TD 15 - Sciences Maths

$P(x)e^{\alpha x}$

Exercice 1

$$y' - y = \operatorname{sh}(x) + 1 = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} + 1$$
$$= \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x} + 1$$

1. $\mathcal{S} = \{x \mapsto \underbrace{\lambda e^{-3x}}_{SR} \underbrace{- \frac{1}{2}e^{-5x}}_{fp} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. $\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \underbrace{\lambda e^{x}}_{} + \underbrace{\frac{1}{2}xe^{x}}_{fp_1} + \underbrace{\frac{1}{4}e^{-x}}_{fp_2} \underbrace{- 1}_{fp_3} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3. $\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \underbrace{\lambda_1 \bar{e}^{t} + \lambda_2 e^{4t}}_{SR} \underbrace{- \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}}_{fp_1} \underbrace{- \frac{1}{5}te^{-t}}_{fp_2} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

4. $\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{t}}_{SR} + \left(\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right)e^{t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$

5. $\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \underbrace{\lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t)}_{SR} + 1 - \frac{3}{8}t\cos(t) + \frac{1}{32}\sin(3t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$r^2 - 3r - 4 = 0$

$(r+1)(r-4)$.

Par le principe de superposition des solutions,

(1) $y' - y = \frac{1}{2}e^{x}$ $\longrightarrow$ $f_{p_1}(x) = x^1 \, c \, e^{x} = cxe^{x}$.

On trouve $c = \frac{1}{2}$

(2) $y' - y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ $\longrightarrow$ $f_{p_2}(x) = x^0 d e^{-x} = de^{-x}$. $d = \frac{1}{4}$

(3) $y' - y = 1$

$\hookrightarrow f_{p_3}(x) = -1$

$\alpha = -1$ et -1 n'est pas racine de $r - 1 = 0$

3. (1) $y'' - 3y' - 4y = t$ $\longrightarrow$ $f_{p_1}(x) = at + b$, $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{16}$

(2) $y'' - 3y' - 4y = 1e^{-t}$ $\longrightarrow$ $f_{p_2}(x) = t^1 ce^{-t}$, $c = -\frac{1}{5}$.

4. $f_p(t) = t^2(at+b)e^{t}$ $\quad r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$.

$\alpha = 1$ est racine double, $m = 2$. $\quad a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{2}$.

5.

$$\sin(t)^3 = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\sin(3t) - 3\sin t\right).$$

$$y'' + y = -\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin t + 1$$

(1) $y'' + y = -\frac{1}{4}\sin(3t)$ $\quad y'' + y = -\frac{1}{4}e^{3it}$ $\longrightarrow$ puis partie imaginaire

(1') $y'' + y = \sin(3t)$ $\longrightarrow f_{p_1}$

(2) $y'' + y = \frac{3}{4}\sin t$ $\qquad y'' + y = \frac{3}{4} e^{it}$ → puis partie imaginaire

$y'' + y = \sin t$

(3) $y'' + y = 1$ → $f_p(t) = 1$

Exercice 2

$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad r^2 + \omega^2 = 0$.

· Solutions de l'équation homogène : $X^2 + \omega^2 = (X - i\omega)(X + i\omega)$

$S_h = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} ; t \mapsto \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) , (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

· Si $h(t) = A \in \mathbb{R}$, $\quad y'' + \omega^2 y = A \quad (1)$

Une solution particulière est $t \mapsto \frac{A}{\omega^2}$.

Donc l'ensemble des solutions de (1) est

$$S_1 = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} , t \mapsto \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) + \frac{A}{\omega^2} , (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application 2 fois dérivable.

φ vérifie le problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(t) = \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) + \frac{A}{\omega^2}$

et $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.

Or $\varphi(0) = \lambda_1 + \frac{A}{\omega^2}$, $\quad \varphi'(t) = -\lambda_1 \omega \sin(\omega t) + \lambda_2 \omega \cos(\omega t)$

$\varphi'(0) = \lambda_2 \omega$. $(\omega \neq 0)$.

Donc φ vérifie $(\mathcal{C})$ ssi $\lambda_1 = 1 - \frac{A}{\omega^2}$ et $\lambda_2 = 0$

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy est

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} ; t \mapsto \left(1 - \frac{A}{\omega^2}\right) \cos(\omega t) + \frac{A}{\omega^2}.$$

• Si $R(t) = \cos(\omega_0 t)$.

On cherche une solution particulière de $y'' + \omega^2 y = 1 e^{i\omega_0 t}$ $(*)$, $(\omega_0 \neq \omega)$

sous la forme $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = a e^{i\omega_0 t}$ où $a \in \mathbb{C}$.

$r^2 + \omega^2$

$-\omega_0^2 + \omega^2 \neq 0$

Alors $\varphi_{p,\mathbb{C}}'(t) = a i\omega_0 e^{i\omega_0 t}$

et $\varphi_{p,\mathbb{C}}''(t) = -a\omega_0^2 e^{i\omega_0 t}$.

Donc $\varphi_{p,\mathbb{C}}$ est solution de $(*)$ ssi

$(-a\omega_0^2 + a\omega^2) e^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0 t}$

ssi $(\omega^2 - \omega_0^2)\, a = 1$, ssi $a = \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$.

