

TD Numerical Mechanics

Séance 1 :

Retrouver l'équation du mouvement du pendule simple avec les équations de Lagrange :

Tout d'abord, on a les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i, \quad \text{avec } L = E_C - E_p \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_p}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

Pour le pendule simple, on a :

$$E_C = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_p = -mga \cos \theta + cte$$

$$\delta W = 0$$

Donc, on peut obtenir :

$$m a^2 \ddot{\theta} + m g a \sin \theta = 0$$

On sait que θ est très petit, donc $\sin \theta \approx \theta$

Donc, on a :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \theta = 0$$

Cela est l'équation du mouvement du pendule simple.

Séance 2 :

Montrer que le schéma explicite avec matrice d'amplification est obtenu à partir du système du premier ordre que l'on discrétise en temps de manière explicite:

Schéma d'EULER explicite

$$\begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{bmatrix}$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

On a :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_j + \omega_0^2 q_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_j = -\omega_0^2 q_j$$

Donc,

$$\begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ \dot{q}_j + \Delta t * \ddot{q}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ \dot{q}_j + \Delta t * (-\omega_0^2 q_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 \Delta t * q_j + \dot{q}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

Alors, on peut obtenir la matrice d'amplification : $A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 1 Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

Question 1

1.1 on a l'équation du mouvement du pendule simple: $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ (1)

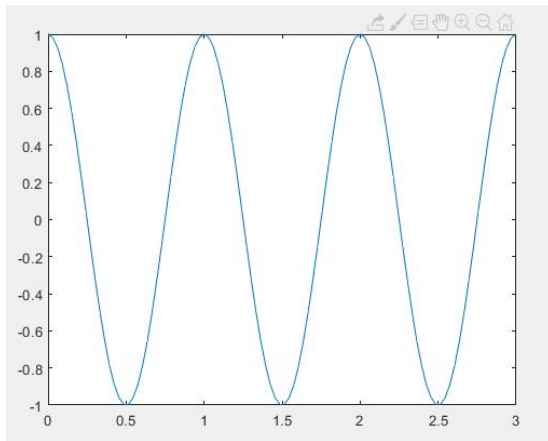
La solution est dans la forme $q(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$

Et on a les conditions initiales: $\omega_0 = 2\pi \text{rad/s}$; $q_0 = 1$; $\dot{q}_0 = 0$

Donc, on a $A = 0$ et $B = 1$

Alors, la solution analytique est $q(t) = \cos(2\pi t)$

```
clear all;
w0=2*pi;
q0=1;
dq0=0;
T0=3;
t=linspace(0,T0,300);
q=cos(2*pi*t);
plot(t,q)
```



1.2 $E^* = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2) = \frac{1}{2}(4\pi^2 \sin^2(2\pi t) + 4\pi^2 \cos^2(2\pi t)) = 2\pi^2 \approx 19.7392$

C'est une constante, indépendante du temps.

Question 2

2.1 on sait que
$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ q_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \\ q_j \end{pmatrix} + \Delta t * \begin{pmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} \quad (5)$$

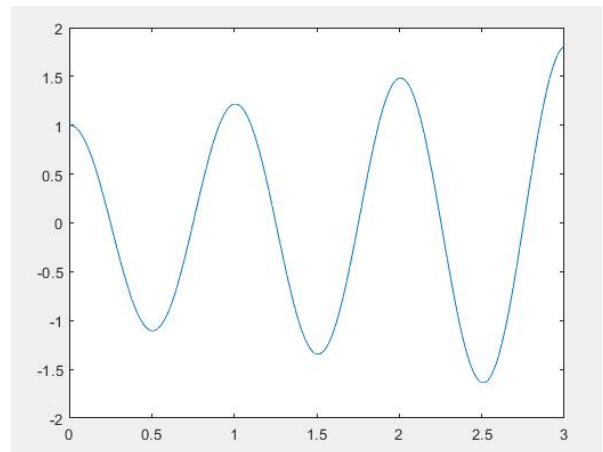
Donc, on a
$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ q_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \\ q_j \end{pmatrix} + \Delta t * \begin{pmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ \dot{q}_j + \Delta t * \ddot{q}_j \\ q_j + \Delta t * \dot{q}_j \end{pmatrix}$$

Et on a $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \Rightarrow \ddot{q} = -\omega_0^2 q \Rightarrow \ddot{q}_j = -\omega_0^2 q_j$

Alors,
$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ q_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ \dot{q}_j + \Delta t * \ddot{q}_j \\ q_j + \Delta t * \dot{q}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ \dot{q}_j + \Delta t * (-\omega_0^2 q_j) \\ q_j + \Delta t * \dot{q}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 \Delta t * q_j + \dot{q}_j \\ q_j + \Delta t * \dot{q}_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$$

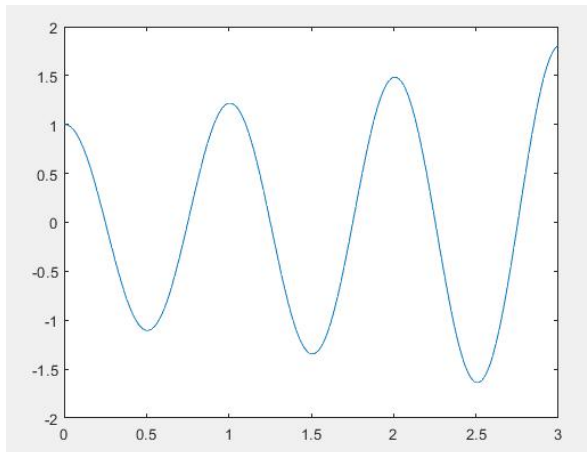
2.2 J'ai choisi la méthode 1.

```
clear all;
w0=2*pi;
q0=1;
dq0=0;
T0=3;
dt=0.01;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(1,np);
dq=zeros(1,np);
ddq=zeros(1,np);
E=zeros(1,np);
q(1)=q0;
dq(1)=dq0;
ddq(1)=-w0c*q(1);
for inc=2:np
    q(inc)=q(inc-1)+dt*dq(inc-1);
    dq(inc)=dq(inc-1)+dt*ddq(inc-1);
    ddq(inc)=-w0c*q(inc);
end
E=0.5*(dq.*dq+w0c*(q.^2));
figure(1)
plot(t,q)
figure(2)
plot(t,E)
```

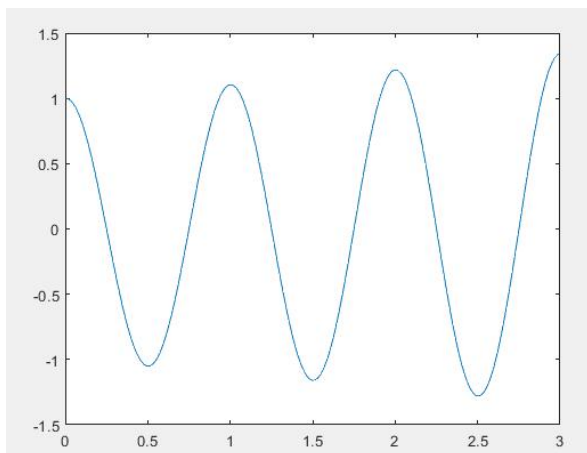


2.3 On choisit $dt_1=0.01s$; $dt_2=0.005s$; $dt_3=0.001s$, alors

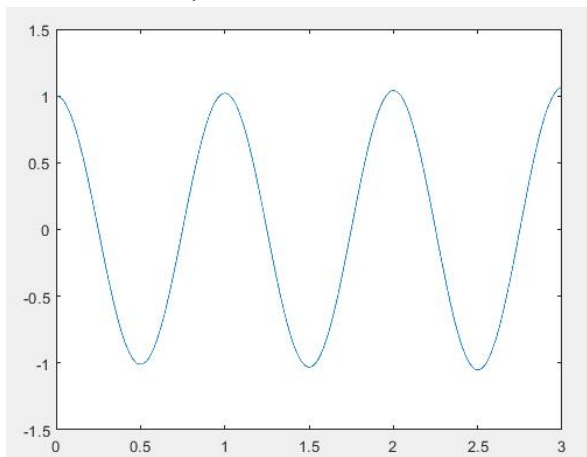
Pour $dt_1=0.01s$, le résultat est



Pour $dt_2=0.005s$, le résultat est



Pour $dt_3=0.001s$, le résultat est

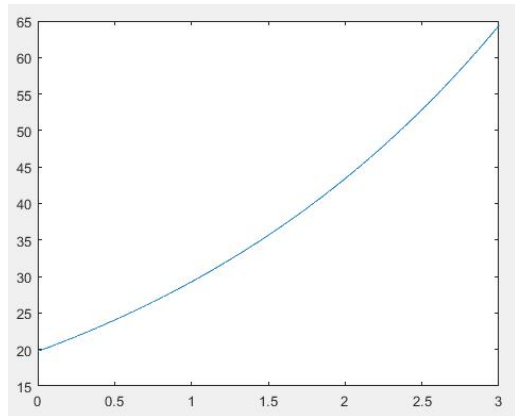


On peut voir que quand dt devient petit, la divergence devient lente.

2.4 La solution exacte : $E^* = 2\pi^2 \approx 19.7392$

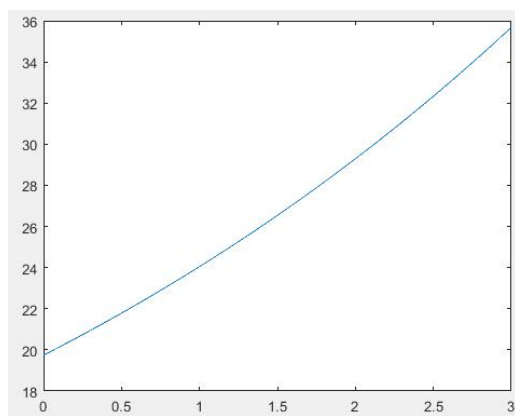
Pour $dt=0.01s$, le résultat est

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.8171	19.8954	19.9739	20.0528	20.1319	20.2114	20.2912	20.3713	20.4517	20.5325	20.6135	20.6949
2													
3													
4													
5													
6													



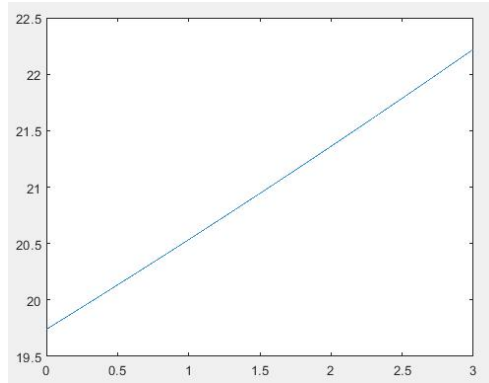
Pour $dt=0.005s$, le résultat est

E													
1x601 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7587	19.7782	19.7977	19.8173	19.8368	19.8564	19.8760	19.8956	19.9152	19.9349	19.9546	19.9743
2													
3													
4													
5													
6													



Pour $\Delta t = 0.001$ s, le résultat est

E													
1x3001 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7400	19.7408	19.7415	19.7423	19.7431	19.7439	19.7447	19.7454	19.7462	19.7470	19.7478	19.7486
2													
3													
4													
5													
6													



E* augmente avec le temps, c'est-à-dire que la divergence avec le temps. On peut voir que quand Δt devient petit, E* augmente plus lentement.

2.5 On va calculer les valeurs propres pour $A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\Delta t \\ \omega_0^2 \Delta t & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + \omega_0^2 \Delta t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \pm i\omega_0 \Delta t$$

$$\Rightarrow |\lambda| = \sqrt{1 + \omega_0^2 \Delta t^2} > 1$$

Donc, la solution numérique est toujours instable.

