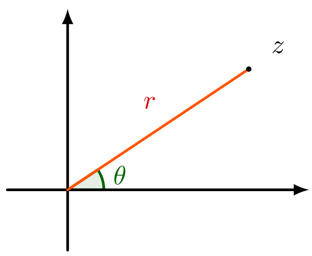
### 4.3.2 Argument d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$, donc $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{i\theta}$, soit $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$. Ainsi, tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ où $r = |z| > 0$. On introduit alors la définition suivante.

Définition 49
*Soit $z$ un nombre complexe non nul.*

- *L'écriture de $z$ sous la forme $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est appelée la **forme trigonométrique** de $z$.*
- *Le nombre réel $r$ est unique et est égal au module de $z$ : $r = |z|$.*
- *Le nombre $\theta$ est unique à $2\pi$ près, il est appelé **argument** \幅角\ de $z$. On note $\arg(z)$ tout argument de $z$.*
- *L'unique argument $\theta$ de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est appelé **argument principal** de $z$ et est noté $\mathrm{Arg}(z)$.*

Remarque 50 — *Soit $z = r\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$. Soit $M$ le point du plan d'affixe $z$. Le couple $(r, \theta)$ est un couple de **coordonnées polaires** \极坐标\ de $M$.*




Proposition 51
*Pour tout $(r, r') \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $r\mathrm{e}^{i\theta} = r'\mathrm{e}^{i\theta'}$ si et seulement si $r = r'$ et $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$.*

**Preuve** — Cela découle de la définition. □.

Pour trouver la forme trigonométrique de $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on peut factoriser par le module de $z$ :

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

puis on cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\theta)$ et $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\theta)$. Alors

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{i\theta}.$$

Exemples 52

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$, $x = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{i0} & \textit{si } x > 0 \\ -x\,\mathrm{e}^{i\pi} & \textit{si } x < 0 \end{cases}$.
- *Pour tout* $y \in \mathbb{R}^*$, $iy = \begin{cases} y\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} & \textit{si } y > 0 \\ -y\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} & \textit{si } y < 0 \end{cases}$.
- $-\sqrt{3} + i = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$.

  *On en déduit que* $\arg(-\sqrt{3}+i) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Proposition 53
*Pour tout* $(z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$,

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \ [2\pi]$.
- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$,
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$,
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$.

**Preuve** — Notons $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = r'\mathrm{e}^{i\theta'}$ avec $(r, r') \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

- $-z = -r\mathrm{e}^{i\theta} = r\mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{i\theta} = r\mathrm{e}^{i(\theta+\pi)}$ et $r > 0$ (contrairement à $-r$), donc $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \ [2\pi]$.
- $zz' = rr'\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$ et $rr' > 0$, donc $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$.
- $\overline{z} = r\mathrm{e}^{-i\theta}$ et $r > 0$, donc $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \ [2\pi]$.
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$ et $\dfrac{r}{r'} > 0$, donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$. □

Exemple 54 — *Donnons la forme trigonométrique de* $\dfrac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$. *On a*

$$\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}.$$

### 4.3.3 Exponentielle d'un nombre complexe

Définition 55
*Soit* $z = x + iy$ *un nombre complexe avec* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *On appelle* ***exponentielle*** *de* $z$ *le nombre complexe, noté* $\mathrm{e}^z$, *défini par*

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy}.$$

Remarque 56 — *Cette définition généralise celle de l'exponentielle réelle et celle donnée pour les nombres imaginaires purs.*

*On a* $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ *et* $\arg(\mathrm{e}^z) \equiv \mathrm{Im}(z) \ [2\pi]$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z \neq 0$ mais on ne peut plus dire $\mathrm{e}^z > 0$ puisque $\mathrm{e}^z$ est un nombre complexe ! Par exemple, $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$.

PROPOSITION 57

- *La fonction* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *est* $2i\pi$*-périodique : pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z+2i\pi} = \mathrm{e}^z$.
- *Pour tout* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}$.
- *Pour tout* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$ *si et seulement s'il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $z = z' + 2ik\pi$.

**Preuve** —

- Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
$$\mathrm{e}^{z+2i\pi} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{i(y+2\pi)} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^z.$$
- Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ des nombres complexes.
$$\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy}\mathrm{e}^{x'}\mathrm{e}^{iy'} = \mathrm{e}^{x+x'}\mathrm{e}^{i(y+y')} = \mathrm{e}^{z+z'}.$$
- Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ des nombres complexes.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^{x'}\mathrm{e}^{iy'} &\Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x'}\\ y \equiv y'[2\pi]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = x'\\ y = y'[2\pi]\end{cases}\\ &\Leftrightarrow z = x + iy = x' + i(y' + 2k\pi) = z' + 2ik\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

□

## 4.4 Racines $n$-ièmes de l'unité

DÉFINITION 58
*Soient* $a \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *On appelle* ***racine*** $n$***-ième de*** $a$ \\$n$次方根\\ *tout nombre complexe* $z$ *tel que* $z^n = a$.

DÉFINITION 59
*Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Les racines* $n$*-ièmes de* $1$ *sont appelées les* ***racines*** $n$***-ièmes de l'unité*** \\1的$n$次方根\\. *L'ensemble des racines* $n$*-ièmes de l'unité est noté* $\mathbb{U}_n$ :
$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

PROPOSITION 60
*Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Les racines* $n$*-ièmes de l'unité sont les nombres*
$$\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \qquad \text{où } k \in [\![0, n-1]\!].$$
*Autrement dit,*
$$\mathbb{U}_n = \{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$
*En particulier, il y a* $n$ *racines* $n$*-ièmes de l'unité.*

**Preuve** — Soit $z \in \mathbb{C}$. On peut écrire $z$ sous la forme $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. On a alors
$$\begin{aligned}z^n = 1 &\Leftrightarrow r^n\mathrm{e}^{in\theta} = 1\mathrm{e}^{i0}\\ &\Leftrightarrow r^n = 1 \text{ et } n\theta \equiv 0\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow r = 1 \text{ car } r > 0 \text{ et } \theta = \frac{2k\pi}{n} \text{ où } k \in [\![0, n-1]\!] \text{ car } \theta \in [0, 2\pi[\\ &\Leftrightarrow z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ où } k \in [\![0, n-1]\!].\end{aligned}$$
Il existe donc exactement $n$ racines $n$-ièmes de l'unité puisque les éléments $\dfrac{2ik\pi}{n}$ sont deux à deux distincts et appartiennent à $[0, 2\pi[$ (tout nombre complexe non nul possède un unique argument dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. □

REMARQUE 61 — *On a* $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \omega_1^k$.

