Corrigé du TD n° 14

Similitudes et équations différentielles

11 juin 2021

Exercice 1.

1. Préciser les éléments caractéristiques des similitudes suivantes :
   (a) $z \longmapsto \dfrac{1}{i}z$,
   (b) $z \longmapsto z + 2 + i$,
   (c) $z \longmapsto (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$,
   (d) $z \longmapsto (1 + i\tan(\alpha))z - i\tan(\alpha)$ où $\alpha \in [0, \pi/2[$.
2. Soient A, B et C les points du plan d'affixes $(-2 + i)$, $(1 + 2i)$ et $(2 - i)$. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s de centre A et telle que $s(B) = C$.

---

1. (a) On écrit $\dfrac{1}{i}z = e^{-i\pi/2}z$. Il s'agit donc d'une rotation de centre O d'angle $-\pi/2$.
   (b) Il s'agit d'une translation de vecteur d'affixe $2 + i$.
   (c) L'application de la forme $z \mapsto az + b$ est une similitude directe. Cherchons son centre qui est le point fixe, c'est-à-dire le point vérifiant $z = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$. On trouve $z = 1 + i$, le centre de la similitude est donc le point $A(1, 1)$. On a de plus
   $$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}.$$
   Le rapport de la similitude est donc égal à 2, et l'angle à $\pi/3$.
   (d) Si $\alpha = 0$, la transformation est simplement l'identité. Sinon, il s'agit d'une similitude directe. Son point fixe est le nombre complexe z solution de l'équation
   $$z = (1 + i\tan\alpha)z - i\tan\alpha \iff z = 1.$$
   Le centre de la similitude est donc le point $A(1, 0)$. De plus, on a
   $$1 + i\tan\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \times (\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos(\alpha} > 0.$$
   Ainsi, la similitude est de rapport $\frac{1}{\cos\alpha}$ et d'angle α.
2. On a $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1 - i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$.
   s est donc une similitude de centre A, d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

Exercice 2. Soient A_0 le point du plan d'affixe 6 et s la similitude de centre O, de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $A_{n+1} = s(A_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, en fonction de n, l'affixe du point A_n.
2. Démontrer que A_{12} est sur la demi-droite $[0A_0)$.
3. Démonter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
4. Calculer la longueur de la ligne brisée $A_0A_1 \dots A_{12}$.

---

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$s(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} z.$$
Autrement dit, si on note z_n l'affixe du point A_n, on a
$$z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} z_n.$$
On reconnait une suite géométrique (de raison $r = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6}$ qui est un nombre complexe). On en déduit que
$$z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} \right)^n z_0 = \frac{3^{n/2}}{2^n} e^{in\pi/6} z_0.$$

2. En particulier, $z_{12} = \dfrac{3^6}{2^{12}} e^{2i\pi} \times 6 = \dfrac{3^7}{2^{11}} \in \mathbb{R}_+$. Le point A_{12} est bien situé sur la demi-droite $[OA_0)$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{OA_n}$ est d'affixe z_n, le vecteur $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ est d'affixe $z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} z_n$, et le vecteur $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ est d'affixe $z_{n+1} - z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} - 1 \right) z_n$.
On a $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} - 1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \mathrm{e}^{i\pi/6}} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{3}} \mathrm{e}^{-i\pi/6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} i \in i\mathbb{R}$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ sont orthogonaux.
Le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

4. On sait que $OA_0 = 6$ et que $OA_1 = 6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Par le théorème de Pythagore,
$$A_0 A_1 = 6 \sqrt{1^2 - \frac{3}{4}} = 3.$$
Notons alors d_n la longueur du segment $[A_n A_{n+1}]$, de sorte que $d_0 = 3$. Puisqu'une similitude de rapport r multiplie les longueurs par r, on a
$$d_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} d_n.$$
La quantité recherchée est $d_0 + \cdots + d_{11}$. Par la formule de la somme d'une suite géométrique, on trouve
$$d_0 + \cdots + d_{11} = 3 \frac{1 - \frac{3^6}{2^{12}}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :
$$y'' - y = 0.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation différentielle suivante :
$$y'' + y' - (1 + 3i) y = 0.$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les problèmes de Cauchy suivants :

(a) $$\begin{cases} y'' - 2\sqrt{2} y' + 2y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

---

1. L'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S}_1 = \{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^t + \lambda_2 \mathrm{e}^{-t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