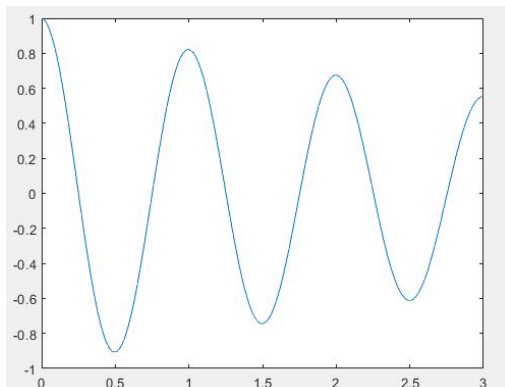
Question 3

3.1 J'ai choisi la méthode 1.

```

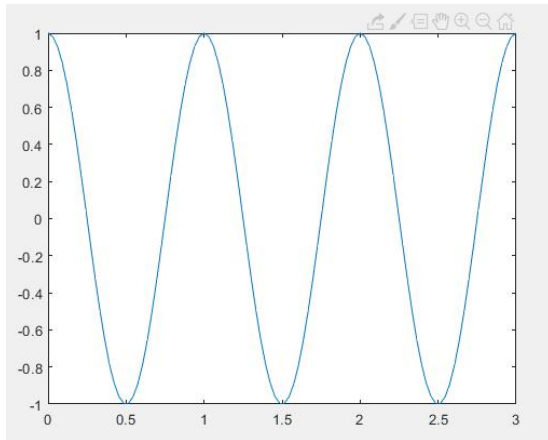
clear all;
w0=2*pi;
q0=1;
dq0=0;
T0=3;
dt=0.01;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(1,np);
dq=zeros(1,np);
ddq=zeros(1,np);
E=zeros(1,np);
q(1)=q0;
dq(1)=dq0;
ddq(1)=-w0c*q(1);
for inc=2:np
    q(inc)=(q(inc-1)+dt*dq(inc-1))/(1+w0c*dt*dt);
    ddq(inc)=-w0c*q(inc);
    dq(inc)=dq(inc-1)+dt*ddq(inc);
end
E=0.5*(dq.*dq+w0c*(q.^2));
figure(1)
plot(t,q)
figure(2)
plot(t,E)

```

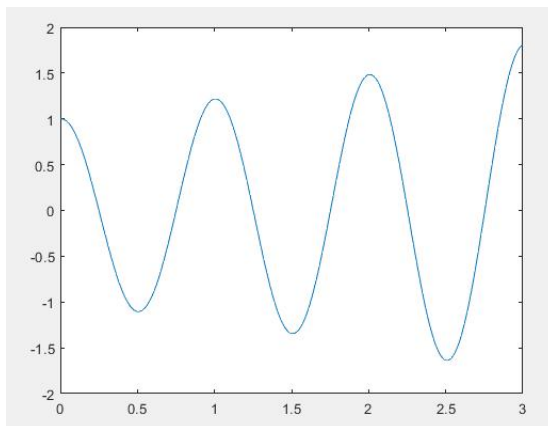


3.2 On choisit $dt=0.01s$

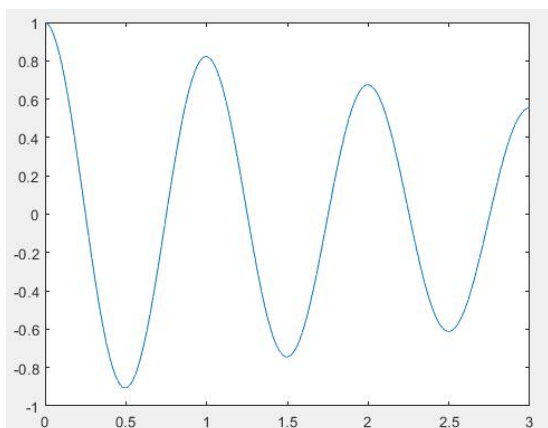
Pour la solution exacte



Pour la solution d'EULER explicite



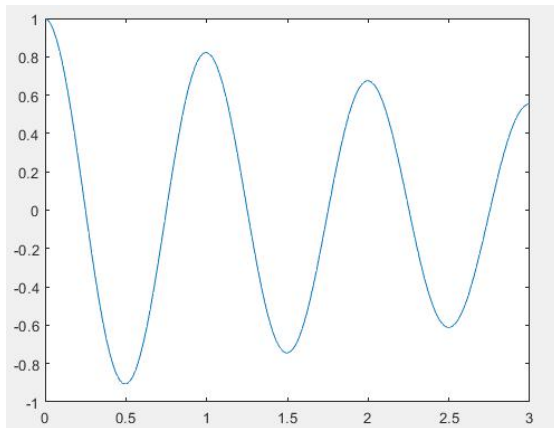
Pour la solution d'EULER implicite



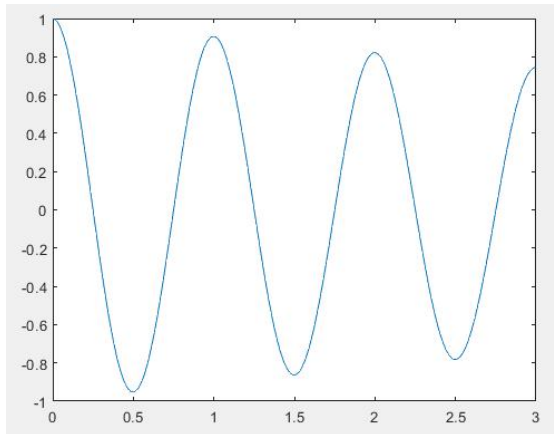
Alors, la solution exacte est stable avec le temps. Par rapport à la solution exacte, la solution d'EULER explicite diverge avec le temps, et la solution d'EULER implicite converge avec le temps.

3.3 On choisit $dt_1=0.01s$; $dt_2=0.005s$; $dt_3=0.001s$, alors

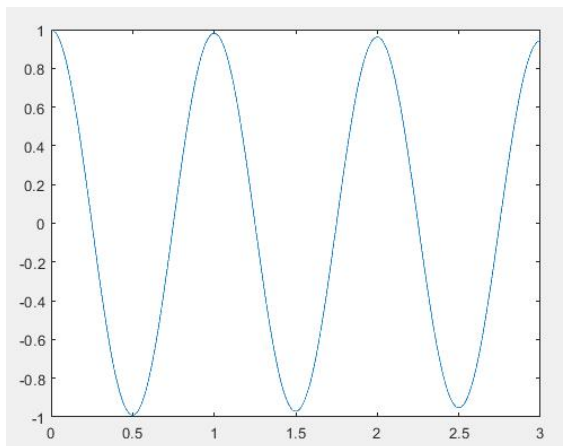
Pour $dt_1=0.01s$, le résultat est



Pour $dt_2=0.005s$, le résultat est



Pour $dt_3=0.001s$, le résultat est

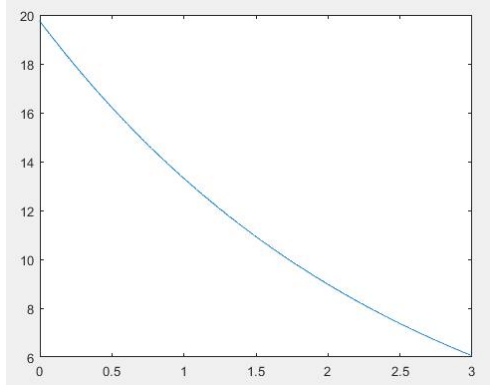


On peut voir que quand dt devient petit, l'atténuation des oscillations est plus faible.

3.4 La solution exacte : $E^* = 2\pi^2 \approx 19.7392$

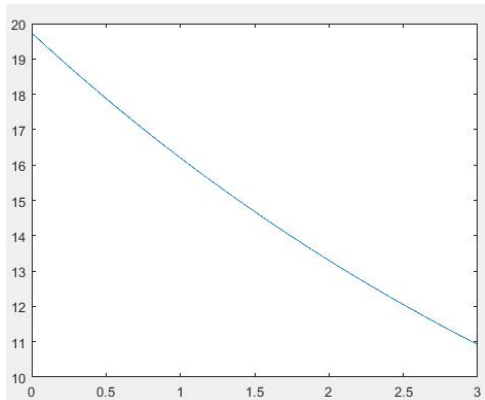
Pour $dt1=0.01s$, le résultat est

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.6616	19.5843	19.5073	19.4306	19.3541	19.2780	19.2022	19.1267	19.0515	18.9766	18.9020	18.8276
2													
3													
4													
5													
6													



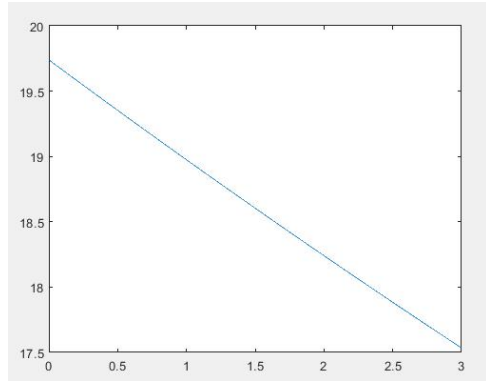
Pour $dt2=0.005s$, le résultat est

E													
1x601 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7197	19.7003	19.6809	19.6615	19.6421	19.6227	19.6034	19.5840	19.5647	19.5454	19.5262	19.5069
2													
3													
4													
5													
6													



Pour $\Delta t = 0.001$ s, le résultat est

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7384	19.7377	19.7369	19.7361	19.7353	19.7345	19.7338	19.7330	19.7322	19.7314	19.7306	19.7299
2													
3													
4													
5													
6													



E^* diminue avec le temps, c'est-à-dire que la convergence avec le temps.

On peut voir que quand Δt devient petit, E^* diminue plus lentement.

3.5 On va calculer les valeurs propres pour $A = \frac{1}{1 + \omega_0^2 \Delta t^2} \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 + \omega_0^2 \Delta t^2) \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{1 \pm i \omega_0 \Delta t}{1 + \omega_0^2 \Delta t^2}$$

$$\Rightarrow \quad |\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2 \Delta t^2}} < 1$$

Donc, la solution numérique est toujours stable.

Question 4

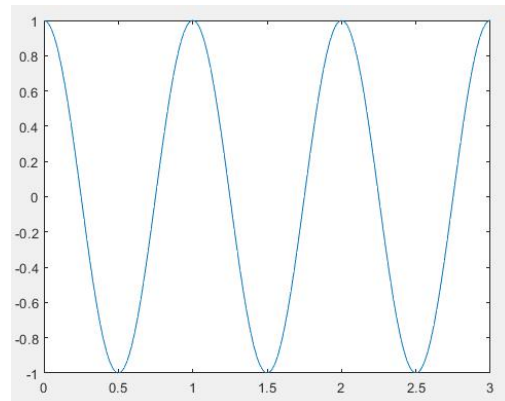
4.1 On suppose que $U = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix}$, et on a $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

$$\text{Donc, on a : } \dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -\omega_0^2 q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} * U$$

C'est une formulation adaptée aux schémas du premier ordre.

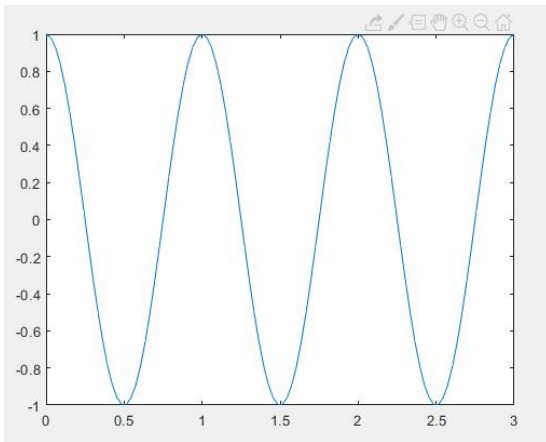
4.2 On choisit $dt=0.01s$

```
clear all;
w0=2*pi;
q0=1;
dq0=0;
T0=3;
dt=0.01;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(1,np);
dq=zeros(1,np);
E=zeros(1,np);
U=[q0;dq0];
q(1)=q0;
dq(1)=dq0;
C=[0 1;-w0c 0];
for inc=2:np
    k1=C*U;
    k2=C*(U+1/2*k1*dt);
    k3=C*(U+1/2*k2*dt);
    k4=C*(U+k3*dt);
    K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    U=U+K*dt;
    q(inc)=U(1);
    dq(inc)=U(2);
end
E=0.5*(dq.*dq+w0c*(q.^2));
figure(1)
plot(t,q)
figure(2)
plot(t,E)
```