**Définition 62**
*On note $j$ le nombre complexe*

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Proposition 63**

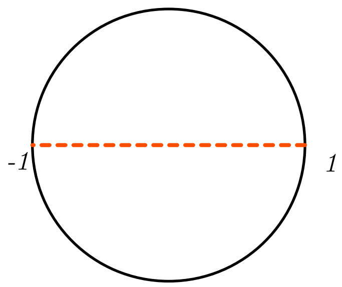
- $j^3 = 1$,
- $\overline{j} = j^2$,
- *Les racines* 3*-ièmes (ou cubiques) de l'unité sont* $1$, $j$ *et* $j^2$,
- $1 + j + j^2 = 0$,
- *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + z + 1 = (z - j)(z - \overline{j})$.

**Preuve** —

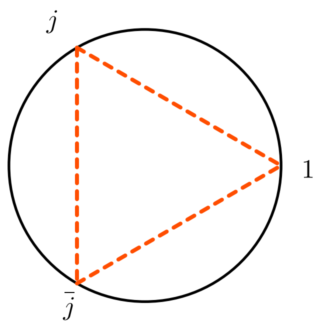
- On a $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$.
- On a $\overline{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = j^2$.
- Les racines 3-ièmes de l'unité sont les nombres $e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ où $k \in \{0, 1, 2\}$, soit $e^{\frac{2i0\pi}{3}} = 1$, $e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$.
- On a $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$.
- Cela découle des points précédents.

□

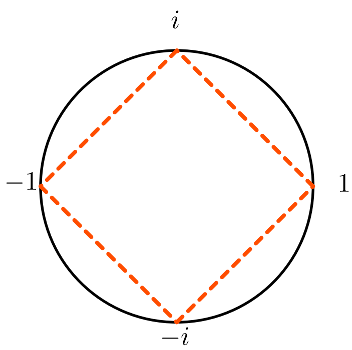
**Exemples 64**



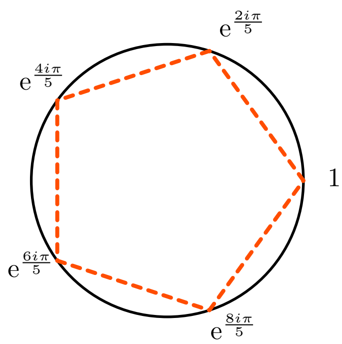
$\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$.



$\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$.



$\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.



$\mathbb{U}_5 = \{e^{\frac{2ik\pi}{5}} \mid k \in [\![0, 4]\!]\}$.

**Remarque 65** — *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des sommets du polygone régulier à $n$ côtés* \正$n$边形的顶点\, *de centre 0 et passant par le point d'affixe 1.*

Proposition 66
*Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. La somme des racines $n$-ièmes de l'unité est nulle :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0.$$

*On peut aussi noter* $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0.$

**Preuve** — On a $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $\omega_k \neq 0$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n - 1}{\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = 0.$$

□

Proposition 67
*Soit $a = r\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $a$ possède exactement $n$ racines $n$-ièmes.*

**Preuve** — Posons $z_0 = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{n}}$. Alors $z_0^n = a$ et $z_0 \neq 0$ puisque $r > 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} z^n = a \Leftrightarrow z^n = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n \\ \Leftrightarrow \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{z_0} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ \Leftrightarrow \exists\, k \in [\![0, n-1]\!], z = z_0\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}. \end{aligned}$$

□

Remarque 68 — *On retrouve par le calcul que ce sont les nombres complexes*

$$\sqrt[n]{r}\ \mathrm{e}^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} \qquad \text{où } k \in [\![0, n-1]\!].$$

Remarque 69 — *On ne peut donc pas parler de LA racine $n$-ième de $a$, ni utiliser la notation $\sqrt[n]{a}$ pour $a \in \mathbb{C}$. Cette notation est valable uniquement pour $x \in \mathbb{R}_+$.*

Exemple 70 — *Déterminons les racines cubiques de $2 + 2i$.*

*On a* $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}$. *Soit* $z = r\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$. *On a*

$$\begin{aligned} z^3 = 2 + 2i &\Leftrightarrow r^3\mathrm{e}^{3i\theta} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow r^3 = 2\sqrt{2} \text{ et } 3\theta \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \text{ et } \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

*Les racines cubiques de $2 + 2i$ sont donc $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{12}}$, $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}$ et $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{17\pi}{12}}$.*

*On peut aussi utiliser le fait que* $\dfrac{z}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}}$ *est une racine cubique de l'unité.*

## 4.5 Nombres complexes et géométrie

### 4.5.1 Angle, alignement et orthogonalité

Proposition 71
*Soient $A$, $B$ et $M$ trois points du plan d'affixes $a$, $b$ et $z$ avec $A$ et $B$ distincts de $M$. Alors*

$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ [2\pi] \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{z-b}{z-a}\right| = \frac{MB}{MA}.$$

**Preuve** — On a

$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right) \equiv \arg(b-z) - \arg(a-z) \equiv (\vec{\imath}, \overrightarrow{MB}) - (\vec{\imath}, \overrightarrow{MA}) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi].$$

et

$$\left|\frac{z-b}{z-a}\right| = \frac{|z-b|}{|z-a|} = \frac{MB}{MA}.$$

□

EXEMPLE 72 — *Déterminons une mesure de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes $z_{\vec{u}} = 2+i$ et $z_{\vec{v}} = 3-i$.*

*On a* $\dfrac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} = \dfrac{3-i}{2+i} = \dfrac{(3-i)(2-i)}{5} = \dfrac{5-5i}{5} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{4}}$. *Donc* $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

PROPOSITION 73
*Soient $A$, $B$ et $M$ trois points du plan d'affixes $a$, $b$ et $z$ avec $A$ et $B$ distincts de $M$. Alors*

- *Les points $A$, $B$ et $M$ sont alignés si et seulement si* $\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$.
- *Les droites $(AM)$ et $(BM)$ sont orthogonales si et seulement si* $\dfrac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}$.

