TD 13 _ Sciences Maths

Exercice 1.

1. $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ $\qquad r^5 e^{i5\theta} = e^{3i\pi/2}$

$$\iff r = 1, \quad 5\theta \equiv \frac{3\pi}{2} \ [2\pi]$$

$$\iff r = 1, \quad \theta = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, \ k \in \{0..4\}$$

$$\iff z = e^{i\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right)}, \ k \in \{0..4\}.$$

2. $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}} = -1+\sqrt{3}\,i = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$

$r^6 e^{i6\theta} = 2e^{2i\pi/3}$ ssi $r = \sqrt[6]{2}$

et $6\theta \equiv \frac{2\pi}{3} \ (2\pi)$

ssi $r = \sqrt[6]{2}$

$\theta = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}.$

Exercice 2

2. $z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0 \qquad (E)$

Posons $Z = z^2$, $Z^2 = z^4$.

$(E) \iff Z^2 - (3+8i)Z - 16 + 12i = 0.$

$\vdots$

On trouve $Z_1 = 4i$ et $Z_2 = 3+4i$

$z^2 = 4i$ et $z^2 = 3+4i$.

Rappel. Pour trouver les solutions de $z^2 = x+iy$, on peut écrire $z = a+ib$, $\begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$.

A utiliser pour résoudre $z^2 = 3+4i$.

On a $4i = 4e^{i\pi/2}$, on note $z = re^{i\theta}$

$r^2 e^{2i\theta} = 4 e^{i\pi/2}$

ssi $r = 2$ et $2\theta \equiv \frac{\pi}{2} \, [2\pi]$

ssi $r = 2$ et $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \, [\pi]$

ssi $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$= \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Remarque : $z^2 = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ (utiliser plutôt la 2ème méthode).

Les solutions sont $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, $2+i$, $-2-i$.

Exercice 3.

$z = re^{i\theta}$

1. $z^n + 1 = 0$ ssi $z^n = -1 = e^{i\pi}$

ssi $r = 1$ et $n\theta \equiv \pi \, [2\pi]$

ssi $r = 1$ et $\theta \equiv \frac{\pi}{n} \left[\frac{2\pi}{n}\right]$

ssi $z = e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0 .. n-1\}$.

2. $(z-2)^n = (z+2)^n$ ssi $\left(\frac{z-2}{z+2}\right)^n = 1$ car $z \neq -2$ (car -2 n'est pas solution)

ssi $\frac{z-2}{z+2} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0 .. n-1\}$

ssi $z - 2 = (z+2)\, e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0 .. n-1\}$

ssi $z\left(1 - e^{2ik\pi/n}\right) = 2\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ avec $k \in \{0 .. n-1\}$

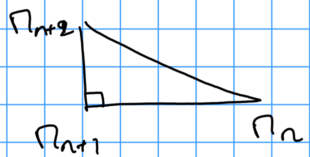
ssi $z = \frac{2\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}{1 - e^{2ik\pi/n}}$ avec $k \in \{1 .. n-1\}$.

ssi $z = 2\,\frac{e^{ik\pi/n} \cos(k\pi/n)}{-i\, e^{ik\pi/n} \sin(k\pi/n)}$ avec $k \in \{1 .. n-1\}$

$= 2i\, \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$ avec $k \in \{1 .. n-1\}$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n \neq 0 \cdot \qquad z_0 \neq 0$

Exercice 4



Montrons que $\left(\overrightarrow{M_{n+1}M_n}, \overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$:

$$\frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{z_n - z_{n+1}} = \frac{a^2 z_n - a z_n}{z_n - a z_n}$$

$$= \frac{a(a-1)}{1-a} = -a \in i\mathbb{R}$$

Donc $M_n M_{n+1} M_{n+2}$ est rectangle en M_{n+1}.