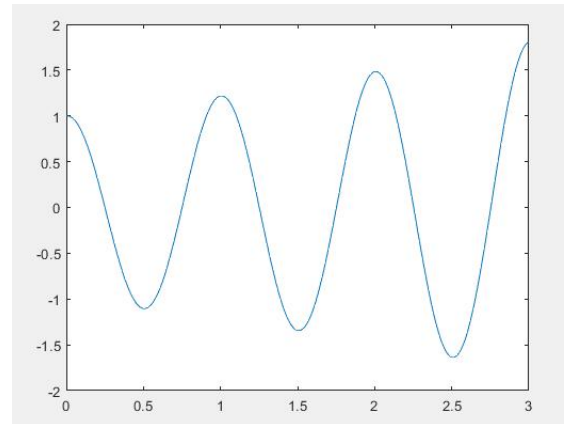


4.3 On va comparer quatre résultats différents :

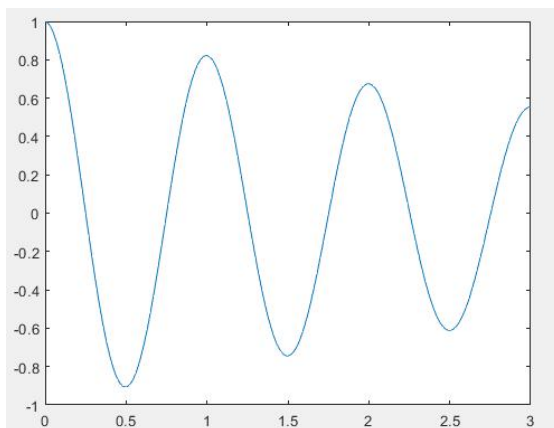
Pour la solution exacte



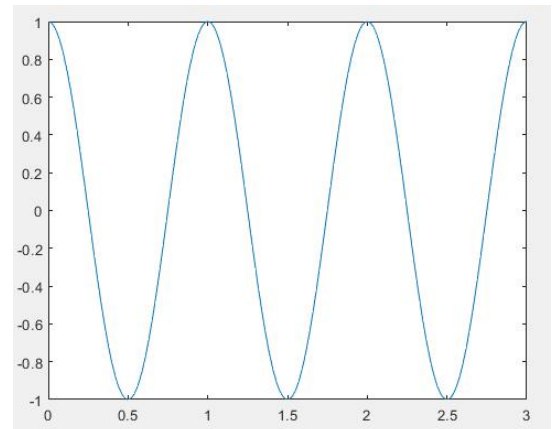
Pour la solution d'EULER explicite



Pour la solution d'EULER implicite



Pour la solution de RUNGE KUTTA



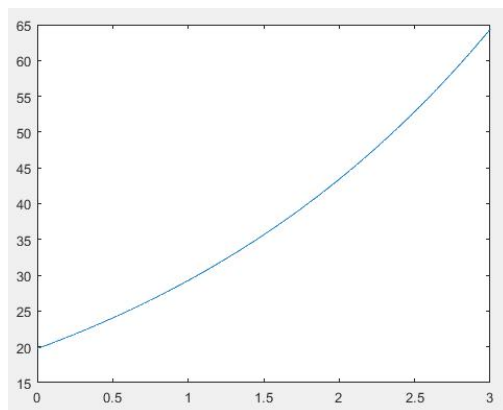
On peut voir que la solution de RUNGE KUTTA est plus précis par rapport à la solution exacte.

4.4 On va comparer quatre résultats différents de E^* :

Pour la solution exacte : $E^* = 2\pi^2 \approx 19.7392$

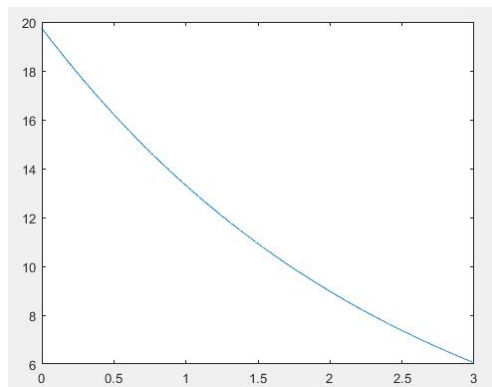
Pour la solution d'EULER explicite

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.8171	19.8954	19.9739	20.0528	20.1319	20.2114	20.2912	20.3713	20.4517	20.5325	20.6135	20.6949
2													
3													
4													
5													
6													



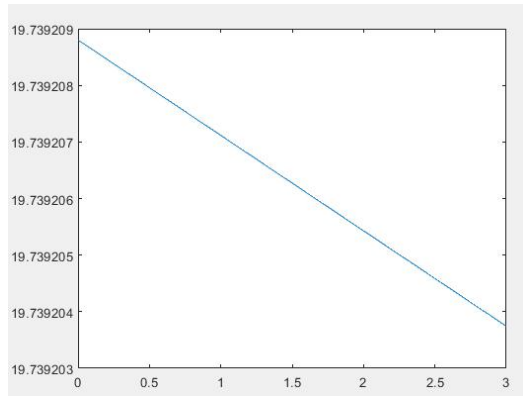
Pour la solution d'EULER implicite

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.6616	19.5843	19.5073	19.4306	19.3541	19.2780	19.2022	19.1267	19.0515	18.9766	18.9020	18.8276
2													
3													
4													
5													
6													



Pour la solution de RUNGE KUTTA

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392
2													
3													
4													
5													
6													



On peut voir que la quantité E^* de RUNGE KUTTA est plus précis par rapport à celle exacte, converge un peu.

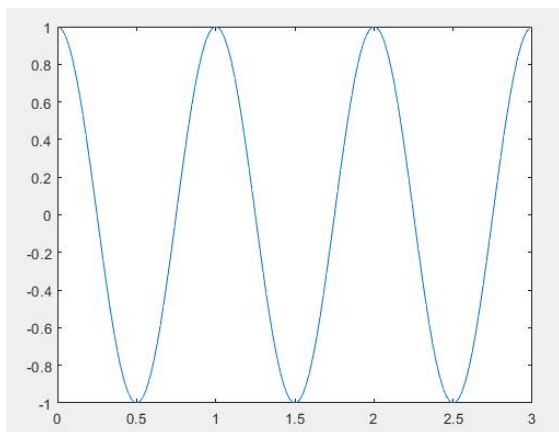
Question 5**5.1.1** J'ai choisi la méthode 1.

```

clear all;
w0=2*pi;
q0=1;
dq0=0;
T0=3;
dt=0.01;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(1,np);
dq=zeros(1,np);
ddq=zeros(1,np);
E=zeros(1,np);
q(1)=q0;
dq(1)=dq0;
ddq(1)=-w0c*q0;
for inc=2:np

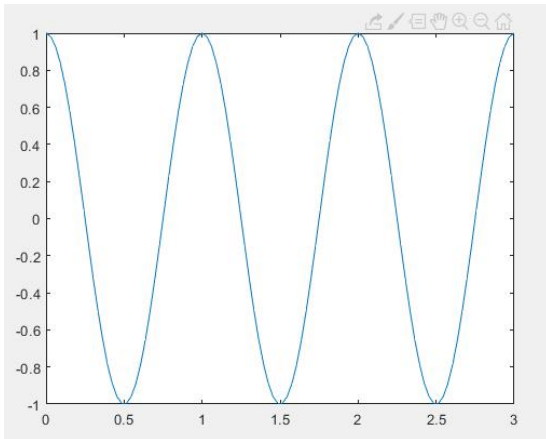
    q(inc)=(q(inc-1)+dt*dq(inc-1)+1/4*dt*dt*ddq(inc-1))/(1+1/4*w0c*dt
    *dt);
    ddq(inc)=-w0c*q(inc);
    dq(inc)=dq(inc-1)+1/2*dt*(ddq(inc-1)+ddq(inc));
end
E=0.5*(dq.*dq+w0c*(q.^2));
figure(1)
plot(t,q)
figure(2)
plot(t,E)

```

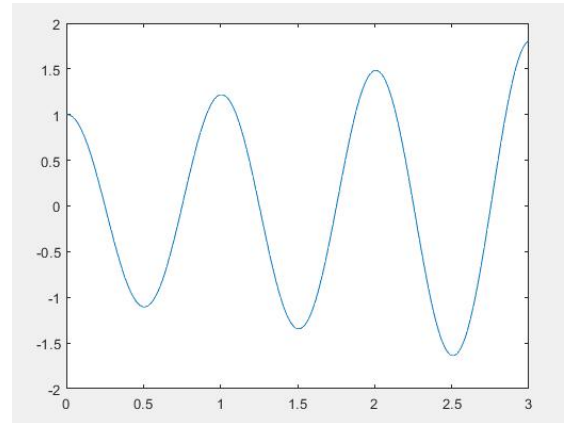


5.1.2 On va comparer cinq résultats différents :

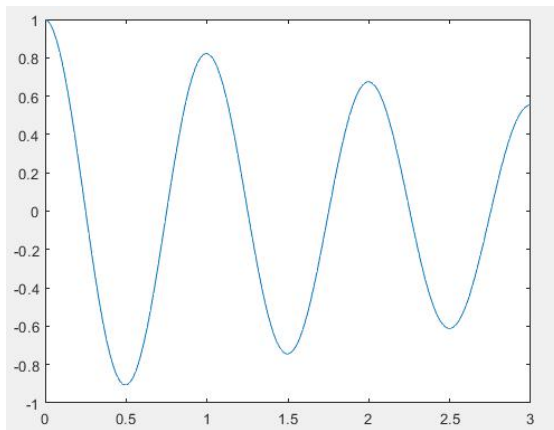
Pour la solution exacte



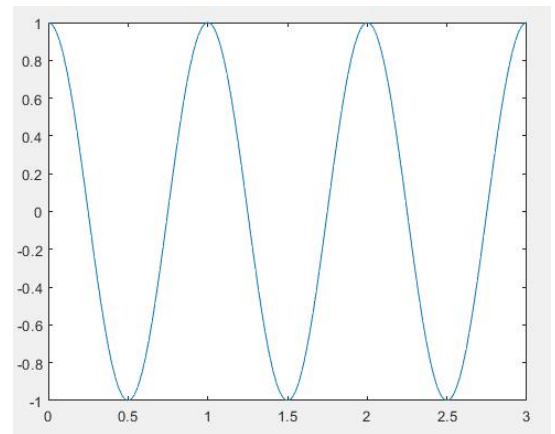
Pour la solution d'EULER explicite



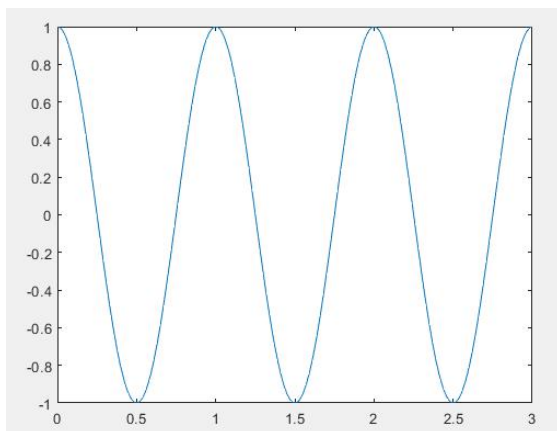
Pour la solution d'EULER implicite



Pour la solution de RUNGE KUTTA



Pour la solution de NEWMARK ($\beta=0.25, \gamma=0.5$)



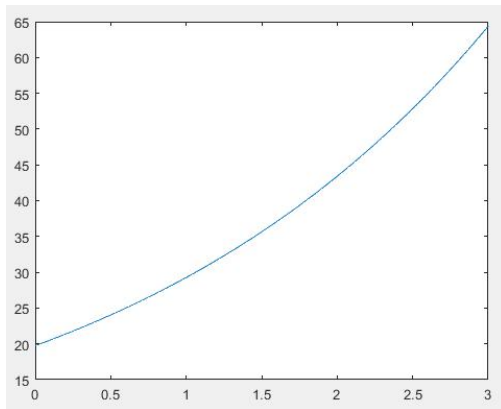
On peut voir que la solution de NEWMARK ($\beta=0.25, \gamma=0.5$) est autant précis que la solution de RUNGE KUTTA.

5.1.3 On va comparer cinq résultats différents de E^* :

Pour la solution exacte : $E^* = 2\pi^2 \approx 19.7392$

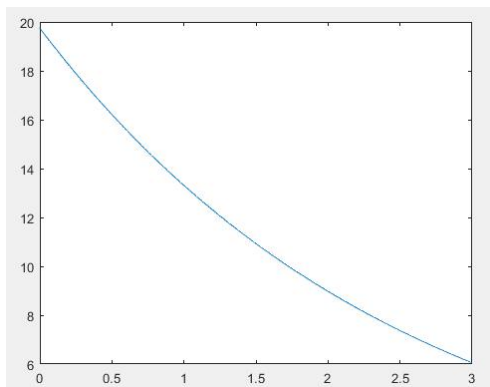
Pour la solution d'EULER explicite

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.8171	19.8954	19.9739	20.0528	20.1319	20.2114	20.2912	20.3713	20.4517	20.5325	20.6135	20.6949
2													
3													
4													
5													
6													



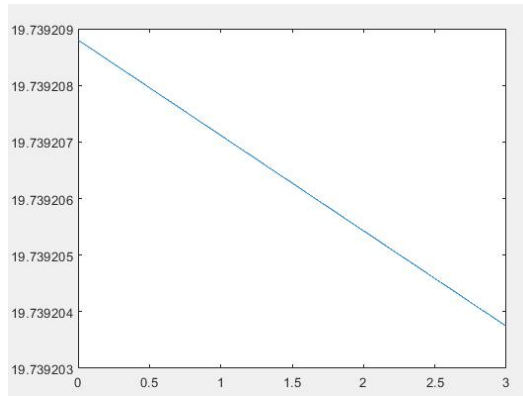
Pour la solution d'EULER implicite

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.6616	19.5843	19.5073	19.4306	19.3541	19.2780	19.2022	19.1267	19.0515	18.9766	18.9020	18.8276
2													
3													
4													
5													
6													



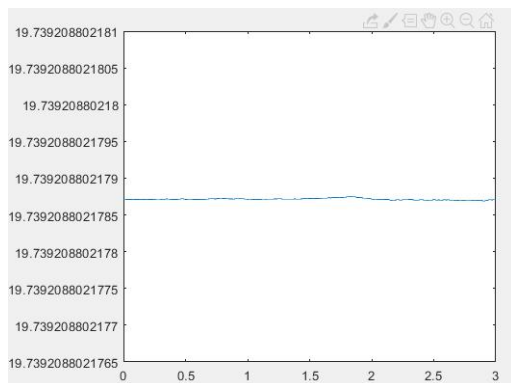
Pour la solution de RUNGE KUTTA

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392
2													
3													
4													
5													
6													



Pour la solution de NEWMARK ($\beta=0.25, \gamma=0.5$)

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392
2													
3													
4													
5													
6													



On peut voir que la quantité E* de NEWMARK ($\beta=0.25, \gamma=0.5$) est plus précis que la quantité E* de RUNGE KUTTA.