**Preuve** —

D'après la proposition précédente,

- $A$, $B$ et $M$ sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 0[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\pi[2\pi]$, soit si et seulement si $\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$.
- $(AM)$ et $(BM)$ sont orthogonales si et seulement si $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, soit si et seulement si $\dfrac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}$.

□

REMARQUE 74 — *Rappelons que deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, soit si et seulement si $\mathrm{Re}(z_{\vec{u}}\overline{z_{\vec{v}}}) = 0$ d'après la remarque 15.*

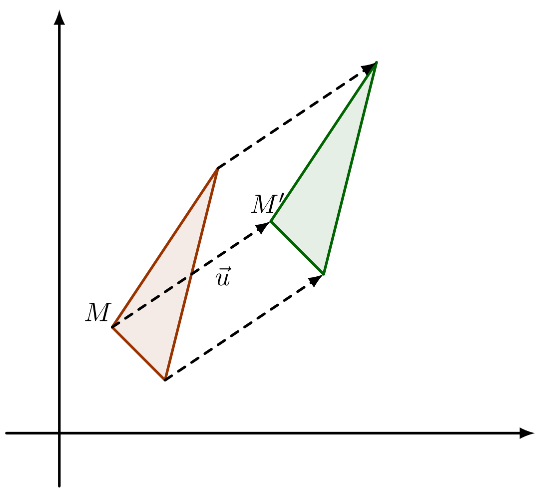
## 4.5.2 Transformations du plan

### 4.5.2.a. Translations, homothéties et rotations

DÉFINITION 75
*Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle **translation de vecteur** $\vec{u}$* \按向量$u$平移\ *l'application*

$$t_{\vec{u}} : M \longmapsto M',$$

*où $M'$ vérifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$*



Remarque 76 — *Une translation conserve les distances.*

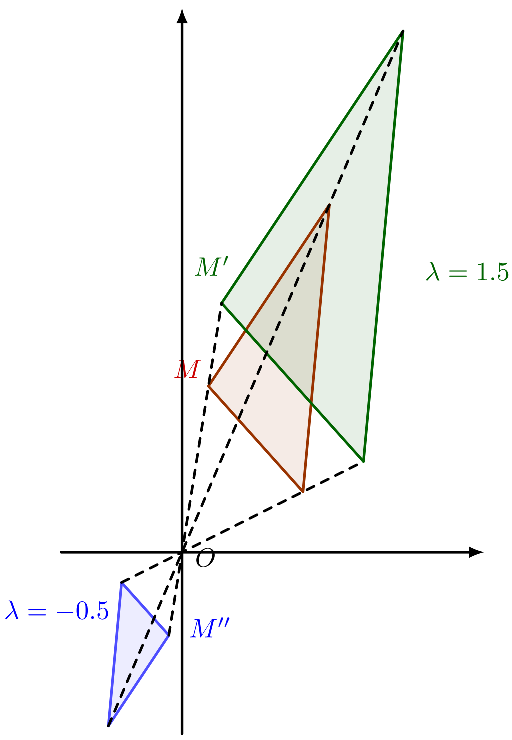
Proposition 77
*Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe $z_{\vec{u}}$. L'application $t_{\vec{u}} : z \longmapsto z + z_{\vec{u}}$ représente la translation de vecteur $\vec{u}$.*

**Preuve** — La relation $M' = M + \vec{u}$ est équivalente à $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. □

Définition 78
*Soient $\Omega$ un point du plan et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle* ***homothétie de centre*** $\Omega$ ***et de rapport*** $\lambda$ \以$O$为中心，比例为$k$的位似变换\ *l'application*

$$h_{\Omega,\lambda} : M \longmapsto M',$$

*où $M'$ vérifie $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.*




Remarque 79 — *Une homothétie de rapport $\lambda$ multiplie les distances par $|\lambda|$.*

Proposition 80
*Soit $\Omega$ un point du plan d'affixe $z_0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application $h_{\Omega,\lambda} : z \longmapsto z_0 + \lambda(z - z_0)$ représente l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $\lambda$.*

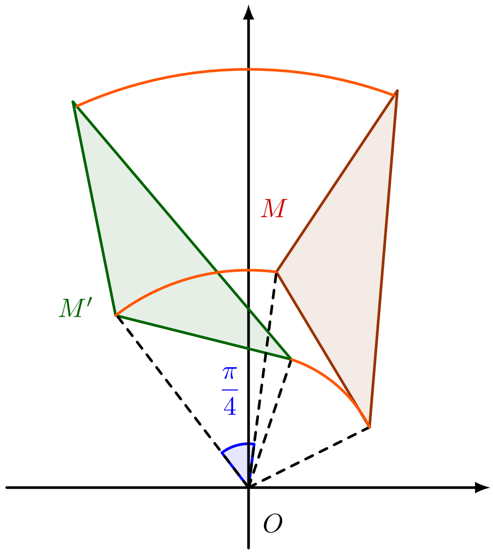
**Preuve** — La relation $M' = \Omega + \lambda(M - \Omega)$ est équivalente à $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$. □

Remarque 81 — *Dans le cas où $\Omega = O$, l'homothétie de rapport $\lambda$ et de centre $O$ est l'application $z \longmapsto \lambda z$.*