2. L'équation caractéristique est $r^2 + r - (1 + 3i) = 0$, de discriminant $\Delta = -3 - 12i$.
On cherche une racine carrée de Δ. Après calculs, $\delta = 3 + 2i$ vérifie $\delta^2 = \Delta$.
Les solutions de l'équation caractéristique sont donc $r_1 = \dfrac{-1 - (3 + 2i)}{2} = -2 - i$ et $r_2 = \dfrac{-1 + (3 + 2i)}{2} = 1 + i$.
L'ensemble des solutions de $y'' + y' - (1 + 3i) y = 0$ est donc
$$\mathcal{S}_2 = \{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \,;\, t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{(-2-i)t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{(1+i)t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \}.$$

3. (a) La solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy est

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \left(2 + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2}t)\right) e^{\sqrt{2}t}.$$

(b) La solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy est

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto (\cos(t) + \sin(t))e^{2t-\pi}.$$

Exercice 4. Soient Q et ω_0 deux réels strictement positifs. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation suivante en discutant sur les paramètres ω_0 et Q :

$$y'' + \frac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y = 0.$$

En physique, on appelle Q le facteur de qualité et ω_0 la pulsation propre.

L'équation caractéristique associée à l'équation est $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, de discriminant $\Delta = (2\omega_0)^2\left(\frac{1}{(2Q)^2} - 1\right)$.

• Si $Q < \frac{1}{2}$ alors $\Delta > 0$. Les deux racines réelles du polynôme caractéristique sont

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

et

$$r_2 == -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

• Si $Q = \frac{1}{2}$ alors $\Delta = 0$.

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

• Si $Q > \frac{1}{2}$ alors $\Delta < 0$. Les deux racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique sont

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

et

$$r_2 == -\frac{\omega_0}{2Q} + i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \left(\lambda_1 \cos\left(\omega_0 t\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right) + \lambda_2 \cos\left(\omega_0 t\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right)\right) e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (*dérivable et de dérivée continue*) telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -f(-x).$$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -f(-x)$.

Alors f étant de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $x \longmapsto -f(-x)$ l'est aussi et donc f' l'est également. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant la relation vérifiée par f, on obtient alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = f'(-x),$$

soit en utilisant que $f'(-x) = -f(x)$,

$$f''(x) = -f(x),$$

f est donc solution de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants

$$y'' + y = 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x).$$

Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x).$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -f(-x)$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = -\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x).$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient $\lambda_2 = -\lambda_1$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda_1(\cos(x) - \sin(x))$.

Réciproquement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : x \longmapsto \lambda(\cos(x) - \sin(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lambda(-\sin(x) - \cos(x)) = -\lambda(\cos(-x) - \sin(-x)) = -f(-x).$$

L'ensemble des fonctions vérifiant l'énoncé est donc l'ensemble des fonctions $x \longmapsto \lambda(\cos(x) - \sin(x))$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée.

Le polynôme caractéristique associé à l'équation est $X^2 + aX + b$, de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

On distingue alors les trois cas :

• 1^{er} cas : $\Delta > 0$. Notons r_1 et r_2 les racines réelles distinctes du polynôme caractéristique. Alors l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Si r_1 ou r_2 est non nul, disons r_1, alors la solution $x \longmapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ n'est pas bornée puisqu'elle tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ selon le signe de r_1.

• $2^{\text{ème}}$ cas : $\Delta = 0$. Notons r la racine double du polynôme caractéristique. Alors l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto (\lambda_1 x + \lambda_2)\mathrm{e}^{rx} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Alors la solution $x \mapsto x\mathrm{e}^{rx}$ n'est pas bornée.

• $3^{\text{ème}}$ cas : $\Delta < 0$. Notons $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Alors l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto (\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x))\mathrm{e}^{\alpha x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

D'après l'expression du polynôme, on a $\alpha = -\dfrac{a}{2}$.

Or les solutions $x \longmapsto \sin(\beta x)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}$ et $x \mapsto \cos(\beta x)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}$ sont bornées si et seulement si $a = 0$.

En effet, si $a \neq 0$, alors, par exemple, en posant pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $x_n = \dfrac{\pi}{2\beta} + \dfrac{2\pi n}{\beta}$, la quantité suivante tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ selon le signe de a :

$$\sin(\beta x_n)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x_n} = \mathrm{e}^{-\frac{a\pi}{4\beta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{a\pi}{2\beta} \times n}.$$

Si $a = 0$ alors tous les éléments de $\mathcal{S}$ sont des fonctions bornées comme combinaisons linéaires de $x \longmapsto \cos(\beta x)$ et $x \longmapsto \sin(\beta x)$.

