Feuille de TD n° 15

Équations différentielles avec second membre

17 juin 2021

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 3y = \mathrm{e}^{-5x}$,
2. $y' - y = \mathrm{sh}(x) + 1$,
3. $y'' - 3y' - 4y = t + e^{-t}$,
4. $y'' - 2y' + y = (t-1)\mathrm{e}^t$,
5. $y'' + y = \sin^3(t) + 1$.

---

1. $y' + 3y = e^{-5x}$

   • **Solutions de l'équation homogène**
   L'ensemble des solutions de l'équation homogène est
   $$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-3x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

   • **Solution particulière**
   On cherche une solution particulière sous la forme $\varphi_p(x) = ce^{-5x}$ où $c \in \mathbb{R}$ (ici, Q un polynôme de même degré que $P(X) = 1$, donc de degré 0 et -5 n'est pas racine du polynôme $X + 3$).
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_p'(x) = -5ce^{-5x}$.
   Alors φ_p est solution de l'équation différentielle $y' + 3y = e^{-5x}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\varphi_p'(x) + 3\varphi_p(x) = e^{-5x},$$
   soit encore, si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$(-5c + 3c)e^{-5x} = e^{-5x},$$
   soit $-2c = 1$ (en simplifiant par e^{-5x}) et donc $c = -\dfrac{1}{2}$.
   Donc l'application φ_p définie par $\varphi_p(x) = \dfrac{-1}{2}e^{-5x}$ est une solution particulière de l'équation.
   • **Conclusion :** L'ensemble des solutions de $y' + 3y = e^{-5x}$ est donc
   $$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-5x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2. $y' - y = \mathrm{sh}(x) + 1$ • **Solutions de l'équation homogène** Les solutions de l'équation homogène sont
   $$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda e^{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

   • **Solution particulière** On va chercher une solution particulière de $y' - y = \mathrm{sh}(x) + 1 = \dfrac{1}{2}e^x - \dfrac{1}{2}e^{-x} + 1$. On remarque que le second membre est une combinaison linéaire de fonctions "polynôme-exponentielle".
   On va donc utiliser le principe de superposition des solutions. On commence par chercher des solutions particulières pour chaque terme du second membre, puis on les ajoute pour obtenir une solution particulière de l'équation différentielle de l'énoncé.

   — Solution particulière avec second membre e^x.
   On cherche une solution sous la forme $\varphi_1(x) = x^m Q(x)e^x$ avec Q de degré 0 et $m = 1$ (car 1 est racine de $X - 1$), soit $\varphi_1(x) = cxe^x$, où $c \in \mathbb{R}$. Après calculs, on trouve que φ_1 est solution de $y' - y = e^x$ si et seulement si
   $$\varphi_1(x) = xe^x.$$

   — Solution particulière avec second membre e^{-x}. On cherche une solution sous la forme $\varphi_2(x) = x^m Q(x)e^{-x}$ avec Q de degré 0 et $m = 0$, soit $\varphi_2(x) = ce^{-x}$, où $c \in \mathbb{R}$. Après calculs, on trouve que φ_2 est solution de $y' - y = e^{-x}$ si et seulement si
   $$\varphi_2(x) = \frac{-1}{2}e^{-x}.$$

— Solution particulière avec second membre 1. L'application φ_3 définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi_3(x) = -1$ est une solution particulière évidente de l'équation $y' - y = 1$.

D'après le principe de superposition des solutions, on en déduit que $y' - y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + 1$ a pour solution particulière l'application φ_p définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{2}\varphi_1(x) - \frac{1}{2}\varphi_2(x) + \varphi_3(x) = \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{4}e^{-x} - 1.$$

• **Conclusion :** L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = \mathrm{sh}(x) + 1$ est donc

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto \lambda e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{4}e^{-x} - 1. \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

3. $\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{4t} - \frac{1}{4}t + \frac{3}{16} - \frac{1}{5}te^{-t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$
4. $\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^t + \left(\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right)\mathrm{e}^t \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$
5. $\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) + 1 - \frac{3}{8}t\cos(t) + \frac{1}{32}\sin(3t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 2. Soient ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts. Déterminer la solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = h(t), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

avec $h(t) = A \in \mathbb{R}$ puis $h(t) = \cos(\omega_0 t)$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + \omega^2 y = 0$ est