Donc $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega_0 t}$ est solution particulière de $(*)$.

Donc $\mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}}(t)) = \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t)$ est solution particulière

de $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 t)$.

Donc l'ensemble des solutions de $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 t)$

est $S = \left\{ \mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ t \mapsto \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) + \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t),\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

φ est solution du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_2)$ ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

tel que $\varphi(t) = \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) + \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t)$

et $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.

Or $\varphi(0) = \lambda_1 + \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$,

$\varphi'(t) = -\lambda_1 \omega \sin(\omega t) + \lambda_2 \omega \cos(\omega t) - \dfrac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin(\omega_0 t)$

$\varphi'(0) = \lambda_2 \omega$.

Donc φ est solution de $(\mathcal{C}_2)$ ssi $\lambda_1 = 1 - \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$ et $\lambda_2 = 0$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{C}_2)$ est

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ t \mapsto \left(1 - \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t)$$

$$= \cos(\omega t) + \frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Exercice 3

classe $\mathcal{C}^2$: la fonction est 2 fois dérivable et f'' est continue

• Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + f(-x) = e^x.$$

$f'(x) = -f(-x) + e^x$

$f'(-x) = -f(x) + e^{-x}$

Alors, $f''(x) - f'(-x) = e^x$,

soit $f''(x) = f'(-x) + e^x = -f(x) + e^{-x} + e^x$

Donc $f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x}$.

Donc f est solution de $y'' + y = e^x + e^{-x}$.

On a $S_h = \{ x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x),\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

① $y'' + y = e^x$: $f_{p_1}(x) = c e^x$ $\quad 2c\cancel{e^x} = \cancel{e^x}$

$f_{p_1}''(x) = c e^x$ $\quad c = \frac{1}{2}$.

$f_{p_1}(x) = \frac{1}{2} e^x$.

② $y'' + y = e^{-x}$ $\quad f_{p_2}(x) = d e^{-x}$ $\quad 2de^{-x} = e^{-x}$

$f_{p_2}''(x) = d e^{-x}$ $\quad d = \frac{1}{2}$.

$f_{p_2}(x) = \frac{1}{2} e^{-x}$.

Donc $S = \{ x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

Donc il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}.$$

Réciproquement, soit $f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Alors f est dérivable et

$$f'(x) = -\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) + \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x}.$$

Donc $f'(x) + f(-x) = e^x$

ssi $-\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) + \cancel{\frac{1}{2}e^{x}} - \cancel{\frac{1}{2}e^{-x}} + \lambda_1 \cos(x) - \lambda_2 \sin(x) + \cancel{\frac{1}{2}e^{-x}} + \cancel{\frac{1}{2}e^{x}} = \cancel{e^{x}}$

ssi $(\lambda_1 + \lambda_2)\cos(x) - (\lambda_1 + \lambda_2)\sin(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(Pour $x = 0$, on a $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = -\lambda_2$)

ssi $\lambda_1 = -\lambda_2$.

Donc $f(x) = \lambda_1(\cos(x) - \sin(x)) + \underbrace{\frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})}_{ch(x)}$, avec $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

1. N est dérivable, donc g est dérivable.

__Exercice 5__

$$g'(t) = -\frac{N'(t)}{N(t)^2} = -\frac{1}{N(t)^2}\left(rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)\right)$$

$$= -\frac{r}{N(t)} + \frac{r}{K}$$

$$= -rg(t) + \frac{r}{K}.$$

Donc g est solution de $y' = -ry + \frac{r}{K}$.

2. $S_h = \{\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R};\ t \mapsto \lambda e^{-rt},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Une solution particulière est $t \mapsto \frac{1}{K}$

Donc $S_{E'} = \{\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R};\ t \mapsto \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$g(t) = \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}$. De plus, $g(0) = \lambda + \frac{1}{K} = \frac{1}{N(0)} = \frac{1}{N_0}$

Donc $\lambda = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}$.

Donc $g(t) = \left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right)e^{-rt} + \frac{1}{K}$.

Or $N(t) = \frac{1}{g(t)}$, donc $N(t) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right)e^{-rt} + \frac{1}{K}}$

$$= \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt} + 1}.$$

3. On a $N'(t) = \underbrace{\underbrace{rN(t)}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)}_{>0}}_{>0}$ et $0 < N(t) < K$

Donc N est croissante, donc le nombre de poissons augmente.

$N(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} K$ car $e^{-rt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ $(r > 0)$.

Exercice 4

$g = f' + f$

$g' = f'' + f'$

$g'' = f''' + f''$

Donc g est solution de $y'' - y = 0$

Donc $g(x) = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{-x}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Or $\begin{cases} g(0) = 1 + 1 = 2 \\ g'(0) = -1 + 1 = 0 \end{cases}$.

Donc $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Donc $g(x) = e^{x} + e^{-x}$.

Donc $f'(x) + f(x) = e^{x} + e^{-x}$.

Donc f est solution de $y' + y = e^{x} + e^{-x}$.

A résoudre.