5.1.4

```

clear all;
w0=2*pi;
r=0.5;
y=0.25;
dt=(0:0.001:1);
np=size(dt,2);
m=zeros(1,np);
n=zeros(1,np);
l=zeros(2,np);
for inc=1:np
t=dt(inc);
B=[1+y*t*t*w0*w0 0;r*t*w0*w0 1];
C=[1-(0.5-y)*t*t*w0*w0 t;-(1-r)*t*w0*w0 1];
A=inv(B)*C;
[V D]=eig(A);
m(inc)=D(1,1);
n(inc)=D(2,2);
l(1,inc)=abs(m(inc));
l(2,inc)=abs(n(inc));
end
m;
n;
l;
plot(dt,l)
    
```

Donc, les valeurs propres sont : m et n; le module est l.

les valeurs propres :

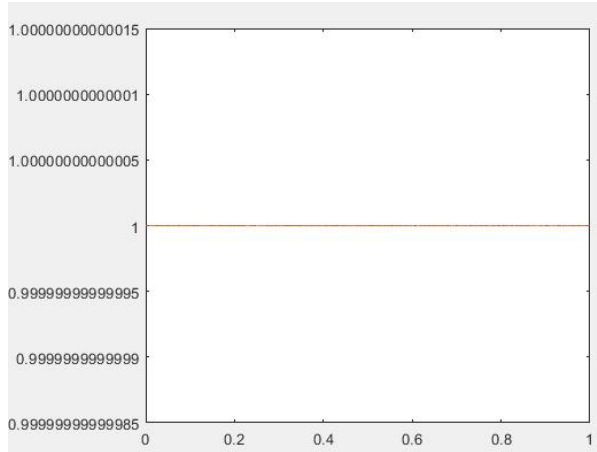
The image shows two screenshots of MATLAB variable viewers. The top one is for variable 'm' and the bottom one is for variable 'n'. Both show a 1x1001 array of complex double values. The first row of each viewer shows the values for the first 13 time steps.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	1.0000 + 0i	1.0000 + 0i	0.9999 + 0i	0.9998 + 0i	0.9997 + 0i	0.9995 + 0i	0.9993 + 0i	0.9990 + 0i	0.9987 + 0i	0.9984 + 0i	0.9980 + 0i	0.9976 + 0i	0.9972 + 0i
n	1.0000 + 0i	1.0000 - 0i	0.9999 - 0i	0.9998 - 0i	0.9997 - 0i	0.9995 - 0i	0.9993 - 0i	0.9990 - 0i	0.9987 - 0i	0.9984 - 0i	0.9980 - 0i	0.9976 - 0i	0.9972 - 0i

Le module est :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1.0000	1	1	1	1.0000	1	1.0000	1.0000	1	1	1.0000	1.0000
2	1	1.0000	1	1	1	1.0000	1	1.0000	1.0000	1	1	1.0000	1.0000
3													

	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001
1	1	1.0000	1	1	1.0000	1	1.0000	1	1.0000	1	1	1.0000	1
2	1	1.0000	1	1	1.0000	1	1.0000	1	1.0000	1	1	1.0000	1
3													



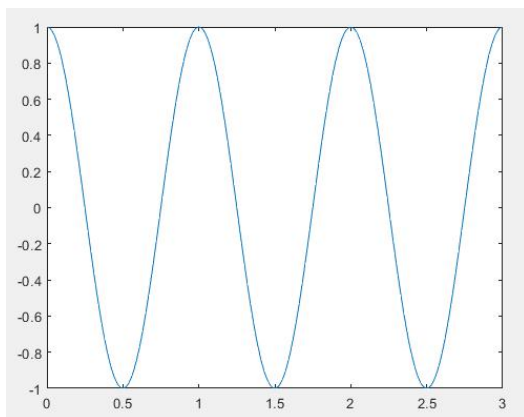
On peut voir que les deux modules sont toujours 1, donc la solution est toujours stable.

5.2.1 J'ai choisi la méthode 1.

```

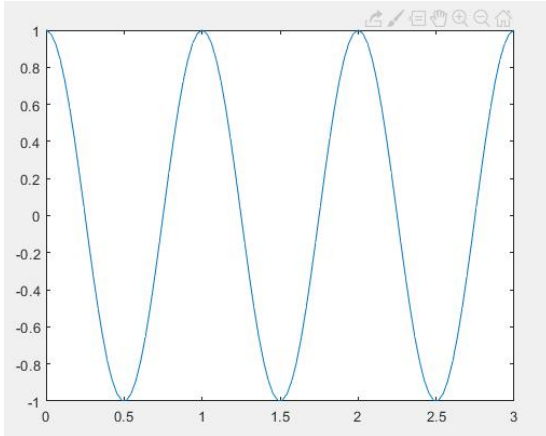
clear all;
w0=2*pi;
q0=1;
dq0=0;
T0=3;
dt=0.01;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(1,np);
dq=zeros(1,np);
ddq=zeros(1,np);
E=zeros(1,np);
q(1)=q0;
dq(1)=dq0;
ddq(1)=-w0c*q0;
for inc=2:np
    q(inc)=q(inc-1)+dt*dq(inc-1)+1/2*dt*dt*ddq(inc-1);
    ddq(inc)=-w0c*q(inc);
    dq(inc)=dq(inc-1)+1/2*dt*(ddq(inc-1)+ddq(inc));
end
E=0.5*(dq.*dq+w0c*(q.^2));
plot(t,q)

```

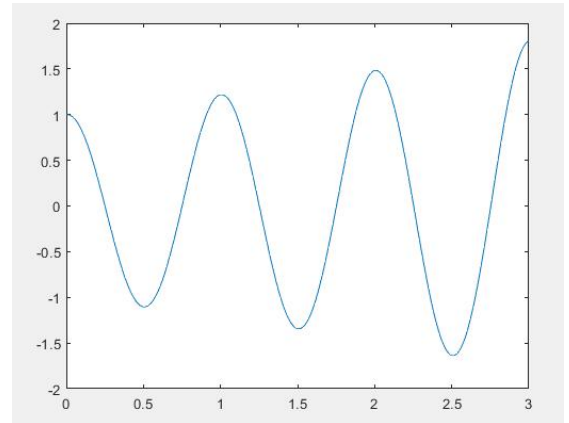


5.2.2 On va comparer six résultats différents :

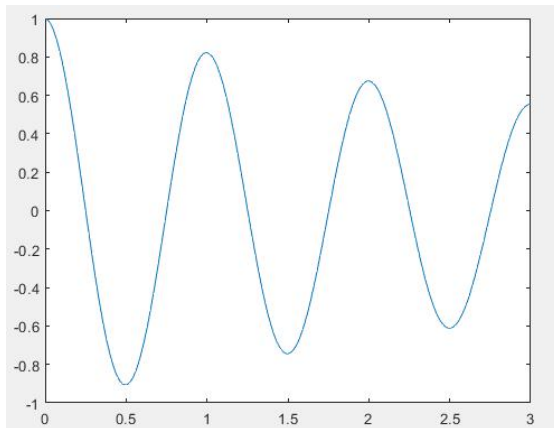
Pour la solution exacte



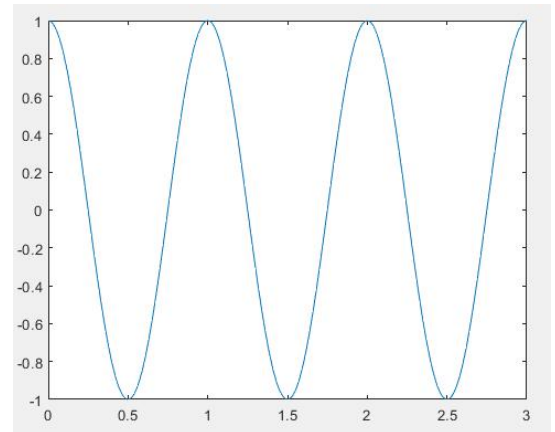
Pour la solution d'EULER explicite



Pour la solution d'EULER implicite

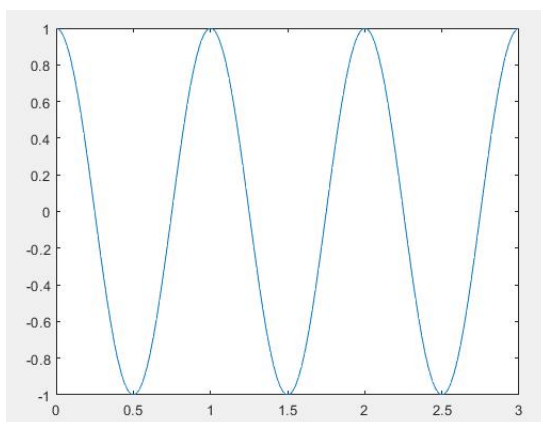


Pour la solution de RUNGE KUTTA

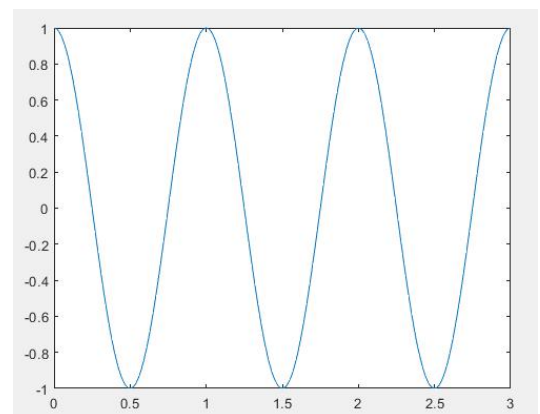


Pour la solution de NEWMARK

($\beta=0.25, \gamma=0.5$)



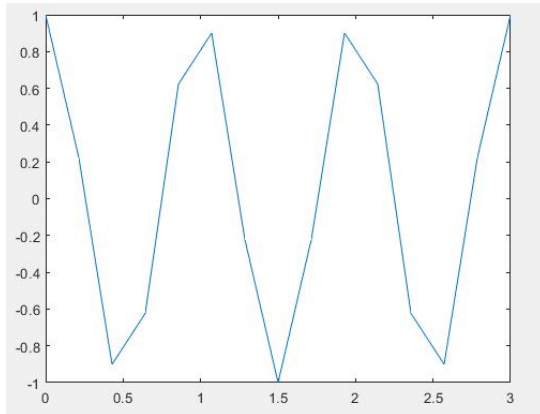
($\beta=0, \gamma=0.5$)



On peut voir que la solution de NEWMARK ($\beta=0, \gamma=0.5$) est autant précis que la solution de RUNGE KUTTA et la solution de NEWMARK ($\beta=0.25, \gamma=0.5$).