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

• Si $h(t) = A \in \mathbb{R}$ alors la fonction $t \longmapsto \frac{A}{\omega^2}$ est une solution particulière de l'équation.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) + \frac{A}{\omega^2} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Après calculs, on trouve alors que la solution du problème de Cauchy est l'application

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \left(1 - \frac{A}{\omega^2}\right)\cos(\omega t).$$

• Si $h(t) = \cos(\omega_0 t)$, on trouve que $\varphi_p(t) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 t)$ est une solution particulière.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Après calculs, on trouve alors que la solution du problème de Cauchy est l'application

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \cos(\omega t) + \frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x.$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x.$$

On a $f'(x) = \mathrm{e}^x - f(-x)$ donc f' est dérivable et $f''(x) = \mathrm{e}^x + f'(-x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - f(x)$ donc f est solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = 2\,\mathrm{ch}\,x$$

Après calculs, l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\mathcal{S} = \{x \longmapsto \operatorname{ch} x + C_1 \cos x + C_2 \sin x \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Il existe donc $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ch} x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Réciproquement, une telle fonction est solution du problème si et seulement si

$$\operatorname{sh} x - C_1 \sin x + C_2 \cos x + \operatorname{ch} x + C_1 \cos x - C_2 \sin x = \mathrm{e}^x,$$

soit, $C_1 + C_2 = 0$.

Finalement les solutions sont

$$f(x) = \operatorname{ch} x + C(\cos x - \sin x),$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des fonctions f, trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f^{(3)} + f''(x) - f'(x) - f(x) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = -1 \end{cases}.$$

On pourra poser $g(x) = f'(x) + f(x)$ et montrer que g est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.

• Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On pose $g = f' + f$

On suppose f solution de $y^{(3)} + y'' - y' - y = 0$. Alors g est solution de $g'' - g = 0$ avec $g(0) = 1 + 1 = 2$ et $g'(0) = -1 + 1 = 0$. Résolvons ce problème de Cauchy.

L'ensemble des solutions de l'équation $y'' - y = 0$ est :

$$\mathcal{S} = \{x \longmapsto \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x}.$$

Comme $g(0) = 2$ et $g'(0) = 1$, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ Donc $g : x \longmapsto e^x + e^{-x}$

La fonction f vérifie alors l'équation différentielle :

$$f' + f = e^x + e^{-x}$$

• L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_h = \{x \longmapsto \lambda e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• On cherche une solution particulière de $f' + f = e^x$ sous la forme $x \mapsto Ce^x$. Après calculs, on obtient $C = 1/2$. Une solution particulière est donc $x \longmapsto \dfrac{e^x}{2}$.

On cherche ensuite une solution particulière de $f' + f = e^{-x}$. Comme -1 est racine de l'équation caractéristique, on peut la chercher sous la forme $x \longmapsto Cxe^{-x}$. Après calculs, on obtient $C = 1$. Donc $x \longmapsto xe^{-x}$ est une solution particulière.

Par le principe de superposition, une solution particulière de $f' + f = e^x + e^{-x}$ est donc

$$x \longmapsto e^x + xe^{-x}$$

• L'ensemble des solutions de l'équation $y' + y = e^x + e^{-x}$ est donc

$$S = \{x \longmapsto \lambda e^{-x} + e^x + xe^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lambda e^{-x} + e^x + xe^{-x}.$$

Comme $f(0) = 1$, $\lambda = 0$.

• Réciproquement, on vérifie que la fonction $f : x \longmapsto e^x + xe^{-x}$ est trois fois dérivable et est solution du problème de Cauchy.

• **Conclusion :** Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy, la fonction $x \longmapsto e^x + xe^{-x}$.

Exercice 5. Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on utilise le modèle suivant. On note N la fonction représentant le nombre de poissons en fonction du temps t (exprimé en années). On admet que N vérifie les conditions suivantes :

— N est solution de l'équation différentielle

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

où r et K sont des constantes strictement positives.

— $N(0) = N_0 \in \mathbb{R}_+^*$,

— N est définie sur $[0, +\infty[$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$, $0 < N(t) < K$.

On pose, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.

