CORRIGÉ DU TD N° 13

Nombres complexes : Racines n-ièmes de l'unité et géométrie

4 juin 2021

S'entraîner

Exercice 1.

1. Déterminer les racines 5-ièmes de $-i$.
2. Déterminer les racines 6-ièmes de $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

---

1. Les racines 5-ièmes de $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ sont
$$z_0 = e^{i\frac{3\pi}{10}},\ z_1 = e^{i\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}\right)},\ z_2 = e^{i\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{4\pi}{5}\right)},\ z_3 = e^{i\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{6\pi}{5}\right)},\ z_4 = e^{i\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{8\pi}{5}\right)}.$$
2. Les racines 6-ièmes de $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{-4}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ sont
$$z_k = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\quad k \in \{0,\dots,5\}.$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^4 = \dfrac{16\sqrt{2}}{1-i}$.
2. $z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0$

---

1. On met $\dfrac{1}{1-i}$ sous forme trigonométrique. On a $\dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Les racines quatrièmes de $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-i}$ sont donc les $z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{2k\pi}{4}\right)}$ où $k \in \{0,\dots,4\}$
2. On pose $Z = z^2$. L'équation devient $Z^2-(3+8i)Z-16+12i = 0$. Le discriminant est $\Delta = (3+8i)^2-4(-16+12i) = 9$. Les racines sont alors $Z_1 = \dfrac{3+8i-3}{2} = 4i$ et $Z_2 = \dfrac{3+8i+3}{2} = 3+4i$.
On résout $z^2 = Z_1 = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Les solutions sont $z_1 = \sqrt{4}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{4}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = -\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.
On résout $z^2 = Z_2 = 3+4i$. On cherche les solutions sous la forme $z = a+ib$, avec a et b réels. On obtient alors le système $\begin{cases} a^2-b^2 &= 3 \\ 2ab &= 4 \\ a^2+b^2 &= \sqrt{3^2+4^2} = 5 \end{cases}$. Ce qui donne $z_3 = 2+i$ et $z_4 = -2-i$.
L'ensemble des solutions est donc $\{\sqrt{2}+i\sqrt{2}, -\sqrt{2}-i\sqrt{2}, 2+i, -2-i\}$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre les équations suivantes :

1. $z^n + 1 = 0$.
2. $(z-2)^n = (z+2)^n$.

---

1. On a
$$z^n + 1 = 0 \Leftrightarrow z^n = \mathrm{e}^{i\pi}.$$
Or $z_0 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$ est solution particulière de l'équation et donc
$$\mathcal{S} = \{z_0\omega_k \mid k \in \{0,\dots,n-1\}\} = \left\{\mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}} \mid k \in \{0,\dots,n-1\}\right\}$$

2. On a

$$\begin{aligned}(z+2)^n=(z-2)^n &\iff \left(\frac{z-2}{z+2}\right)^n=1 \quad \text{car } z=-2 \text{ n'est pas solution de l'équation}\\ &\iff \exists k\in [\![0,n-1]\!],\ \frac{z-2}{z+2}=\omega_k \quad \text{où } \omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ est une racine n-ième de l'unité}\\ &\iff \exists k\in [\![0,n-1]\!],\ z-2=\omega_k(z+2)\\ &\iff \exists k\in [\![0,n-1]\!],\ z\,(1-\omega_k)=2\omega_k+2\\ &\iff \exists k\in [\![1,n-1]\!],\ z=2\times\frac{1+\omega_k}{1-\omega_k} \quad \text{pour pouvoir diviser par } 1-\omega_k, \text{ qui est nul si } k=0.\end{aligned}$$

Pour $k\in [\![1,n-1]\!]$, on a :

$$z_k=2\times\frac{1+\omega_k}{1-\omega_k}=\frac{e^{i0}+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{i0}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}=2\times\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n}}+e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n}}-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)}=2\times\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}=\frac{2i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

D'où $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{2i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \mid k\in [\![1,n-1]\!]\right\}$.

Exercice 4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une **suite géométrique de raison** a où a est un imaginaire pur non nul. Montrer que si M_n a pour affixe z_n alors le triangle $M_nM_{n+1}M_{n+2}$ est rectangle en M_{n+1}.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\frac{z_{n+2}-z_{n+1}}{z_n-z_{n+1}}=\frac{az_{n+1}-z_{n+1}}{\frac{1}{a}z_{n+1}-z_{n+1}}=\frac{a(a-1)}{1-a}=-a\in i\mathbb{R}\ .$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$ et $\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}$ sont orthogonaux.

Le triangle $M_nM_{n+1}M_{n+2}$ est ractangle en M_{n+1}.

Exercice 5. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que

1. $\dfrac{z}{z-1}\in\mathbb{R}$,
2. $\dfrac{z-i}{z+1}\in\mathbb{R}$,
3. $\dfrac{z-i}{z+1}\in i\mathbb{R}$,
4. $\arg(z-2)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$,
5. $\arg(iz)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$,
6. $|z-i|=|z+i|$,
7. $|(1+i)z-2i|=2$.