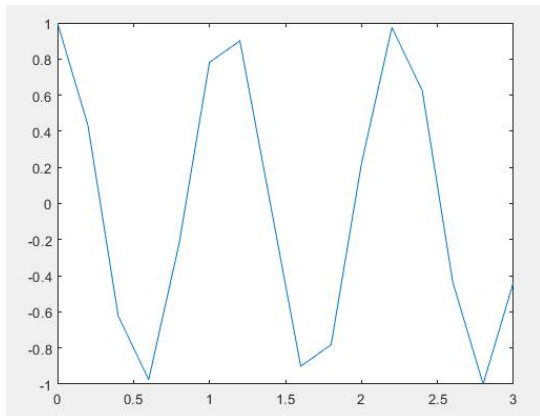
5.2.3 Pour $dt=0.2s$:

Pour la solution exacte

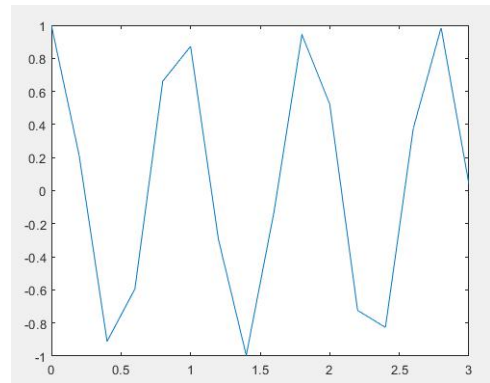


Pour la solution de NEWMARK

($\beta=0.25$, $\gamma=0.5$)



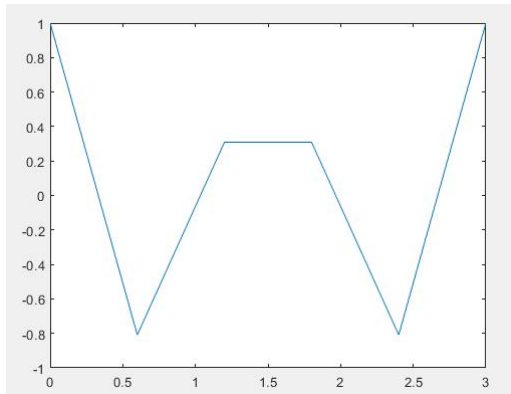
($\beta=0$, $\gamma=0.5$)



On peut voir que la solution de NEWMARK ($\beta=0$, $\gamma=0.5$) est plus précise que la solution de NEWMARK ($\beta=0.25$, $\gamma=0.5$) quand $dt=0.2s$.

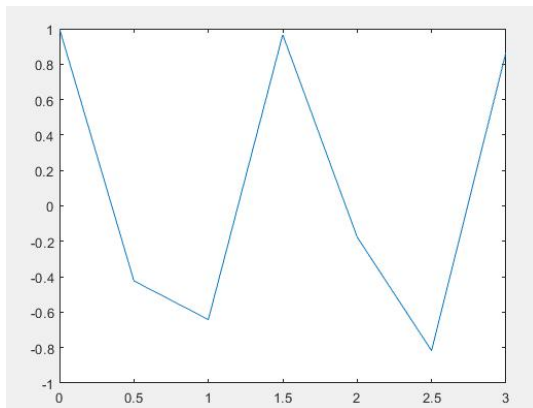
Pour $dt=0.5s$:

Pour la solution exacte

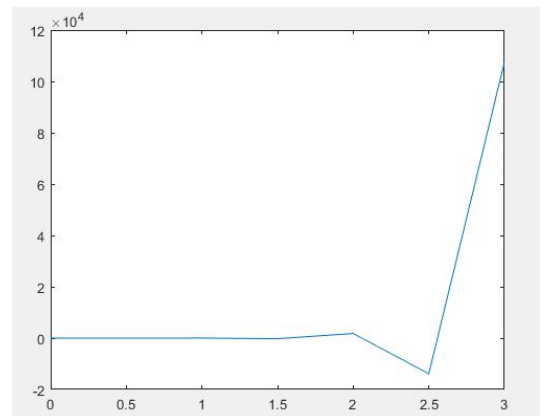


Pour la solution de NEWMARK

($\beta=0.25$, $\gamma=0.5$)



($\beta=0$, $\gamma=0.5$)



On peut voir que la solution de NEWMARK ($\beta=0.25$, $\gamma=0.5$) est plus précis que la solution de NEWMARK ($\beta=0$, $\gamma=0.5$) quand $dt=0.5s$.

5.2.4

```

clear all;
w0=2*pi;
r=0.5;
y=0;
dt=(0:0.001:3);
np=size(dt,2);
m=zeros(1,np);
n=zeros(1,np);
l=zeros(2,np);
for inc=1:np
t=dt(inc);
B=[1+y*t*t*w0*w0 0;r*t*w0*w0 1];
C=[1-(0.5-y)*t*t*w0*w0 t;-(1-r)*t*w0*w0 1];
A=inv(B)*C;
[V D]=eig(A);
m(inc)=D(1,1);
n(inc)=D(2,2);
l(1,inc)=abs(m(inc));
l(2,inc)=abs(n(inc));
end
m;
n;
l;
plot(dt,l(1,:), 'r')
hold on
plot(dt,l(2,:), 'b')

```

Donc, les valeurs propres sont : m et n; le module est l.

les valeurs propres :

m													
1x3001 complex double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1.0000 + 0...	1.0000 + 0...	0.9999 + 0...	0.9998 + 0...	0.9997 + 0...	0.9995 + 0...	0.9993 + 0...	0.9990 + 0...	0.9987 + 0...	0.9984 + 0...	0.9980 + 0...	0.9976 + 0...	0.9972 + 0...
2													
3													
4													
5													
6													

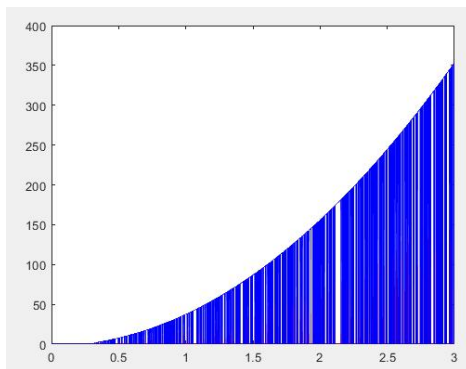
n													
1x3001 complex double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1.0000 + 0...	1.0000 - 0...	0.9999 - 0...	0.9998 - 0...	0.9997 - 0...	0.9995 - 0...	0.9993 - 0...	0.9990 - 0...	0.9987 - 0...	0.9984 - 0...	0.9980 - 0...	0.9976 - 0...	0.9972 - 0...
2													
3													
4													
5													
6													

Le module est :

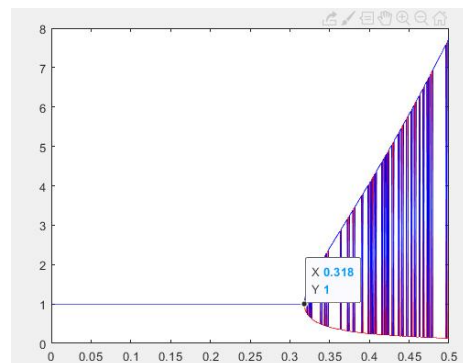
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1.0000	1	1.0000	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1.0000	1	1.0000	1	1	1	1	1	1	1	1
3													

	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326
1	1.0000	1.0000	1.0000	1	1.0000	1.0000	0.8766	0.8138	0.7712	1.3556	0.7097	0.6855	0.6641
2	1.0000	1.0000	1.0000	1	1.0000	1.0000	1.1407	1.2288	1.2967	0.7377	1.4090	1.4588	1.5058
3													

	2989	2990	2991	2992	2993	2994	2995	2996	2997	2998	2999	3000	3001
1	0.0029	0.0029	0.0028	0.0028	351.4105	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	352.5927	352.8293	0.0028	0.0028
2	350.4661	350.7021	350.9382	351.1743	0.0028	351.6468	351.8831	352.1196	352.3561	0.0028	0.0028	353.0661	353.3029
3													



dt=(0:0.001:3)



dt=(0:0.001:0.5)

On peut voir que avant 0.318s, les deux modules sont toujours 1, donc la solution est toujours stable quand $\Delta t \leq 0.318s$.

Si $\Delta t > 0.318s$, il existe un module supérieur à 1 par les deux modules, donc la solution est instable.

Donc, le pas de temps critique est $\Delta t_c = 0.318s$.

Et on a $\Delta t_c = \alpha * \frac{2}{\omega_0}$; alors $\alpha = \pi \Delta t_c = 0.999026 \approx 1$.

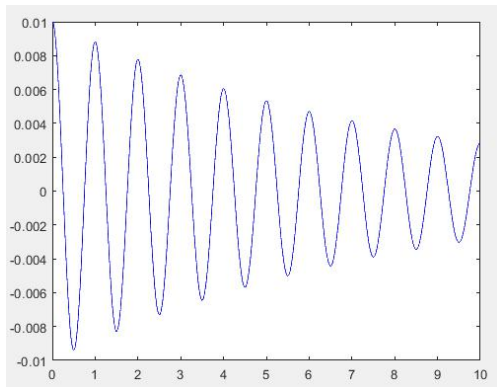
Exercice 2 Oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté

1.1 on a l'équation du mouvement : $\ddot{x} + 2\varepsilon\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (21)

La solution est dans la forme $x(t) = e^{-\varepsilon\omega_0 t} \left(x_0 \cos \Omega t + \frac{\varepsilon\omega_0 x_0 + \dot{x}_0}{\Omega} \sin \Omega t \right)$ avec $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

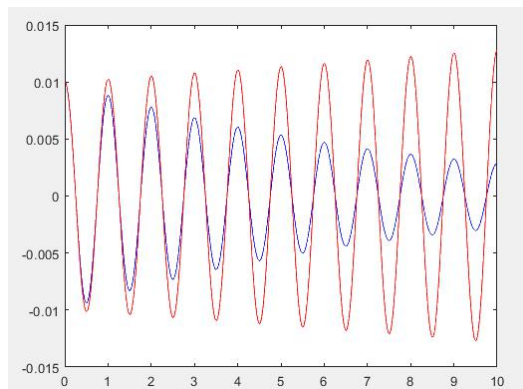
Et on a les conditions initiales: $\omega_0 = 2\pi \text{rad/s}$; $x_0 = 0.01\text{s}$; $\dot{x}_0 = 0\text{m/s}$; $\varepsilon = 0.02$

```
clear all;
w0=2*pi;
x0=0.01;
dx0=0;
T0=1;
e=0.02;
w0c=w0*w0;
omega=w0*sqrt(1-e*e);
te=linspace(0,10*T0,3000);
xe=exp(-e*w0*te).*(x0*cos(omega*te)+sin(omega*te)*(e*w0*x0+dx0)/omega);
;
plot(te,xe,'b')
```



1.1(a) on choisit $\Delta t = 1.2 * \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$

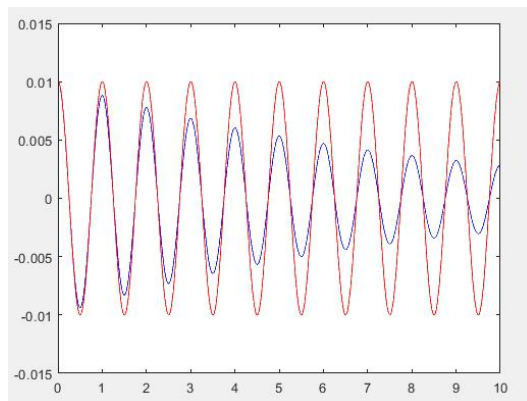
```
clear all;
w0=2*pi;
x0=0.01;
dx0=0;
T0=1;
e=0.02;
dte=2*e/w0;
dt=1.2*dte;
w0c=w0*w0;
omega=w0*sqrt(1-e*e);
te=linspace(0,10*T0,3000);
xe=exp(-e*w0*te).*(x0*cos(omega*te)+sin(omega*te)*(e*w0*x0+dx0)/omega);
;
t=(0:dt:10*T0);
np=size(t,2);
x=zeros(1,np);
dx=zeros(1,np);
ddx=zeros(1,np);
x(1)=x0;
dx(1)=dx0;
ddx(1)=-w0c*x(1)-2*e*w0*dx(1);
for inc=2:np
x(inc)=x(inc-1)+dt*dx(inc-1);
dx(inc)=dx(inc-1)+dt*ddx(inc-1);
ddx(inc)=-w0c*x(inc)-2*e*w0*dx(inc);
end
plot(te,xe,'b')
hold on
plot(t,x,'r')
```



On peut voir que la solution d'EULER explicite est instable et divergente avec le temps. La solution d'EULER explicite n'est pas précis par rapport à la solution exacte.