1. Démontrer que g est solution de l'équation différentielle

$$y' = -ry + \frac{r}{K} \quad (E').$$

2. Résoudre l'équation (E') puis déterminer une expression de N.
3. Justifier que le nombre de poissons augmente et déterminer sa limite.

---

1. N étant dérivable, g l'est aussi et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(t) = -\frac{N'(t)}{N^2(t)}.$$

Or

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = rN(t) - \frac{r}{K}N^2(t),$$

donc

$$g'(t) = -\frac{N'(t)}{N^2(t)} = -\frac{rN(t) - \frac{r}{K}N}{N^2(t)} - r\frac{1}{N(t)} + \frac{r}{K} = -rg(t) + \frac{r}{K}.$$

Ceci prouve bien que g est solution de $y' = -ry + \dfrac{r}{K} \Leftrightarrow y' + ry = \frac{r}{K}$

2. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + ry = 0$ est

$$\mathcal{S}_h = \{t \longmapsto \mathrm{C}e^{-rt} \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

On cherche une solution particulière constante : $t \longmapsto \dfrac{r}{K}$.

Donc

$$S = \left\{t \longmapsto Ce^{-rt} + \frac{1}{K}, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ainsi, $\dfrac{1}{N(t)} = Ce^{-rt} + \dfrac{1}{K}$ donc :

$$N(t) = \frac{1}{Ce^{-rt} + \frac{1}{K}} = \frac{K}{KCe^{-rt} + 1}.$$

Enfin $N(0) = N_0$ donc

$$\frac{K}{KC + 1} = N_0 \Leftrightarrow KC + 1 = \frac{K}{N_0} \Leftrightarrow KC = \frac{K}{N_0} - 1.$$

Ainsi

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt} + 1} = \frac{KN_0}{(K - N_0)\,e^{-rt} + N_0}$$

3. Puisque $N'(t) = \dfrac{re^{rt}}{\left(\left(\frac{K}{N_0}-1\right)e^{-rt}+1\right)^2}$, nous voyons que $N'(t) > 0$ ce qui justifie que le nombre de poissons augmente.

Puisque $\lim e^{-rt} = 0$ car $r > 0$, on en déduit $\lim_{t\to+\infty} N(t) = \frac{KN_0}{N_0} = K$.

Exercice 6 (Bonus)**.** On considère l'équation différentielle

$$4x^2y'' + y = 1 \quad (E)$$

définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit f une solution de (E). On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(\mathrm{e}^t)$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$4y'' - 4y' + y = 1 \quad (E').$$

2. Résoudre l'équation (E').

3. En déduire l'expression de f.
4. Étudier la réciproque puis conclure.

---

1. f et exp étant deux fois dérivables, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$g'(t) = \mathrm{e}^t g'(\mathrm{e}^t)$$
et
$$g''(t) = \mathrm{e}^t g'(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^{2t} g''(\mathrm{e}^t).$$
Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$4g''(t) - 4g'(t) + g(t) = (2\mathrm{e}^t)^2 f''(\mathrm{e}^t) + f(\mathrm{e}^t) = 1$$
car f est solution de (E).
2. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est
$$\mathcal{S}_h = \{(\lambda_1 + \lambda_2 x)\mathrm{e}^{-t/2} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$
L'application $x \longmapsto 1$ est solution évidente.
L'ensemble des solutions de (E') est donc
$$\mathcal{S}_{E'} = \{t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)\mathrm{e}^{-t/2} + 1 \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$
3. On en déduit qu'il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$g(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)\mathrm{e}^{-t/2} + 1,$$
soit $f(\mathrm{e}^t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{-t/2} + 1$.
La fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ étant bijective de bijection réciproque $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 \ln(x))\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{\sqrt{x}})} + 1 = (\lambda_1 + \lambda_2 \ln(x))\frac{1}{\sqrt{x}} + 1.$$
4. Soit $f(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 \ln(x))\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 1$, où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$f'(x) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda_1}{2}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda_2}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$
et
$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}(\lambda_1 \ln(x) + \lambda_2).$$
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$4x^2 f''(x) + f(x) = 1,$$
donc f est solution de (E).
L'ensemble des solutions est donc
$$S_E = \{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 \ln(x))\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$