---

1. Il s'agit de la droite passant par les points d'affixes 0 et 1, c'est-à-dire la droite des réels privée de 1.
2. Il s'agit de la droite passant par les points d'affixes -1 et i, privée de -1.
3. Le cercle dont un diamètre est donné par les points d'affixes -1 et i, privée de -1.
4. Soit A le point d'affixe 2. Alors $\arg(z-2)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ si et seulement si $(\vec{i},\overrightarrow{AM})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

   C'est donc la demi-droite passant par A et dirigée par $\vec{j}$, sauf A.
5. On a $\arg(iz)=\arg(i)+\arg(z)=\frac{\pi}{2}+\arg(z)[2\pi]$. On a donc

   $$\arg(iz)=\frac{\pi}{4}[\pi]\iff\arg(z)=-\frac{\pi}{4}[\pi].$$

   L'ensemble recherché est donc la droite $y=-x$, sauf l'origine du repère.
6. Soit A le point d'affixe i, B le point d'affixe $-i$, et M le point d'affixe z. Alors $|z-i|$ est la longueur $AM, |z+i|$ est la longueur BM, et la condition recherchée est $AM=BM$, c'est-à-dire M est sur la médiatrice de $[AB]$, soit encore M sur l'axe réel, soit z réel.
7. Factorisons par $1+i$ dans le module. On trouve :

   $$|1+i|\left|z-\frac{2i}{1+i}\right|=2$$

   Puisque $|1+i|=\sqrt{2}$ et $\frac{2i}{1+i}=1+i$, ceci est équivalent à

   $$|z-(1+i)|=\sqrt{2}$$

   Ainsi, l'ensemble des points M correspondants est le cercle de centre le point A d'affixe $1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 6.

1. Résoudre géométriquement $\begin{cases} |z-i| = 1 \\ |z| = |z-1-i| \end{cases}$.

2. Résoudre géométrique $\begin{cases} |(1-i)z+2+2i| = 2 \\ \arg(z+2) = \arg(z+2i)\ [\pi]. \end{cases}$.

3. Déterminer les nombres complexes z tels que les points M, N et P d'affixes z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ appartiennent à un même cercle de centre O.

---

1. La première égalité correspond au cercle de centre i et de rayon 1, et la seconde à la médiatrice entre le point d'affixe 0 et le point d'affice $1+i$. Les deux complexes vérifiant ces égalités sont donc
$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et } z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
2. On a
$$|(1-i)z+2+2i| = 2 \iff |1-i|\,|z+\frac{2+2i}{1-i}| = 2 \iff |z+2i| = \sqrt{2}.$$
L'ensemble des points M tels que $|(1-i)z+2+2i| = 2$ est donc un cercle de centre C d'affixe $-2i$ et de rayon $\sqrt{2}$. Les points M d'affixe z tels que $\arg(z+2) \equiv \arg(z+2i)[\pi]$ sont les points M tels que $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont colinéaires où D est le point d'affixe -2. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z+2) \equiv \arg(z+2i)[\pi]$ est donc la droite (CD) privée de C et D.

   L'ensemble des points recherchés correspond donc à l'intersection de ces deux ensembles, ce sont les points de coordonnées d'affixes $-1-i$ et $1-3i$.
3. Les trois points sont sur un même cercle de centre O si et seulement si $|z| = |\frac{1}{z}| = |1-z|$. On en déduit $|z^2| = 1$, donc $|z| = 1$. Ainsi $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. De plus, $1 - e^{i\theta} = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2}$. On en déduit que $|1-z| = 1$ si et seulement si $|\sin\frac{\theta}{2}| = \frac{1}{2}$, soit si et seulement si $\frac{\theta}{2} \equiv \frac{\pi}{6}[\pi]$ ou $\frac{\theta}{2} \equiv -\frac{\pi}{6}[\pi]$.
   Conclusion, les points M, N et P sont donc sur un même cercle si et seulement si $z = e^{i\theta}$ avec $\theta = \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Approfondir

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{C}$ de module 1. On note z_1, …, z_n les solutions de l'équation $z^n = a$. Montrer que les points M_k d'affixe $(1+z_k)^n$ sont alignés.

Posons $a = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Alors les racines de $z^n = a$ sont données par $z_k = e^{i(2k\pi+\theta)/n}$ où $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Factorisant par l'angle moitié et utilisant les formules d'Euler, on a
$$1 + z_k = 2\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{2n}\right)e^{i(2k\pi+\theta)/2n}$$
soit
$$(1+z_k)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{2k\pi+\theta}{2n}\right)e^{i(2k\pi+\theta)/2} = 2^n\cos^n\left(\frac{2k\pi+\theta}{2n}\right)e^{i(k\pi+\theta/2)}.$$
Donc $\arg((1+z_k)^n) = k\pi + \frac{\theta}{2} \equiv \frac{\theta}{2}[\pi]$. Tous les point $(1+z_k)^n$ ont donc le même argument modulo π. Ils sont donc situés sur la droite qui fait un angle $\theta/2$ avec l'axe des abscisses. Ainsi, ils sont alignés.