1.1(b) on choisit $\Delta t = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$

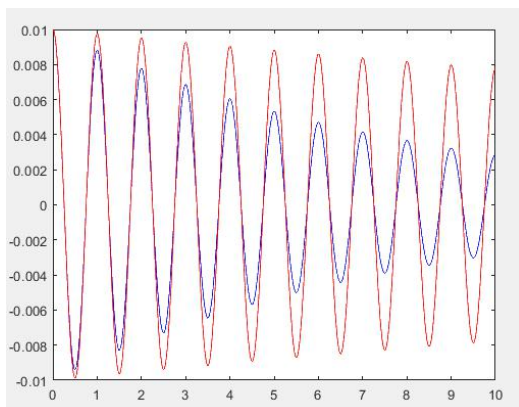
```
clear all;
w0=2*pi;
x0=0.01;
dx0=0;
T0=1;
e=0.02;
dtc=2*e/w0;
dt=dtc;
w0c=w0*w0;
omega=w0*sqrt(1-e*e);
te=linspace(0,10*T0,3000);
xe=exp(-e*w0*te).*(x0*cos(omega*te)+sin(omega*te)*(e*w0*x0+dx0)/omega);
;
t=(0:dt:10*T0);
np=size(t,2);
x=zeros(1,np);
dx=zeros(1,np);
ddx=zeros(1,np);
x(1)=x0;
dx(1)=dx0;
ddx(1)=-w0c*x(1)-2*e*w0*dx(1);
for inc=2:np
x(inc)=x(inc-1)+dt*dx(inc-1);
dx(inc)=dx(inc-1)+dt*ddx(inc-1);
ddx(inc)=-w0c*x(inc)-2*e*w0*dx(inc);
end
plot(te,xe,'b')
hold on
plot(t,x,'r')
```



On peut voir que la solution d'EULER explicite est quasi stable. La solution d'EULER explicite n'est pas précis par rapport à la solution exacte.

1.1(c) on choisit $\Delta t = 0.8 * \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$

```
clear all;
w0=2*pi;
x0=0.01;
dx0=0;
T0=1;
e=0.02;
dte=2*e/w0;
dt=0.8*dte;
w0c=w0*w0;
omega=w0*sqrt(1-e*e);
te=linspace(0,10*T0,3000);
xe=exp(-e*w0*te).*(x0*cos(omega*te)+sin(omega*te)*(e*w0*x0+dx0)/omega);
;
t=(0:dt:10*T0);
np=size(t,2);
x=zeros(1,np);
dx=zeros(1,np);
ddx=zeros(1,np);
x(1)=x0;
dx(1)=dx0;
ddx(1)=-w0c*x(1)-2*e*w0*dx(1);
for inc=2:np
x(inc)=x(inc-1)+dt*dx(inc-1);
dx(inc)=dx(inc-1)+dt*ddx(inc-1);
ddx(inc)=-w0c*x(inc)-2*e*w0*dx(inc);
end
plot(te,xe,'b')
hold on
plot(t,x,'r')
```



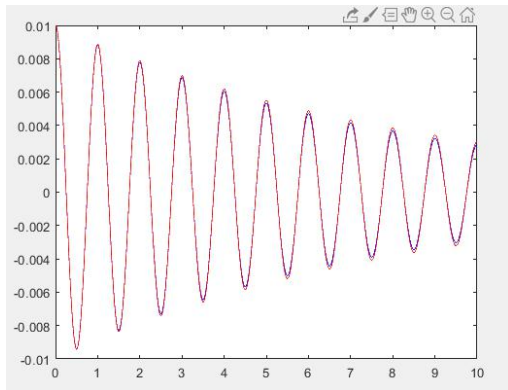
On peut voir que la solution d'EULER explicite est stable et convergente avec le temps. La solution d'EULER explicite n'est pas précise suffisante par rapport à la solution exacte.

1.1(d)

Comparer l'erreur entre le résultat obtenu et le résultat exacte en amplitude et en période.

On essaye les valeurs différentes du rapport $\Delta t / \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$. Finalement, on trouve le résultat.

À partir de la valeur de 0.05, la solution d'EULER explicite est précise suffisante par rapport à la solution exacte.



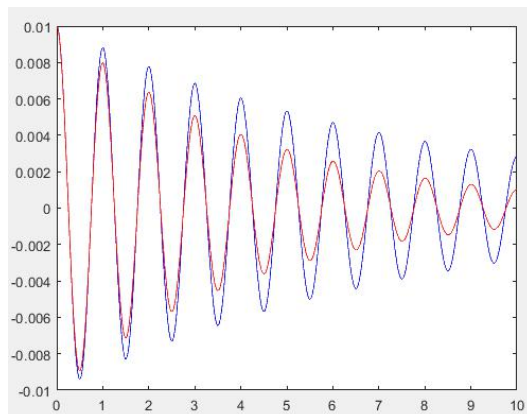
$$\Delta t = 0.05 * \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

1.2

```

clear all;
w0=2*pi;
x0=0.01;
dx0=0;
T0=1;
e=0.02;
dtc=2*e/w0;
dt=0.8*dtc;
w0c=w0*w0;
omega=w0*sqrt(1-e*e);
te=linspace(0,10*T0,3000);
xe=exp(-e*w0*te).*(x0*cos(omega*te)+sin(omega*te)*(e*w0*x0+dx0)/omega);
;
t=(0:dt:10*T0);
np=size(t,2);
x=zeros(1,np);
dx=zeros(1,np);
ddx=zeros(1,np);
x(1)=x0;
dx(1)=dx0;
ddx(1)=-w0c*x(1)-2*e*w0*dx(1);
for inc=2:np
dx(inc)=(dx(inc-1)-w0c*dt*x(inc-1))/(1+2*e*w0*dt+w0c*dt*dt);
x(inc)=x(inc-1)+dt*dx(inc);
ddx(inc)=-w0c*x(inc)-2*e*w0*dx(inc);
end
plot(te,xe,'b')
hold on
plot(t,x,'r')

```



On peut voir que la solution d'EULER implicite est convergente avec le temps. La solution d'EULER implicite n'est pas précise suffisante par rapport à la solution exacte.

On va calculer la matrice d'amplitude A

$$\begin{bmatrix} x_{j+1} \\ \bullet \\ x_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_j \\ \bullet \\ x_j \end{bmatrix} + \Delta t * \begin{bmatrix} \bullet \\ x_{j+1} \\ \bullet \\ x_{j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + 2\varepsilon\omega_0\Delta t + \omega_0^2\Delta t^2} \begin{bmatrix} 1 + 2\varepsilon\omega_0\Delta t & \Delta t \\ -\omega_0^2\Delta t & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_j \\ \bullet \\ x_j \end{bmatrix}$$

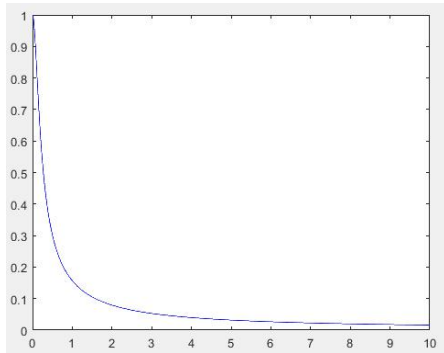
Donc, la matrice d'amplitude A est $A = \frac{1}{1 + 2\varepsilon\omega_0\Delta t + \omega_0^2\Delta t^2} \begin{bmatrix} 1 + 2\varepsilon\omega_0\Delta t & \Delta t \\ -\omega_0^2\Delta t & 1 \end{bmatrix}$

Ensuite, on va calculer les valeurs propres de la matrice d'amplitude A

```
clear all;
w0=2*pi;
x0=0.01;
dx0=0;
T0=1;
e=0.02;
w0c=w0*w0;
dt=(0:0.001:10*T0);
np=size(dt,2);
m=zeros(1,np);
n=zeros(1,np);
l=zeros(2,np);
for inc=1:np
t=dt(inc);
A=1/(1+2*e*w0*t+w0c*t*t)*[1+2*e*w0*t t;-w0c*t 1];
[V D]=eig(A);
m(inc)=D(1,1);
n(inc)=D(2,2);
l(1,inc)=abs(m(inc));
l(2,inc)=abs(n(inc));
end
m;
n;
l;
plot(dt,l(1,:), 'r')
hold on
plot(dt,l(2,:), 'b')
```

2x10001 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	0.9999	0.9997	0.9994	0.9992	0.9989	0.9985	0.9982	0.9977	0.9973	0.9968	0.9963	0.9957
2	1	0.9999	0.9997	0.9994	0.9992	0.9989	0.9985	0.9982	0.9977	0.9973	0.9968	0.9963	0.9957

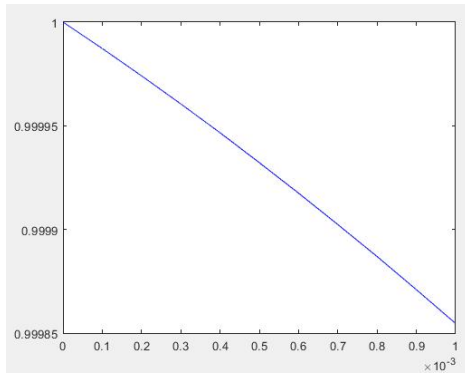
2x10001 double													
	9989	9990	9991	9992	9993	9994	9995	9996	9997	9998	9999	10000	10001
1	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159
2	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159



On peut voir que Δt_c est entre 0s et 0.001s. Donc, on va calculer plus finement.

```
dt=(0:0.0001:0.001);
```

2x11 double												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	1	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	
2	1	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	



On peut voir que quand $\Delta t > 0s$, le module est toujours inférieur à 1. Donc, la solution d'EULER implicite est toujours stable. Quand $\Delta t = 0s$, le module est égal à 1, la solution d'EULER implicite est instable.

Donc, le pas de temps critique est $\Delta t_c = 0s$

1.3 On suppose que $U = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ x \end{pmatrix}$, et on a $\ddot{x} + 2\varepsilon\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

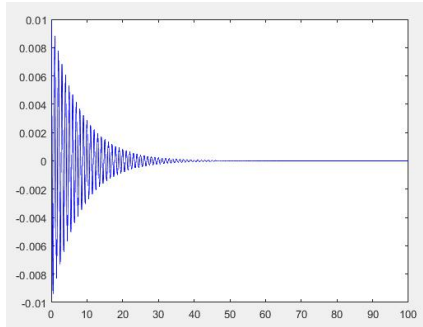
$$\text{Donc, on a : } \dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -\omega_0^2 x - 2\varepsilon\omega_0 \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\varepsilon\omega_0 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\varepsilon\omega_0 \end{bmatrix} * U$$

C'est une formulation adaptée aux schémas du premier ordre.

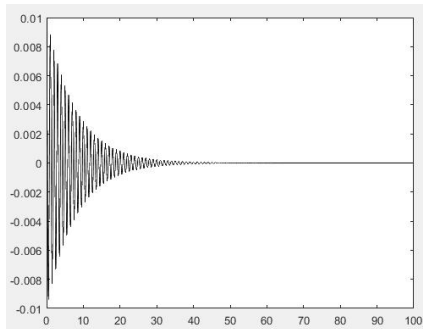
```
clear all;
w0=2*pi;
x0=0.01;
dx0=0;
T0=1;
e=0.02;
h=0.04;
dt=h*2*sqrt(2)/w0;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:100*T0);
np=size(t,2);
x=zeros(1,np);
dx=zeros(1,np);
U=[x0;dx0];
C=[0 1;-w0c -2*e*w0];
x(1)=x0;
dx(1)=dx0;
for inc=2:np
    k1=C*U;
    k2=C*(U+1/2*k1*dt);
    k3=C*(U+1/2*k2*dt);
    k4=C*(U+k3*dt);
    K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    U=U+K*dt;
    x(inc)=U(1);
    dx(inc)=U(2);
end
plot(t,x,'k')
```

1.3(a) on choisit $h_1=0.04$; $h_2=0.96$; $h_3=1.04$

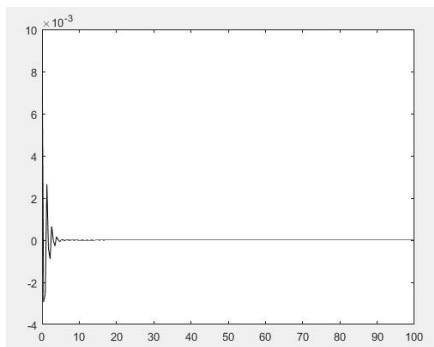
La solution exacte



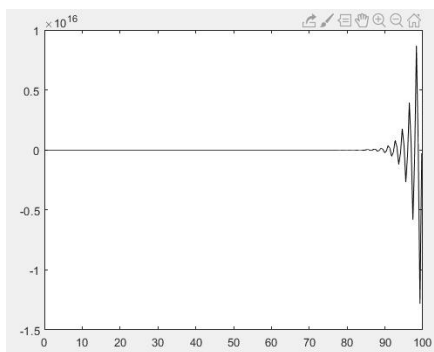
Pour $h_1=0.04$,



Pour $h=0.96$,



Pour $h=1.04$,



On peut voir que quand h augmente, la précision diminue. Et la stabilité augmente d'abord et diminue ensuite.