Définition 82
*Soient $\Omega$ un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle* ***rotation de centre*** $\Omega$ ***et d'angle*** $\theta$ \以$O$为中心旋转*theta*\ *l'application*

$$r_{\Omega,\theta} : M \longmapsto M',$$

*où $M'$ vérifie $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\,[2\pi]$.*




Remarque 83 — *Une rotation conserve les distances.*

Proposition 84
*Soient $\Omega$ un point du plan d'affixe $z_0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. L'application $r_{\Omega,\theta} : z \longmapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$ représente la rotation de centre $\Omega$ et de d'angle $\theta$.*

**Preuve** — Soient $M$ un point du plan d'affixe $z$ et $M' = r_{\Omega,\theta}(M)$. On a alors

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \ [2\pi].$$

Donc $z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$. □

Remarque 85 —

- *Dans le cas où $\Omega = O$, la rotation d'angle $\theta$ et de centre $O$ est l'application $z \longmapsto e^{i\theta} z$.*
- *La rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre $O$ se traduit par une multiplication par $i$.*
- *La rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et de centre $O$ se traduit par une multiplication par $j$.*

Les transformations que nous venons de voir s'écrivent toutes sous la forme $z \longmapsto az + b$.

#### 4.5.2.b. Similitudes

Définition 86
*On appelle **similitude directe** toute transformation du plan représentée par $z \longmapsto az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.*

Proposition 87
*Une **similitude directe** conserve les angles et les rapports des distances.*

**Preuve** — Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq 0$. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ une similitude directe. Soient $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ quatre points du plan tels que $A_1 \neq A_2$ et $A_3 \neq A_4$. On note $z_1$, $z_2$, $z_3$ et $z_4$ leurs affixes respectives et $z'_1$, $z'_2$, $z'_3$ et $z'_4$ les affixes de $\varphi(A_1)$, $\varphi(A_2)$, $\varphi(A_3)$ et $\varphi(A_4)$.

On a $z'_2 - z'_1 = a(z_1 - z_2)$ et $z'_4 - z'_3 = a(z_4 - z_3)$.

Donc $\arg\left(\dfrac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right) \ [2\pi]$, soit $(\overrightarrow{\varphi(A_1)\varphi(A_2)}, \overrightarrow{\varphi(A_3)\varphi(A_4)}) \equiv (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}) \ [2\pi]$.

De plus $\left|\dfrac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1}\right| = \left|\dfrac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right|$, soit $\dfrac{\varphi(A_3)\varphi(A_4)}{\varphi(A_1)\varphi(A_2)} = \dfrac{A_3A_4}{A_1A_2}$. □

PROPOSITION 88
*Soit $\varphi : z \longmapsto az+b$ une similitude directe.*

- *Si $a=1$ alors $\varphi$ est la translation de vecteur d'affixe $b$.*
- *Si $a=\lambda e^{i\theta}\neq 1$ avec $\lambda>0$, alors il existe un point $\Omega$ du plan tel que $\varphi$ représente la composée de rotation $r_{\Omega,\theta}$ de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ et de l'homothétie $h_{\Omega,\lambda}$ de centre $\Omega$ et de rapport $\lambda$ :*

$$\varphi = h_{\Omega,\lambda}\circ r_{\Omega,\theta} = r_{\Omega,\theta}\circ h_{\Omega,\lambda}.$$

*Le point $\Omega$ est appelé **centre de la similitude**. Le nombre réel $\lambda=|a|$ est appelé **rapport de la similitude**. On dit que $\varphi$ est la **similitude directe de centre $\Omega$, de rapport** $|a|$ **et d'angle** $\arg(a)$. En particulier, si $a\in\mathbb{R}^*$, $\varphi$ est l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $a$, et si $|a|=1$, $\varphi$ est la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\arg(a)$.*

**Preuve** —

- Si $a=1$, le résultat a déjà été traité.
- Supposons $a=\lambda e^{i\theta}\neq 1$ avec $\lambda>0$. L'application $\varphi$ possède un unique **point fixe** $z_0$. En effet, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\varphi(z)=z$ si et seulement si $z=az+b$, soit si et seulement si $z=\dfrac{b}{1-a}$. Posons donc $z_0=\dfrac{b}{1-a}$, affixe du point $\Omega$ du plan.
Pour tout $z\in\mathbb{C}$, posons $z'=\varphi(z)$. Alors
$$z'-z_0=(az+b)-(az_0+b)=a(z-z_0).$$
Donc $z'-z_0=\lambda\times\left(e^{i\theta}(z-z_0)\right)$ et $z'-z=e^{i\theta}\left(\lambda(z-z_0)\right)$.
Soient $r_{\Omega,\theta}$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ et $h_{\Omega,\lambda}$ l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $\lambda$.
Soit $M$ un point du plan d'affixe $z$. Notons $z_1$ l'affixe de $r(M)$ et $z_2$ l'affixe de $h(r(M))$. Alors
$$z_1-z_0=e^{i\theta}(z-z_0)\quad\text{et}\quad z_2-z_0=\lambda(z_1-z_0).$$
Donc $z_2-z_0=\lambda e^{i\theta}(z-z_0)$. Donc $z_2$ est l'affixe de $\varphi(M)$. D'où $\varphi=h_{\Omega,\lambda}\circ r_{\Omega,\theta}$.
On obtient de même que $\varphi=r_{\Omega,\theta}\circ h_{\Omega,\lambda}$.