Exercice 8. Soient A, B et C trois points du plan, d'affixes a, b et c.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.
2. En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si
$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0.$$

---

1. ABC est équilatéral direct si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, soit si et seulement si
$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ et } \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB} = 1,$$
soit finalement si et seulement si
$$\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3} = -j^2.$$
Donc ABC est équilatéral direct si et seulement si $c - a + j^2 b - j^a = 0$, soit $a(-1-j^2) + c + j^2 b = 0$.
Or, $1 + j^2 = -j$ et en multipliant par j^2, puisque $j^3 = 1$, on obtient $a + jb + j^2 c = 0$.
2. ABC est équilatéral si et seulement si ABC est équilatéral direct ou ACB est équilatéral direct, soit si et seulement si
$$\begin{cases} a + jb + j^2 c = 0 \\ a + jc + j^2 b = 0 \end{cases},$$
soit si et seulement si $(a + jb + j^2)(a + jc + bj^2) = 0$, soit finalement, en développant et à l'aide de la relation $j + j^2 = -1$, si et seulement si
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0.$$
D'où le résultat.

Exercice 9 (Bonus)**.** Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que les points M, N et P d'affixes z, z^2 et $\frac{1}{z}$ soient alignés.

Puisque P a pour affixe $\frac{1}{z}$, on suppose $z \neq 0$. On a
$$\begin{aligned} M, N \text{ et } P \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{z} - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \text{ ou } z^2 - z = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{z+1}{z} \in \mathbb{R} \text{ ou } z = 0 \text{ ou } z = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{z+1}{z^2} = \overline{\left(\frac{z+1}{z^2}\right)} \text{ ou } z = 1 \text{ car } z \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (z+1)\bar{z}^2 = (\bar{z}+1)z^2 \text{ ou } z = 1 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z}(\bar{z} - z) = (z - \bar{z})(z + \bar{z}) \text{ ou } z = 1 \\ &\Leftrightarrow (\bar{z} - z)(z\bar{z} + z + \bar{z}) = 0 \text{ ou } z = 1 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^* \text{ ou } |z|^2 + (z + \bar{z}) = 0. \end{aligned}$$

Si on pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|z|^2 + (z + \bar{z}) = x^2 + y^2 + 2x = (x+1)^2 + y^2 - 1$. On en déduit que le lieu cherché est la réunion de l'axe des réels privé de O et du cercle de centre $(-1, 0)$, de rayon 1 privé de O.

Exercice 10 (Bonus)**.** Soient a et b deux nombres complexes. Soit un entier $n \geq 2$. On note ω_0, …, ω_{n-1} les racines n-ièmes de l'unité. Montrer que
$$|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega_k b|.$$

On peut supposer que $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ On a
$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega_k b) = \sum_{k=0}^{n-1} a + b \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = na.$$
Ainsi par l'inégalité triangulaire
$$|na| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega_k b)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega_k b|.$$
Donc
$$|a| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega_k b|$$
On obtient de même que
$$|b| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |b + \omega_k a|$$

Mais
$$\sum_{k=0}^{n-1} |b+\omega_k a| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega_k \left(\frac{1}{\omega_k} b + a\right)\right| = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k| \left|\frac{1}{\omega_k} b + a\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{1}{\omega_k} b + a\right|$$
car $|\omega_k| = 1$. Il reste à prouver que
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \frac{1}{\omega_k} b\right| = \sum_{j=0}^{n-1} |a+\omega_j b|$$
Or
$$\frac{1}{\omega_k} = \frac{1}{e^{\frac{2ki\pi}{n}}} = \frac{e^{\frac{2ni\pi}{n}}}{e^{\frac{2ki\pi}{n}}} = e^{\frac{2(n-k)i\pi}{n}}$$
donc
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \frac{1}{\omega_k} b\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + e^{\frac{2(n-k)i\pi}{n}} b\right|$$

Par le changement d'indice $p = n-k$,
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \left|a + e^{\frac{2(n-k)i\pi}{n}} b\right| &= \sum_{p=1}^{n} \left|a + e^{\frac{2pi\pi}{n}} b\right| \\
&= \left|a + e^{\frac{2ni\pi}{n}} b\right| + \sum_{p=1}^{n-1} \left|a + e^{\frac{2ip\pi}{n}} b\right| \\
&= |a+b| + \sum_{p=1}^{n-1} \left|a + e^{\frac{2pi\pi}{n}} b\right| \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \left|a + e^{\frac{2ip\pi}{n}} b\right|.
\end{aligned}$$

On a donc
$$|b| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a+\omega_k b|$$
et en sommant les deux inégalités le résultat demandé.