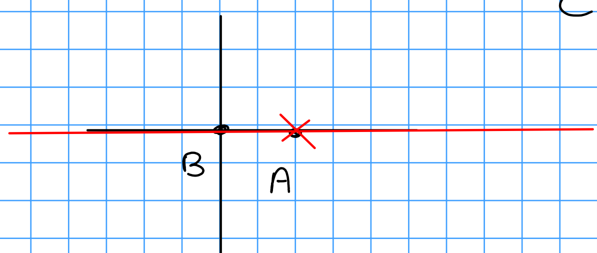
Exercice 5 Rappel : $\frac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$ ssi M, A et B sont alignés.

1. Soit $B(0)$, $A(1)$.

$(M \neq A)$

$\frac{z}{z-1} = \frac{z-0}{z-1} \in \mathbb{R}$ ssi M, A et B sont alignés

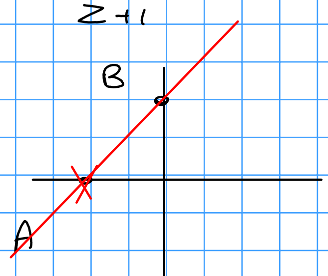
C'est donc la droite réelle privée de 1.



2. Soit $B(i)$, $A(-1)$.

$\frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R}$ ssi M, A et B sont alignés. $(M \neq A)$

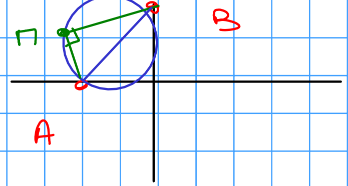
C'est donc la droite passant par A et B, privée de A.



3. Soit $B(i)$ et $A(-1)$. $\qquad M \neq A$

$\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$ ssi $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont orthogonaux

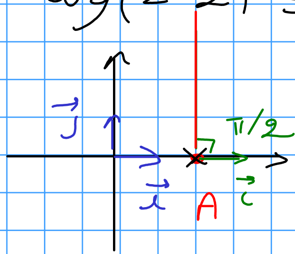
ssi $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$



C'est donc le cercle de diamètre $[AB]$, privé de A.

4. Soit $A(2)$.

$\arg(z-2) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ssi $(\vec{u}, \vec{AM}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

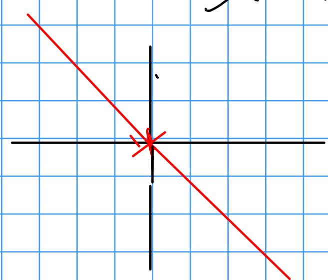


C'est donc une demi-droite d'origine A et dirigée par $\vec{j}$ (privée de A).

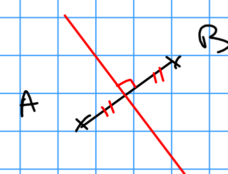
5. $\arg(iz) \equiv \arg(i) + \arg(z) \quad [2\pi]$

$= \frac{\pi}{2} + \arg(z) \quad [2\pi]$

Donc $\arg(iz) \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$ ssi $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [\pi]$.



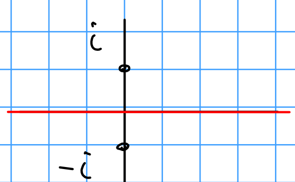
C'est la droite $y = -x$, avec $x \neq 0$.



6. Soit $A(i)$ et $B(-i)$

$|z-i| = |z+i|$ ssi $AM = BM$

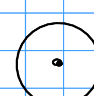
ssi M est sur la médiatrice de $[AB]$.



C'est donc la droite réelle.

7. $|(1+i)z - 2i| = 2$ ssi $\underbrace{|(1+i)|}_{\sqrt{2}}\left|z - \frac{2i}{1+i}\right| = 2$

ssi $\left|z - \frac{2i}{1+i}\right| = \sqrt{2}$.