Remarque : on peut aussi raisonner sur la forme $x \longmapsto A\cos(\beta x + \varphi)\mathrm{e}^{\alpha x}$.

• **Conclusion :** Ainsi, toutes les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont bornées si et seulement si $\Delta < 0$ et $a = 0$.

Comme $\Delta = a^2 - 4b = -4b$, toutes les solutions sont bornées si et seulement si $a = 0$ et $b > 0$.

L'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit borné est l'ensemble $\left\{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}_+^*\right\}$.

Exercice 7 (Bonus)**.** Déterminer les nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle dont le **cercle inscrit** \内切圆 \ a pour centre en 0.

Vocabulaire : Bissectrice \平分线 \

Notons A, B et C les points d'affixes z, z^2 et z^3 tels que le centre du cercle inscrit au triangle ABC soit O. Le cercle inscrit est l'intersections des trois bissectrices du triangle.

Notons $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \theta[2\pi]$ car A d'affixe z et B d'affixe z^2 : $\dfrac{z_B - z_0}{z_A - z_0} = \dfrac{r^2 \mathrm{e}^{2i\theta}}{re^{i\theta}} = re^{i\theta}$.

De même, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \theta[2\pi]$.

On en déduit $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})[2\pi]$ car la somme des mesures des angles dans un triangle vaut $\pi[2\pi]$.
On en déduit que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv \theta[2\pi]$ et donc $3\theta \equiv 2\pi[2\pi]$, soit $\theta \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.
Les trois triangles OAB, OBC et OCA ont les trois mêmes angles et un côté en commun. On en déduit que $OA = OB = OC$.
Or $OA = r$, $OB = r^2$ et $OC = r^3$, donc $r = 1$. On en déduit que $z = j = e^{2i\pi/3}$ ou $z = j^2 = e^{4i\pi/3}$.
Réciproquement, si $z = j$ ou $z = j^2$ alors z, z^2 et z^3 forment un triangle dont le cercle inscrit a pour centre O.

Exercice 8 (Bonus)**.** Nous allons déterminer une solution de l'équation différentielle

$$xy'' + (x-1)y' + x^3 \mathrm{e}^{-2x} y = 0 \quad (E).$$

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x f'(x) = -xg(x) \\ \mathrm{e}^x g'(x) = xf(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(0) = 1 \\ g(0) = 0 \end{cases}.$$

1. Démontrer que f est solution de (E).
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$.
3. En déduire l'expression de f.

---

1. En dérivant la première égalité, on a
$$e^x f''(x) + e^x f'(x) = -g(x) - xg'(x)$$
En multipiant par x, on obtient
$$xe^x f''(x) + xe^x f'(x) = -xg(x) - x^2 g'(x)$$
Or on a
$$\left\{ \begin{array}{r} e^x f'(x) = -xg(x) \\ e^x g'(x) = xf(x) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} -xg(x) = e^x f'(x) \\ -x^2 g'(x) = -x^3 e^{-x} f(x). \end{array} \right.$$
D'où
$$xe^x f''(x) + xe^x f'(x) = e^x f'(x) - x^3 e^{-x} f(x),$$
soit
$$xe^x f''(x) + (x-1)e^x f'(x) + x^3 e^{-x} f(x) = 0.$$
En divisant par $e^x \neq 0$, on obtient alors
$$xf''(x) + (x-1)f'(x) + x^3 e^{-2x} f(x) = 0$$
2. Posons $h = f^2 + g^2$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} h'(x) &= 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(-2xf(x)g(x) + 2g(x)xf(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$
Donc h est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Or $h(0) = f(0)^2 + g(0)^2 = 1$.
Donc h est constante égale à 1. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) + g^2(x) = 0$
3. De la question précédente, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\omega(x))$ et $g(x) = \sin(\omega(x))$ avec $\omega(0) = 0$. ω est une fonction dérivable et on a
$$\left\{ \begin{array}{r} e^x f'(x) = -xg(x) \\ e^x g'(x) = xf(x) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} -e^x \omega'(x) \sin(\omega(x)) = -x \sin(\omega(x)) \\ e^x \omega'(x) \cos(\omega(x)) = x \cos(\omega(x)) \end{array} \right.$$
et puisque sin et cos ne sont jamais nul en même temps, on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}, \omega'(x) = xe^{-x}.$$
D'où, avec $\omega(0) = 0$,
$$\omega(x) = \int_0^x xe^{-x} dx = 1 - e^{-x}(x+1).$$
Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \cos\left(1 - e^{-x}(x+1)\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \sin\left(1 - e^{-x}(x+1)\right).$$