1.3(b)

On sait que quand h augmente, la stabilité augmente d'abord et diminue ensuite. Donc, h_c est entre $h_2=0.96$ et $h_3=1.04$. On essaye les valeurs de h entre 0.96 et 1.04, finalement, on peut obtenir $1.013 < h_c < 1.014$, donc, on choisit $h_c \approx 1.0135$

Alors, la valeur approximative du pas de temps critique est $\Delta t_c = h_c * \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} = 0.456s$

Exercice 3 Double pendule avec l'hypothèse des petits mouvements

On suppose que $q = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$, alors, L'équation du mouvement est :

$$Xm \ddot{q} + \omega_0^2 Xk q = F_0 \sin(\omega t) / (ma) * \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ avec } Xm = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad Xk = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \omega_0^2 = g/a$$

Alors, on peut obtenir :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 M q = F_0 \sin(\omega t) / (ma) * \begin{pmatrix} (\sqrt{2}-1)/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}; \quad \text{avec } M = Xm^{-1} * Xk = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

On sait que

$$\begin{aligned} q_{j+1} &= q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} &= \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j + \gamma \Delta t \ddot{q}_{j+1} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{bmatrix} I_2 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 [M] & 0 \\ \gamma \Delta t \omega_0^2 [M] & I_2 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} + \frac{F_0 \sin(\omega t_{j+1})}{ma} \begin{pmatrix} -\beta \Delta t^2 f \\ -\gamma \Delta t f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 - \Delta t^2 \omega_0^2 (\frac{1}{2} - \beta) [M] & \Delta t I_2 \\ -(1-\gamma) \Delta t \omega_0^2 [M] & I_2 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} + \frac{F_0 \sin(\omega t_j)}{ma} \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} - \beta) \Delta t^2 f \\ (1-\gamma) \Delta t f \end{pmatrix}$$

avec $f = \begin{pmatrix} (\sqrt{2}-1)/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow [B] * \begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = [C] * \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} + \frac{F_0}{ma} \begin{pmatrix} (\sin(\omega t_j) \Delta t^2 (\frac{1}{2} - \beta) + \sin(\omega t_{j+1}) \beta \Delta t^2) f \\ (\sin(\omega t_j) \Delta t (1 - \gamma) + \sin(\omega t_{j+1}) \gamma \Delta t) f \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = [B]^{-1} * [C] * \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} + [B]^{-1} * \frac{F_0}{ma} \begin{pmatrix} (\sin(\omega t_j) \Delta t^2 (\frac{1}{2} - \beta) + \sin(\omega t_{j+1}) \beta \Delta t^2) f \\ (\sin(\omega t_j) \Delta t (1 - \gamma) + \sin(\omega t_{j+1}) \gamma \Delta t) f \end{pmatrix}$$

Alors, la matrice d'amplification est :

$$A = B^{-1} * C = \begin{bmatrix} (I_2 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 [M])^{-1} * (I_2 - (\frac{1}{2} - \beta) \Delta t^2 \omega_0^2 [M]) & \Delta t (I_2 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 [M])^{-1} \\ -\gamma \Delta t \omega_0^2 [M] * (I_2 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 [M])^{-1} * (I_2 - (\frac{1}{2} - \beta) \Delta t^2 \omega_0^2 [M]) - (1-\gamma) \omega_0^2 \Delta t [M] & (I_2 - \gamma \Delta t^2 \omega_0^2 [M]) * (I_2 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 [M])^{-1} \end{bmatrix}$$

Question 1

1.1 Pour $\beta = 0$; $\gamma = 0.5$

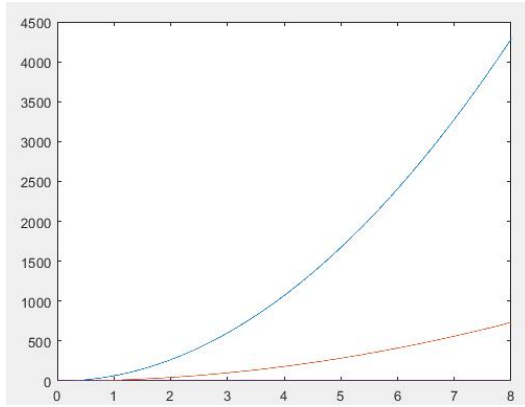
$$A = \begin{bmatrix} I_2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 \Delta t^2 [M] & \Delta t I_2 \\ -\frac{1}{2} \omega_0^2 \Delta t [M] * (2I_2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 \Delta t^2 [M]) & I_2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 \Delta t^2 [M] \end{bmatrix}$$

1.2

```

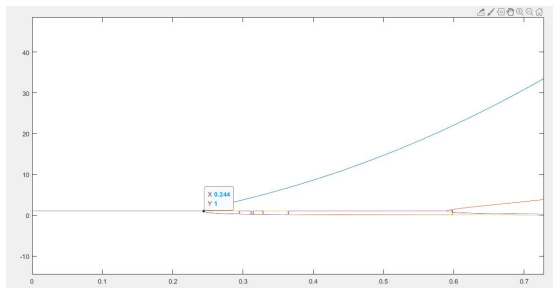
clear all;
g=9.81;
a=0.5;
m=2;
F0=20;
w=2*pi;
q0=[0;0];
dq0=[-1.31519275;-1.85996342];
w0c=g/a;
T0=8;
M=[2 -1;-2 2];
I=[1 0;0 1];
dt=(0:0.001:T0);
np=size(dt,2);
m1=zeros(1,np);
m2=zeros(1,np);
m3=zeros(1,np);
m4=zeros(1,np);
l=zeros(4,np);
for inc=1:np
t=dt(inc);
A=[I-0.5*w0c*t*t*M t*I;-0.5*w0c*t*M*(2*I-0.5*w0c*t*t*M)
I-0.5*w0c*t*t*M];
[V D]=eig(A);
m1(inc)=D(1,1);
m2(inc)=D(2,2);
m3(inc)=D(3,3);
m4(inc)=D(4,4);
l(1,inc)=abs(m1(inc));
l(2,inc)=abs(m2(inc));
l(3,inc)=abs(m3(inc));
l(4,inc)=abs(m4(inc));
end
m1;
m2;
m3;
m4;
l;
plot(dt,l)

```



On peut voir que Δt_c est entre 0s et 1s. Donc, on va calculer plus finement.

`dt=(0:0.001:1);`



Alors, on peut voir que $\Delta t_c = 0.244s$.

1.3 La relation entre q_0 , \dot{q}_0 et \ddot{q}_0 est :

$$q_0 = -\omega_0^2 [M] q_0 \quad \text{car} \quad \sin(\omega t_0) = 0$$

1.4 Les trois relations du schéma de NEWMARK sont :

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{q}_n$$

$$\ddot{q}_{n+1} = -\omega_0^2 [M] q_{n+1} + \frac{F_0 \sin(\omega t_{n+1})}{ma} \begin{pmatrix} (\sqrt{2}-1)/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

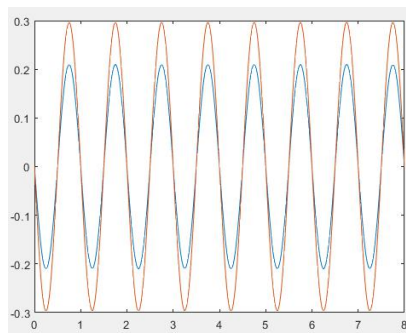
$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{q}_n + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{q}_{n+1}$$

1.5

```

clear all;
g=9.81;
a=0.5;
m=2;
F0=20;
w=2*pi;
q0=[0;0];
dq0=[-1.31519275;-1.85996342];
w0c=g/a;
T0=8;
M=[2 -1;-2 2];
I=[1 0;0 1];
f=[(sqrt(2)-1)/sqrt(2);sqrt(2)-1];
dt=0.02;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(2,np);
dq=zeros(2,np);
ddq=zeros(2,np);
q(:,1)=q0;
dq(:,1)=dq0;
ddq(:,1)=-w0c*M*q0;
for inc=2:np
q(:,inc)=q(:,inc-1)+dt*dq(:,inc-1)+0.5*dt*dt*ddq(:,inc-1);
ddq(:,inc)=-w0c*M*q(:,inc)+F0/(m*a)*sin(w*t(inc))*f;
dq(:,inc)=dq(:,inc-1)+0.5*dt*ddq(:,inc-1)+0.5*dt*ddq(:,inc);
end
plot(t,q)

```



1.6 On choisit $dt=0.02s$; on va calculer les valeurs numériques de $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$ pour les valeurs de t égales à $0s$, Δt , $2 \Delta t$ et $0.5s$.

t	0s	0.02s	0.04s	0.5s
q(t)	0m	-0.02630385500000 0m	-0.052193110516700 m	-2.988247394554181 e-04m
	0m	-0.03719926840000 0m	-0.073812204590006 m	-4.226024181759378 e-04m
$\dot{q}(t)$	-1.31519275000000 0m/s	-1.30482776291749 1m/s	-1.273896237501174 m/s	1.314299175243450 m/s
	-1.85996342000000 0m/s	-1.84530511475015 8m/s	-1.801561332168207 m/s	1.858699716228808 m/s
$\ddot{q}(t)$	0 m / s ²	1.03649870825094 7 m / s ²	2.056653833380742 m / s ²	0.003434423331619 m / s ²
	0 m / s ²	1.46583052498419 3 m / s ²	2.908547733210907 m / s ²	0.004857036112994 m / s ²

Question 2

2.1 Pour $\beta = 0.25$; $\gamma = 0.5$

$$A = \begin{bmatrix} (I_2 + \frac{1}{4}\omega_0^2\Delta t^2[M])^{-1} * (I_2 - \frac{1}{4}\omega_0^2\Delta t^2[M]) & \Delta t(I_2 + \frac{1}{4}\omega_0^2\Delta t^2[M])^{-1} \\ -\frac{1}{2}\omega_0^2\Delta t[M] * (I_2 + \frac{1}{4}\omega_0^2\Delta t^2[M])^{-1} * (I_2 - \frac{1}{4}\omega_0^2\Delta t^2[M]) - \frac{1}{2}\omega_0^2\Delta t[M] & (I_2 - \frac{1}{2}\omega_0^2\Delta t^2[M]) * (I_2 + \frac{1}{4}\omega_0^2\Delta t^2[M])^{-1} \end{bmatrix}$$

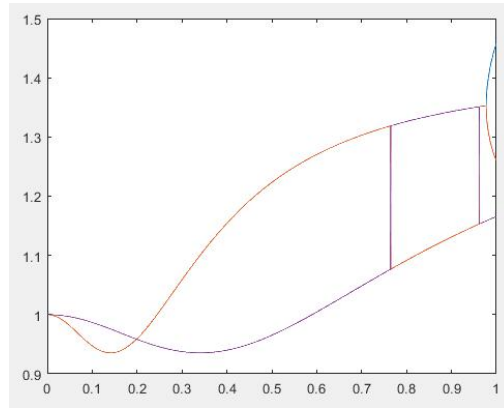
2.2

```

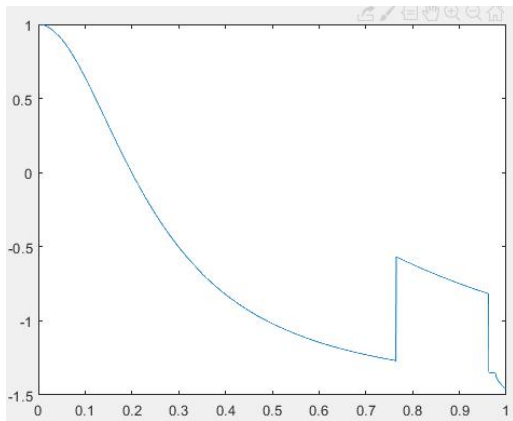
clear all;
g=9.81;
a=0.5;
m=2;
F0=20;
w=2*pi;
q0=[0;0];
dq0=[-1.31519275;-1.85996342];
w0c=g/a;
T0=8;
M=[2 -1;-2 2];
I=[1 0;0 1];
dt=(0:0.001:1);
np=size(dt,2);
m1=zeros(1,np);
m2=zeros(1,np);
m3=zeros(1,np);
m4=zeros(1,np);
l=zeros(4,np);
for inc=1:np
t=dt(inc);
A=[inv(I+0.25*w0c*t*t*M)*(I-0.25*w0c*t*t*M)
t*inv(I+0.25*w0c*t*t*M);-0.5*w0c*t*M*inv(I+0.25*w0c*t*t*M)*(I-0.25*w0
c*t*t*M)-0.5*w0c*t*M (I-0.5*w0c*t*t*M)*inv(I+0.25*w0c*t*t*M)];
[V D]=eig(A);
m1(inc)=D(1,1);
m2(inc)=D(2,2);
m3(inc)=D(3,3);
m4(inc)=D(4,4);
l(1,inc)=abs(m1(inc));
l(2,inc)=abs(m2(inc));
l(3,inc)=abs(m3(inc));
l(4,inc)=abs(m4(inc));
end
m1;
m2;
m3;
m4;
l;
figure(1)
plot(dt,l)
figure(2)
plot(dt,m1)