Donc M appartient au cercle de centre $\frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{2}$

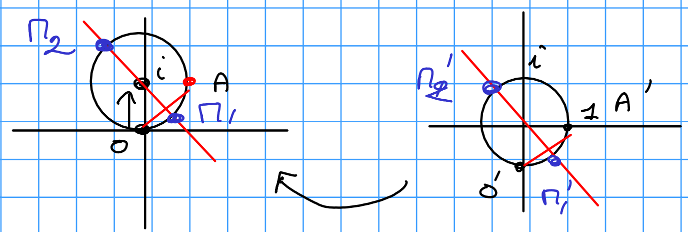
$= i+1$

et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 6

1. • $|z-i| = 1$ ssi M appartient au cercle de centre i et de rayon 1.

• $|z| = |z-1-i|$ ssi M appartient à la médiatrice de $[OA]$ où $A(1+i)$.



$M_1' \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$M_2' \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc $z_{M_1} = z_{M_1'} + i = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z_{M_2} = z_{M_2'} + i = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. • $|(1-i)z + 2 + 2i| = 2$ ssi $|1-i|\,\left|z + \frac{2+2i}{1-i}\right| = 2$

ssi $\left|z - \frac{-2(1+i)}{1-i}\right| = \sqrt{2}$

ssi M appartient au cercle de centre $\frac{-2(1+i)}{1-i} = -2i$ et de rayon $\sqrt{2}$.

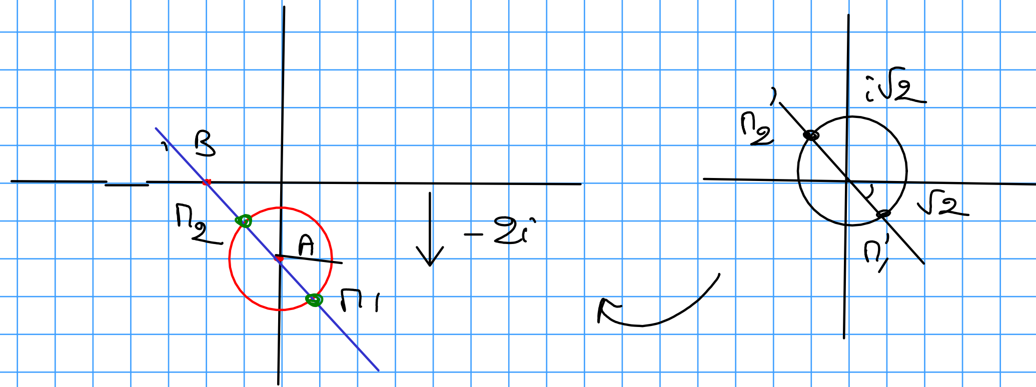
• $\arg(z+2) \equiv \arg(z+2i)\ [\pi]$

ssi $\arg\left(\frac{z+2}{z+2i}\right) \equiv 0\ [\pi]$ $\quad (z \neq -2i)$

ssi $\frac{z+2}{z+2i} \in \mathbb{R}$

ssi M, A et B sont alignés où $A(-2i)$ et $B(-2)$

$(M \neq A)$



$M_1'\ (1-i)$ et $M_2'\ (-1+i)$

$M_1\ (1-3i)$ et $M_2\ (-1-i)$

3. M, N, P appartiennent au même cercle de centre O

ssi $OM = ON = OP$

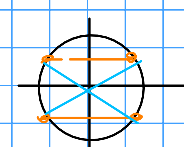
ssi $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$

Donc $|z|^2 = 1$ donc $|z| = 1$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Comme $|1-z| = |z| = 1$, on a $|1-e^{i\theta}| = 1$.

Or $1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right)$

$= -2i\, e^{i\theta/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.



Donc $|1-e^{i\theta}| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.

Donc $|1-e^{i\theta}| = 1$ ssi $\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}$

ssi $\frac{\theta}{2} \equiv \frac{\pi}{6}\ [\pi]$ ou $\frac{\theta}{2} \equiv -\frac{\pi}{6}\ [\pi]$

ssi $\theta \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Donc les solutions sont $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$.