TD 14. Sciences maths

1. a) $z \mapsto az$ avec $a = \frac{1}{i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc c'est une rotation de centre 0 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) $z \mapsto z + 2 + i$: c'est une translation de vecteur d'affixe $2+i$.

c) C'est une similitude directe.

- Centre : $(1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i) = z$

  ssi $z = 1 + i$.

- $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

C'est une similitude directe de centre $1+i$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

d) C'est une similitude directe. • Si $\alpha = 0$, $z \mapsto z$, identité

• Si $\alpha \neq 0$:

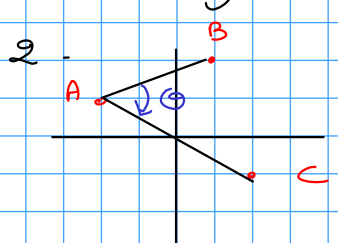
- Centre : $(1 + i\tan\alpha)z - i\tan\alpha = z$

  ssi $z = 1$

- $1 + i\tan\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} e^{i\alpha}$

  >0

C'est une similitude directe de centre 1, de rapport $\frac{1}{\cos\alpha}$ et d'angle α.

2. 

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2 - i - (-2+i)}{1 + 2i - (-2+i)}$$

$$= \frac{4 - 2i}{3 + i} = \frac{(4-2i)(3-i)}{10}$$

$$= 1 - i$$

$$= \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Donc $z_C - z_A = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (z_B - z_A)$

$z_C = z_A + \sqrt{2} e^{-i\pi/4} (z_B - z_A)$

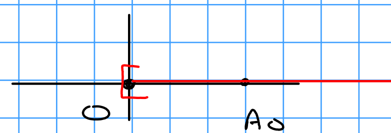
Donc s est une similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

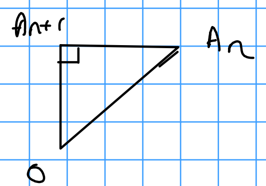
Exercice 2

1. $z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} z_n$, donc $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6}\right)^n \times z_0$

$$= \frac{\sqrt{3}^n}{2^n} e^{in\pi/6} \times 6.$$

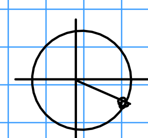
2. $z_{12} = \frac{\sqrt{3}^{12}}{2^{12}} \underbrace{e^{2i\pi}}_{1} \times 6 \in \mathbb{R}_+$ Donc $A_{12} \in [OA_0)$



3. 

Montrons que $\overrightarrow{A_{n+1}O}$ et $\overrightarrow{A_{n+1}A_n}$ sont orthogonaux.

On a $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} z_n - z_n}{\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} z_n} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{6}}$



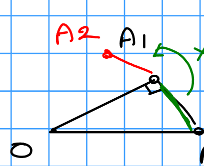
$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} i \in i\mathbb{R}.$$

Donc OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

4. On a $A_0A_1 \dots A_{12} = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{11}A_{12}$.

On a $A_0A_1 = \sqrt{OA_0^2 - OA_1^2}$



$\times \frac{\sqrt{3}}{2}$ $= \sqrt{6^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6\right)^2} = 6 \times \frac{1}{2} = 3.$

Puis $A_1A_2 = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$A_2A_3 = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$A_n A_{n+1} = 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. $\qquad A_n = s(A_{n-1})$

$A_{n+1} = s(A_n)$.

Donc $A_0 A_1 \dots A_{12} = \sum_{n=0}^{11} 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$= 3 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Exercice 4

L'équation caractéristique est $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$,

de discriminant $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2$

$$= (2\omega_0)^2 \left(\frac{1}{(2Q)^2} - 1\right).$$

- $\Delta > 0$ ssi $Q < \frac{1}{2}$

Donc $S = \left\{ t \mapsto \lambda_1 e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} - 1}\right)t} + \lambda_2 e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} - 1}\right)} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

- $\Delta = 0$ ssi $Q = \frac{1}{2}$.

Donc $S = \left\{ t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\, e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}, \; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- $\Delta < 0$ ssi $Q > \frac{1}{2}$. $\quad r_{1,2} = \dfrac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm i\, 2\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}}{2}$

Donc $S = \left\{ t \mapsto \left(\lambda_1 \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}\, t\right) + \lambda_2 \sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}\right)\right) \times e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}, \; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 5

- Soit $f \in \mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -f(-x)$.

Alors $f' \in \mathcal{C}^1$ et $f''(x) = f'(-x) = -f(x)$.

Donc f est solution de $y'' + y = 0$ $\qquad r^2+1 = (r-i)(r+i)$

Donc il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x).$$

- Réciproquement, soit f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)$$

Alors $f'(x) = -\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x)$.

Donc $f'(x) = -f(-x)$ ssi $-\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x)$

$$= -(\lambda_1 \cos(x) - \lambda_2 \sin(x))$$

$$= -\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x = 0$, $\lambda_2 = -\lambda_1$.

Donc $f(x) = \lambda_1 (\cos(x) - \sin(x))$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

On vérifie que si $f(x) = \lambda_1(\cos(x) - \sin(x))$,

alors $f'(x) = \lambda_1(-\sin(x) - \cos(x))$

et $-f(-x) = -(\lambda_1 \cos(x) + \lambda_1 \sin(x)) = f'(x)$.

Donc les solutions sont $x \mapsto \lambda_1(\cos(x) - \sin(x))$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

$r^2 + ar + b = 0$, de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

- Si $\Delta > 0$: Donc $r_1 \neq r_2$

$$S = \left\{ t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Par exemple, si $r_1 \neq 0$, $t \mapsto e^{r_1 t}$ n'est pas bornée.

- Si $\Delta = 0$

$$S = \left\{ t \mapsto (\lambda_1 + t\lambda_2) e^{rt}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$t \mapsto t e^{rt}$ n'est pas bornée.

- Si $\Delta < 0$: $r_{1,2} = \dfrac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2}$

$$S = \left\{ t \mapsto (\lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t)) e^{-\frac{a}{2} t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$t \mapsto \cos(\omega t)\, e^{-\frac{a}{2}t}$ et $t \mapsto \sin(\omega t)\, e^{-\frac{a}{2}t}$

sont bornées ssi $a = 0$,

Donc toute solution est bornée ssi $\underset{a^2-4b}{\underset{\shortparallel}{\Delta}} < 0$ et $a = 0$

soit ssi $a = 0$ et $-4b < 0$, ssi $a = 0$ et $b > 0$.

$y'' + by = 0$ avec $b > 0$.