□

COROLLAIRE 89
*Soit $\varphi$ une similitude de centre $\Omega$ d'affixe $z_0$, de rapport $\lambda$ et d'angle $\alpha$. Pour tout point $M$ d'affixe $z$, le point $\varphi(M)$ est d'affixe $z'$ définie par*

$$z'-z_0=\lambda e^{i\alpha}(z-z_0).$$

EXEMPLE 90 — *Considérons l'application $\varphi : z\longmapsto(1+i)z-2i$.*

*Comme $a=1+i\neq 1$, $\varphi$ n'est pas une translation.*

*Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\varphi(z)=z$ si et seulement si $z=(1+i)z-2i$, soit si et seulement si $z=2$. Le centre de la similitude est donc le point $2$.*

*On a $a=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$.*

*Finalement, $\varphi$ est la similitude de centre $\dfrac{1}{2}$, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.*

REMARQUE 91 —

- *La symétrie d'axe $(0x)$ est représentée par l'application $z\longmapsto\bar{z}$.*
- *La symétrie d'axe $(0y)$ est représentée par l'application $z\longmapsto-\bar{z}$.*

*Ces transformations sont des **similitudes indirectes**.*

## 4.6 FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

DÉFINITION 92
*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Les fonctions réelles* $\mathrm{Re}(f) : I\longrightarrow\mathbb{R}$ *et* $\mathrm{Im}(f) : I\longrightarrow\mathbb{R}$ *sont définies, pour tout $x\in I$, par*

$$\mathrm{Re}(f)(x)=\mathrm{Re}(f(x))\quad\textit{et}\quad\mathrm{Im}(f)(x)=\mathrm{Im}(f(x)).$$

DÉFINITION 93
*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in I$. On dit que $f$ est* ***dérivable*** *en $a$ si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. On appelle alors* ***nombre dérivé de $f$ en*** *$a$, noté $f'(a)$, le nombre complexe*

$$f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + i\mathrm{Im}(f)'(a).$$

*L'ensemble des fonctions complexes dérivables sur $I$ est noté $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$.*

*Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$, la fonction $x \longmapsto f'(x)$ est définie sur $I$ et est appelée la* ***dérivée de*** *$f$.*

Ainsi, dériver une fonction complexe revient à dériver ses parties réelle et imaginaire, qui sont des fonctions réelles : $\mathrm{Re}(f') = \mathrm{Re}(f)'$ et $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Im}(f)'$.

REMARQUE 94 — *Les formules de dérivation d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions complexes sont les mêmes que pour les fonctions réelles. La formule de dérivation d'une composée $g \circ f$ où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est également la même.*

Comme dans le cas réel, on dispose du résultat suivant.

PROPOSITION 95
*Soient $I$ un intervalle et $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. Alors $f$ est constante si et seulement si $f'$ est nulle sur l'intervalle $I$.*

PROPOSITION 96
*Soient $I$ un intervalle et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable. La fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)}$ est dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$,*

$$f'(x) = \varphi'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}.$$

*En particulier, pour tout $r \in \mathbb{C}$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \longmapsto r\mathrm{e}^{rx}$.*

**Preuve** — Posons $\varphi_1 = \mathrm{Re}(\varphi)$ et $\varphi_2 = \mathrm{Im}(\varphi)$. Par hypothèse, $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont des fonctions réelles dérivables sur $I$. Or

$$\mathrm{e}^{\varphi} = \mathrm{e}^{\varphi_1 + i\varphi_2} = \mathrm{e}^{\varphi_1}\mathrm{e}^{i\varphi_2} = \mathrm{e}^{\varphi_1}(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)).$$

Donc $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{e}^{\varphi_1}\cos(\varphi_2)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{e}^{\varphi_1}\sin(\varphi_2)$. On en déduit que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables comme composées de fonctions dérivables, donc $f$ l'est.

De plus, par dérivation de fonctions réelles,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(f)' &= (\varphi_1'\cos(\varphi_2) - \varphi_2'\sin(\varphi_2))\mathrm{e}^{\varphi_1}\\ &= \mathrm{e}^{\varphi_1}\mathrm{Re}((\varphi_1' + i\varphi_2')(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))\\ &= \mathrm{Re}(\varphi'\mathrm{e}^{\varphi}).\end{aligned}$$

De même, $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\varphi})' = \mathrm{Im}(\varphi'\mathrm{e}^{\varphi})$.

D'où $f' = \varphi'\mathrm{e}^{\varphi}$. $\square$

# Chapitre 5 Équations différentielles à coefficients constants

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

## 5.1 Définitions

Une **équation différentielle** \常微分方程\ est une équation portant sur les dérivées d'une fonction.

Définition 1

- *On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre (ou d'ordre** 1**) à coefficients constants** toute équation de la forme*

$$ay' + by = c(t), \quad (E_1)$$

*où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ avec $a$ non nul $b \in \mathbb{K}$ et $c : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue.*

- *On appelle **solution** sur $I$ de l'équation $(E_1)$ toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, dérivable, telle que, pour tout $t \in I$,*

$$af'(t) + bf(t) = c(t).$$

Exemple 2 — *L'équation $y' + y = t$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. La fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t} - 1 + t$ est une solution de cette équation.*

Définition 3

- *On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre (ou d'ordre** 2**) à coefficients constants** toute équation de la forme*

$$ay'' + by' + cy = d(t), \quad (E_2)$$

*où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ avec $a$ non nul et $d : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue.*

- *On appelle **solution** sur $I$ de l'équation $(E_2)$ toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, deux fois dérivable, telle que, pour tout $t \in I$,*

$$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = d(t).$$

Exemple 4 — *L'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. La fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $t \longmapsto \mathrm{e}^{t}$ est une solution de l'équation.*

Dans la suite, on considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = d(t) \qquad (E)$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et $d : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue.

Si $a = 0$ alors c'est une équation du premier ordre, sinon c'est une équation du second ordre.

Définition 5 *Avec les notations précédentes*

- *Les nombres $a$, $b$ et $c$ sont appelés les **coefficients** de l'équation de $(E)$.*
- *La fonction $d : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est appelée le **second membre** de l'équation.*

Définition 6

*On appelle **équation différentielle homogène** (ou équation sans second membre) associée à l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$ l'équation différentielle*

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (E_h)$$

PROPOSITION 7
*L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène $(E_h)$ vérifie les propriétés suivantes :*
- *La fonction nulle $I \longrightarrow \mathbb{K}$ ; $t \longmapsto 0$ est un élément de $\mathcal{S}_h$,*
- *Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et tout $(f_1, f_2) \in \mathcal{S}_h$,*

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{S}_h.$$

**Preuve** —

• Le premier point est immédiat puisque si $f_0 : t \longmapsto 0$, on a $f_0' = 0$ et $f_0'' = 0$ donc $af_0''(t) + bf_0'(t) + cf_0(t) = 0$. Donc $f_0 \in \mathcal{S}_h$.

• Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(f_1, f_2) \in \mathcal{S}_h^2$. Comme $f_1$ et $f_2$ sont solutions sur $I$ donc deux fois dérivables sur $I$, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est également deux fois dérivable sur $I$.

Alors, pour tout $t \in I$,
$$af_1''(t) + bf_1'(t) + cf_1(t) = 0 \quad \text{et} \quad af_2''(t) + bf_2'(t) + cf_2(t) = 0.$$

Donc
$$\begin{aligned} a(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)''(t) + b(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(t) + c(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= \lambda_1(af_1''(t) + bf_1'(t) + cf_1(t)) + \lambda_2(af_2''(t) + bf_2'(t) + cf_2(t)) \\ &= \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{S}_h$. □

## 5.2 Résolution de l'équation homogène

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (E_h)$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ avec $a$ éventuellement nul.

### 5.2.1 Équation caractéristique

DÉFINITION 8
*On appelle **équation caractéristique** associée à $(E_h)$ l'équation*

$$ar^2 + br + c = 0,$$

*d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.*

REMARQUE 9 — *On peut remarquer que pour tout $r \in \mathbb{K}$, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ ; $t \longmapsto \mathrm{e}^{rt}$ est solution de l'équation homogène $(E_h)$ si et seulement si $r$ est solution de l'équation caractéristique.*

### 5.2.2 Équations du premier ordre

On se place dans le cas particulier où $a = 0$, l'équation $(E_h)$ est alors du premier ordre.

PROPOSITION 10
*L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène du premier ordre à coefficients constants $y' + ay = 0$ $(E_{h,1})$ est*

$$\mathcal{S}_{h,1} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-at} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

**Preuve** — Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. Posons, pour tout $t \in I$, $g(t) = f(t)\mathrm{e}^{at}$. Les fonctions $f$ et exp étant dérivables sur $I$, $g$ l'est aussi et pour tout $t \in I$,
$$g'(t) = (f'(t) + af(t))\mathrm{e}^{at}.$$
Donc $f$ est solution de $(E_{h,1})$ si et seulement si, pour tout $t \in I$, $g'(t) = 0$, soit si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $t \in I$, $g(t) = \lambda$.

Finalement, $f$ est solution de $(E_{h,1})$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(t) = \lambda e^{-at}$.

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S}_{h,1} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda e^{-at} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

□

Remarque 11 — *Remarquons que les solutions de $ay' + by = 0$ sont les fonctions $t \longmapsto \lambda e^{rt}$ où $r$ est la solution de l'équation caractéristique $ax + b = 0$, ie $r = -\dfrac{b}{a}$.*

Exemples 12

- *L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène du premier ordre $y + \dfrac{1}{\tau} y = 0$ est*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- *L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène du premier ordre $2y' - 3y = 0$ est*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda e^{\frac{3}{2}t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

### 5.2.3 Équations du second ordre

On se place dans le cas particulier où $a \neq 0$, l'équation $(E_h)$ est alors du second ordre.

Proposition 13
*On se place avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ associée à $ay'' + by' + cy = 0$ $(E_{h,2})$.*

- *Cas où $\Delta \neq 0$ : L'équation caractéristique admet deux solutions complexes distinctes $r_1$ et $r_2$. L'ensemble $\mathcal{S}_{h,2}$ des solutions de $(E_{h,2})$ est alors*

$$\mathcal{S}_{h,2} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

- *Cas où $\Delta = 0$ : L'équation caractéristique admet une solution double complexe $r$. L'ensemble $\mathcal{S}_{h,2}$ des solutions de $(E_{h,2})$ est alors*

$$\mathcal{S}_{h,2} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^{rt} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

**Preuve** — Notons $r_1$ et $r_2$ les deux racines complexes de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, éventuellement confondues.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application deux fois dérivable. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \varphi(t) e^{-r_1 t}$, de sorte que $\varphi(t) = \psi(t) e^{r_1 t}$. Alors $\psi$ est deux fois dérivable.

$\varphi$ est solution de $(E_{h,2})$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{r_1 t}\left(a\psi''(t) + (2ar_1 + b)\psi'(t) + (ar_1^2 + br_1 + c)\psi(t)\right) = 0,$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi''(t) + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right)\psi'(t) = 0.$$

Or $2r_1 + \dfrac{b}{a} = r_1 + \left(r_1 + \dfrac{b}{a}\right) = r_1 - r_2$ car $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Donc $\varphi$ est solution de $(E_{h,2})$ si et seulement si $\psi'$ est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' = -(r_1 - r_2)\, y.;(E_l) \tag{1}$$

- $1^{\text{er}}$ cas : $\Delta \neq 0$. Alors $r_1 \neq r_2$ et l'ensemble des solutions de l'équation $(E_1)$ est

$$\mathcal{S}_1 = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto \lambda e^{-(r_1 - r_2)t} \mid \lambda \in \mathbb{C}\right\}.$$

Donc $\varphi$ est solution de $(E_{h,2})$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(t) = \lambda e^{-(r_1 - r_2)t},$$

soit encore si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = \lambda_1 e^{-(r_1 - r_2)t} + \lambda_2,$$

soit
$$\varphi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_2 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_1 t}.$$

• $2^{\text{nd}}$ cas : $\Delta = 0$. Alors $r_1 = r_2$ et l'ensemble des solutions de l'équation $(E_1)$ est l'ensemble des fonctions constantes.

Donc $\varphi$ est solution de $(E_{h,2})$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi'(t) = \lambda,$$
soit encore, si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi(t) = \lambda_1 t + \lambda_2,$$
soit
$$\varphi(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2)\, \mathrm{e}^{r_1 t}.$$

D'où le résultat. □

Exemples 14

- *Résolvons sur $\mathbb{C}$ l'équation*
$$y'' - (2+2\mathrm{i})y' + 2\mathrm{i}y = 0.$$
*L'équation caractéristique associée est $r^2 - (2+2\mathrm{i})r + 2\mathrm{i} = 0$, de discriminant $\Delta = (2+2\mathrm{i})^2 - 4 \times 1 \times 2\mathrm{i} = 0$. Cette équation admet une solution double $r = 1 + \mathrm{i}$.*
*L'ensemble des solutions complexes de l'équation est donc*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$
- *Résolvons sur $\mathbb{C}$ l'équation*
$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$
*L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 2 = 0$, de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 \neq 0$. Cette équation admet donc deux solutions complexes conjuguées, $r_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $r_2 = 1 - \mathrm{i}$.*
*L'ensemble des solutions complexes de l'équation est donc*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Proposition 15

*On se place avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$ le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.*

- *Cas où $\Delta > 0$ : L'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes $r_1$ et $r_2$. L'ensemble $\mathcal{S}_{h,2}$ des solutions de $(E_{h,2})$ est alors*
$$\mathcal{S}_{h,2} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
- *Cas où $\Delta = 0$ : L'équation caractéristique admet une solution double réelle $r$. L'ensemble $\mathcal{S}_{h,2}$ des solutions de $(E_{h,2})$ est alors*
$$\mathcal{S}_{h,2} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{rt} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
- *Cas où $\Delta < 0$ : L'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées et distinctes $r_1 = r + i\omega$ et $r_2 = r - i\omega$ avec $(r, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. L'ensemble $\mathcal{S}_{h,2}$ des solutions de $(E_{h,2})$ est*
$$\mathcal{S}_{h,2} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \mathrm{e}^{rt}\big(\lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t)\big) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

**Preuve** —

• Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, alors le résultat s'obtient de la même façon que dans le cas complexe.

• Traitons le cas où $\Delta < 0$. L'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ possède alors deux solutions complexes conjuguées et distincts $r_1 = r + i\omega$ et $r_2 = r - i\omega$, avec $(r, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Soit $\varphi$ une solution réelle de $(E_{h,2})$. En particulier, $\varphi$ est une solution complexe de $(E_{h,2})$. Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{(r+i\omega)t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{(r-i\omega)t}$.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{rt}\left(\lambda_1 \mathrm{e}^{i\omega t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-i\omega t}\right) = \mathrm{e}^{rt}\left((\lambda_1 + \lambda_2)\cos(\omega t) + i(\lambda_1 - \lambda_2)\sin(\omega t)\right).$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . .

Réciproquement, une telle fonction est bien une solution réelle de $(E_{h,2})$.

□

Remarque 16 — *Dans le cas où $\Delta < 0$, on peut également donner l'ensemble des solutions sous les formes suivantes :*

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto A\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\right\},$$

*ou*

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto A\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exemples 17

- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire homogène $y'' - 5y' + 6y = 0$.*
  *L'équation caractéristique associée est $r^2 - 5r + 6 = 0$, de discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$.*
  *Cette équation admet donc deux solutions réelles, $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.*
  *L'ensemble des solutions réelles de l'équation est donc*
  $$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{2t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{3t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation*
  $$y'' - 2y' + y = 0.$$
  *L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, de solution double réelle $r = 1$.*
  *L'ensemble des solutions réelles de l'équation est donc*
  $$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation*
  $$y'' + 2y' + 2y = 0.$$
  *L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$, de discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. Cette équation admet donc deux solutions complexes conjuguées $r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$.*
  *L'ensemble des solutions réelles de l'équation est donc*
  $$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\left(\lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t)\right) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

## 5.3 Résolution de l'équation avec second membre

On s'intéresse à l'ensemble des solutions de l'équation du premier ordre (si $a = 0$) ou du second ordre (si $a \neq 0$)

$$ay'' + by' + cy = d(t),$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et $d : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.

### 5.3.1 Structure de l'ensemble des solutions

Proposition 18
*On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur $I$ de l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$ $(E)$ et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions sur $I$ de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ $(E_h)$. Soit $f_p$ est une solution particulière de l'équation avec second membre $(E)$. Alors*

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h = \{I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto f_p(t) + f(t) \mid f \in \mathcal{S}_h\}.$$

**Preuve** — Soit $f_p$ une solution de l'équation homogène. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

On a, pour tout $t \in I$, $af_p''(t) + bf_p'(t) + cf_p(t) = d(t)$.

Alors $f \in \mathcal{S}$ si et seulement si, . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

D'où $\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h$. □

Méthode 19 — *Pour résoudre l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$ $(E)$,*

1. *On donne l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée $ay'' + by' + cy = 0$,*
2. *On détermine une solution particulière $f_p$ de l'équation $(E)$,*
3. *On conclut en donnant l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $(E)$ :*

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_p.$$

Le principe de superposition des solutions est très utile car il permet de rechercher une solution particulière en décomposant le second membre en des membres plus simples.

Proposition 20 (Principe de superposition)
*Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et $d_1$ et $d_2$ des applications continues de $I$ dans $\mathbb{K}$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Si $f_1$ est solution sur $I$ de l'équation $ay''+by'+cy = d_1(t)$ et $f_2$ est solution sur $I$ de l'équation $ay''+by'+cy = d_2(t)$, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution sur $I$ de l'équation*

$$ay'' + by' + cy = \lambda_1 d_1(t) + \lambda_2 d_2(t).$$

**Preuve** — Soient $f_1$ une solution sur $I$ de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(t)$ et $f_2$ une solution sur $I$ de l'équation $ay'' + by' + cy = d_2(t)$. Posons $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Alors $f$ est deux fois dérivable et $f' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2'$ et $f'' = \lambda_1 f_1'' + \lambda_2 f_2''$.

On a donc, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} af''(t) + bf'(t) + cf(t) &= \lambda_1(af_1''(t) + bf_1'(t) + cf_1(t)) + \lambda_2(af_2''(t) + bf_2'(t) + cf_2(t) \\ &= \lambda_1 d_1(t) + \lambda_2 d_2(t). \end{aligned}$$

Donc $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de $ay'' + by' + cy = \lambda_1 d_1(t) + \lambda_2 d_2(t)$. □

Exemple 21 — *Pour trouver une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$y' + y = \cos(x) + (x + 1)\mathrm{e}^{-x},$$

*on peut donc chercher une solution particulière $f_1$ de l'équation $y' + y = \cos(x)$ et une solution particulière $f_2$ de l'équation $y' + y = (x + 1)\mathrm{e}^{-x}$, puis les additionner. Au lieu d'un calcul compliqué, on se ramène à deux calculs simples !*

### 5.3.2 Recherche de solutions particulières

Parfois, une solution particulière apparaît de façon évidente.

Exemple 22 — *Déterminons les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$y'' + 4y = 2.$$

– Solutions de l'équation homogène : *L'équation caractéristique associée à l'équation homogène $y'' + 4y = 0$ est* ..........................................................................................................................

*L'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène $y'' + 4y = 0$ est donc*

..........................................................................................................................

– Solution particulière : *La fonction $f_p$* .............................. *est une solution particulière évidente de $y'' + 4y = 2$.*
– Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + 4y = 2$ est donc*

..........................................................................................................................

On se place dans le cas particulier où l'équation s'écrit sous la forme

$$ay'' + by' + cy = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t},$$

où $a$, $b$, $c$ et $\alpha$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ et $P$ est un polynôme.

Proposition 23
*L'équation différentielle $ay'' + by' + cy = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$ admet une solution particulière sous la forme*

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto t^m Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t},$$

*où*

- *$Q$ est une fonction polynomiale de même degré que $P$,*
- $m = \begin{cases} 0 \text{ si } m \text{ n'est pas solution de l'équation caractéristique,} \\ 1 \text{ si } m \text{ est solution simple de l'équation caractéristique,} \\ 2 \text{ si } m \text{ est solution double de l'équation caractéristique.} \end{cases}$

Remarque 24 — *Dans cette proposition, on retrouve des cas particuliers souvent rencontrés.*

- ***Second membre constant :*** *On a $d(t) = d \in \mathbb{K}$. Cela correspond à $P(t) =$ .. et $\alpha =$ ... On peut donc chercher une solution particulière $f_p$ sous la forme* ...........................................................
- ***Second membre polynomial :*** *On a $d(t) = d_0 + d_1 t + \ldots + d_n t^n$. Cela correspond à $P(t) =$* .............................. *et $\alpha =$ ... On peut donc chercher une solution particulière $f_p$ sous la forme* ..........................................................................
- ***Second membre exponentiel :*** *On a $d(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$. Cela correspond à $P(t) =$ ... On peut donc chercher une solution particulière $f_p$ sous la forme* .............................................................................................
- ***Second membre en* cos *ou* sin *avec* $a$*,* $b$ *et* $c$ *réels :*** *On a $d(t) = \cos(mt)$ ou $d(t) = \sin(mt)$. On peut chercher une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = \mathrm{e}^{imt}$ (avec $P(t) = 1$ et $\alpha = im$) puis on prend la partie réelle ou la partie imaginaire de cette solution particulière.*

Exemple 25 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y'' + 2y' + 5y = 5t. \quad (E) \tag{2}$$

– Solutions de l'équation homogène : *L'équation caractéristique associée est* ..........................................................................................................................................................

*L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est donc*

..........................................................................................................................

- Solution particulière : ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

- Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation* $(E)$ *est donc*

  ...............................................................

Exemple 26 — *Résolvons sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle*

$$y'' + y = t \sin t. \quad (E) \tag{3}$$

- Solutions de l'équation homogène : *L'équation caractéristique associée est* ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  *L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est donc*

  ...............................................................

- Solution particulière :

  — ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

  – ...............................................................

  ...............................................................

  ...............................................................

- Conclusion : *L'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}$ *de* $(E)$ *est donc*

  ...............................................................

### 5.3.3 Problème de Cauchy

Définition 27 *Soient* $t_0 \in I$, $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$.

- *On appelle* ***problème de Cauchy*** *associé à l'équation du premier ordre* $ay' + by = c(t)$ *avec* $a \neq 0$, *le système*

$$\begin{cases} ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

*On appelle* ***solution*** *de ce problème de Cauchy sur $I$, toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, dérivable, telle que, pour tout $t \in I$,*

$$\begin{cases} af'(t) + bf(t) = c(t) \\ f(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

- *On appelle* ***problème de Cauchy*** *associé à l'équation du second ordre $ay'' + by' + cy = d(t)$ avec $a \neq 0$, le système*

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(t) \\ y'(t_0) = y_0 \\ y''(t_0) = y_1 \end{cases}.$$

*On appelle* ***solution*** *de ce problème de Cauchy sur $I$, toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, deux fois dérivable, telle que, pour tout $t \in I$,*

$$\begin{cases} af''(t) + bf'(t) + cf(t) = d(t) \\ f(t_0) = y_0 \\ f'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Proposition 28
*Avec les notations précédentes, tout problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 ou 2 admet une unique solution.*

Exemple 29 — *Déterminons la solution réelle du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' + 2y = \mathrm{e}^{-2t} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

–Résolution de l'équation $y' + 2y = \mathrm{e}^{-2t}$

- Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + 2y = 0$ est*

  ..........................................

- Solution particulière : ..............................................................................

  ..........................................

  ..........................................................................................

- Conclusion : *L'ensemble des solutions est donc*

  ..............................................................

–Solution du problème de Cauchy : ..............................................................................

..........................................................................................