```

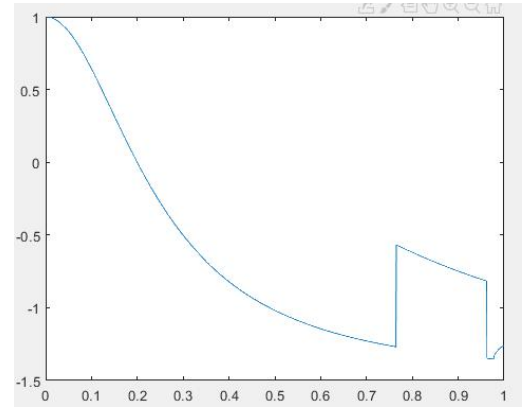
figure (3)
 plot (dt,m2)
 figure (4)
 plot (dt,m3)
 figure (5)
 plot (dt,m4)



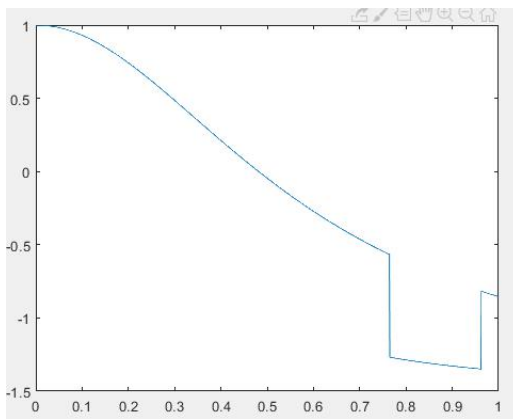
La figure de module



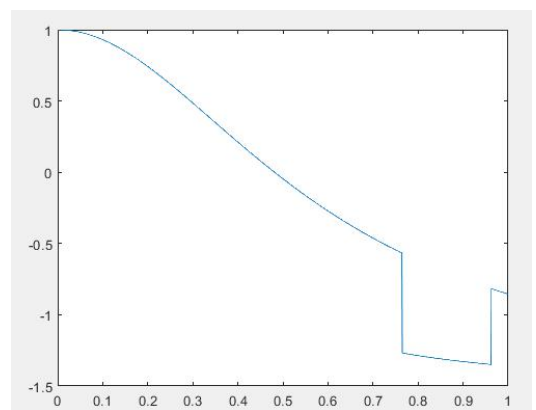
La valeur propre m1



La valeur propre m2



La valeur propre m3



La valeur propre m4

Alors, on peut voir que les valeurs propres diminuent avant $\Delta t \approx 0.76s$. Ensuite, m_1 et m_2 augmentent pendant $0.76s < \Delta t < 0.97s$, mais m_3 et m_4 diminuent plus rapidement à cette époque. Après $\Delta t \approx 0.97s$, m_1 et m_2 diminuent, mais m_3 et m_4 augmentent.

2.3 La relation entre q_0 , \dot{q}_0 et \ddot{q}_0 est :

$$q_0 = -\omega_0^2 [M] q_0 \quad \text{car} \quad \sin(\omega t_0) = 0$$

2.4 Les trois relations du schéma de NEWMARK sont :

$$q_{n+1} = \left(I_2 + \frac{1}{4} \omega_0^2 \Delta t^2 [M] \right)^{-1} * \left(q_n + \Delta t \dot{q}_n + \frac{1}{4} \Delta t^2 \ddot{q}_n + \frac{1}{4} \Delta t^2 * \frac{F_0 \sin(\omega t_{n+1})}{ma} \begin{pmatrix} (\sqrt{2}-1)/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\ddot{q}_{n+1} = -\omega_0^2 [M] q_{n+1} + \frac{F_0 \sin(\omega t_{n+1})}{ma} \begin{pmatrix} (\sqrt{2}-1)/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

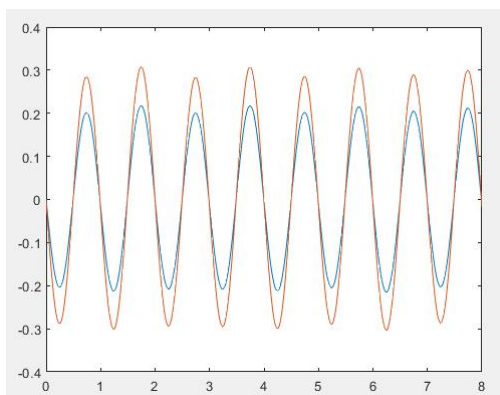
$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{q}_n + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{q}_{n+1}$$

2.5

```

clear all;
g=9.81;
a=0.5;
m=2;
F0=20;
w=2*pi;
q0=[0;0];
dq0=[-1.31519275;-1.85996342];
w0c=g/a;
T0=8;
M=[2 -1;-2 2];
I=[1 0;0 1];
f=[(sqrt(2)-1)/sqrt(2);sqrt(2)-1];
dt=0.02;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(2,np);
dq=zeros(2,np);
ddq=zeros(2,np);
q(:,1)=q0;
dq(:,1)=dq0;
ddq(:,1)=-w0c*M*q0;
for inc=2:np
q(:,inc)=inv(I+0.25*w0c*dt*dt*M)*(q(:,inc-1)+dt*dq(:,inc-1)+0.5*dt*dt
*ddq(:,inc-1)+0.25*dt*dt*F0/(m*a)*sin(w*t(inc))*f);
ddq(:,inc)=-w0c*M*q(:,inc)+F0/(m*a)*sin(w*t(inc))*f;
dq(:,inc)=dq(:,inc-1)+0.5*dt*ddq(:,inc-1)+0.5*dt*ddq(:,inc);
end
plot(t,q)

```



2.6 On choisit $\Delta t=0.02s$; on va calculer les valeurs numériques de $q(t)$, $\dot{q}(t)$ pour les valeurs de t égales à $0s$, Δt , $2 \Delta t$ et $0.5s$.

t	0s	0.02s	0.04s	0.5s
q(t)	0m	-0.02620032411856 3m	-0.051884744618413 m	0.007387073404000 m
	0m	-0.03705285362390 4m	-0.073376109356113 m	0.010446899011528 m
$\dot{q}(t)$	-1.31519275000000 0m/s	-1.30483966185629 7m/s	-1.273955476272384 m/s	1.282458615118304 m/s
	-1.85996342000000 0m/s	-1.84532194239042 2m/s	-1.801645108440027 m/s	1.813670364371503 m/s

Exercice 4 oscillateur non linéaire à un degré de liberté

Question1

1.1 On sait que

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{j+1}$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j + \gamma \Delta t \ddot{q}_{j+1}$$

Et on a $\ddot{q} + \omega_0^2 q (1 + a q^2) = 0 \Rightarrow \ddot{q} = -\omega_0^2 q (1 + a q^2) \Rightarrow \ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 q_{j+1} (1 + a q_{j+1}^2)$

Donc, on a $q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j - \beta \Delta t^2 \omega_0^2 q_{j+1} (1 + a q_{j+1}^2)$

$$\Rightarrow q_{j+1} (1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 (1 + a q_{j+1}^2)) = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j$$

Alors, si q_j ; \dot{q}_j ; \ddot{q}_j sont connus, on peut déterminer q_{j+1} ; \dot{q}_{j+1} ; \ddot{q}_{j+1}

$$q_{j+1} (1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 (1 + a q_{j+1}^2)) = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j$$

$$\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 q_{j+1} (1 + a q_{j+1}^2)$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j + \gamma \Delta t \ddot{q}_{j+1}$$

On a $\gamma = 0.5$, $\beta = 0 \Rightarrow$

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j$$

$$\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 q_{j+1} (1 + a q_{j+1}^2)$$

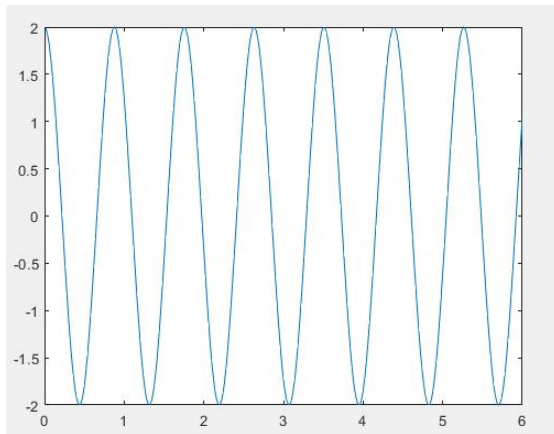
$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{j+1}$$

1.2

```

clear all;
w0=2*pi;
q0=2;
dq0=0;
a=0.1;
T0=6;
dt=0.02;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(1,np);
dq=zeros(1,np);
ddq=zeros(1,np);
q(1)=q0;
dq(1)=dq0;
ddq(1)=-w0c*q0*(1+a*q0*q0);
for inc=2:np
    q(inc)=q(inc-1)+dt*dq(inc-1)+1/2*dt*dt*ddq(inc-1);
    ddq(inc)=-w0c*q(inc)*(1+a*q(inc)*q(inc));
    dq(inc)=dq(inc-1)+1/2*dt*(ddq(inc-1)+ddq(inc));
end
plot(t,q)

```



1.3 On choisit $dt=0.02s$; on va calculer les valeurs numériques de $q(t)$ pour les valeurs de t égales à $0s$, Δt , $2 \Delta t$ et $T0$.

t	0s	0.02s	0.04s	6s
q(t)	2m	1.977892086141560m	1.912331781918763m	1.032942347448447m

Question 2

2.1 L'erreur entre la valeur estimée et la valeur correcte.

2.2 On a $\ddot{q}_{j+1} = \ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1}$

Pour la calcul des corrections :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q(1 + aq^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1} + \omega_0^2 (q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1})(1 + a(q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1})^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \ddot{q}_{j+1} + \Delta q_{j+1}^* \omega_0^2 (1 + 3a q_{j+1}^{*2}) = -(\ddot{q}_{j+1}^* + \omega_0^2 q_{j+1}^* (1 + a q_{j+1}^{*2}))$$

2.3 La matrice d'amplification est :

$$\ddot{q}_{j+1}^0 = 0$$

$$\dot{q}_{j+1}^0 = \dot{q}_j + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{q}_j$$

$$q_{j+1}^0 = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2(0.5 - \beta) \ddot{q}_j$$

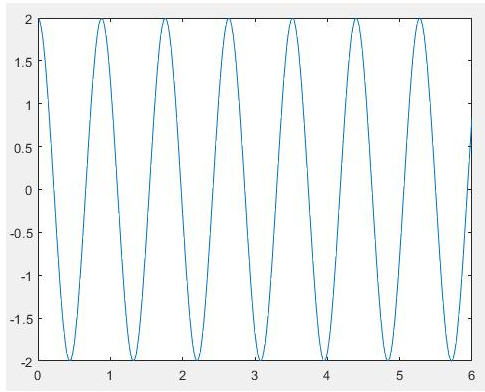
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} q_{j+1}^0 \\ \dot{q}_{j+1}^0 \\ \ddot{q}_{j+1}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2(0.5 - \beta) \\ 0 & 1 & \Delta t(1 - \gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2(0.5 - \beta) \\ 0 & 1 & \Delta t(1 - \gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2 / 4 \\ 0 & 1 & \Delta t / 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```

clear all;
w0=2*pi;
q0=2;
dq0=0;
a=0.1;
T0=6;
dt=0.02;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(1,np);
dq=zeros(1,np);
ddq=zeros(1,np);
ddq0=-w0c*q0*(1+a*q0*q0);
q(1)=q0;
dq(1)=dq0;
ddq(1)=ddq0;
Q=[q0;dq0;ddq0];
e=0.01;
A=[1 dt dt*dt/4;0 1 dt/2;0 0 0];
for inc=2:np
    Q=A*Q;
    p1=Q(1);
    p2=Q(2);
    p3=Q(3);
    while(abs(p3+w0c*p1+a*w0c*p1^3)>e)
        syms dp1 dp2 dp3;
        [dp10,dp20,dp30]=solve(dp1-0.25*dt*dt*dp3==0,dp2-0.5*dt*dp3==0,dp3+w0
c*dp1*(1+3*a*p1*p1)==-(p3+w0c*p1*(1+a*p1*p1)),dp1,dp2,dp3);
        Q=Q+[dp10,dp20,dp30];
        p1=Q(1);
        p2=Q(2);
        p3=Q(3);
    end
    q(inc)=Q(1);
    dq(inc)=Q(2);
    ddq(inc)=Q(3);
end
plot(t,q)

```



2.4 On choisit $dt=0.02s$; on va calculer les valeurs numériques de $q(t)$ pour les valeurs de t égales à $0s$, Δt , $2 \Delta t$ et $T0$.

t	0s	0.02s	0.04s	6s
q(t)	2m	1.978081596728285m	1.913064046617500m	0.847793053049732m

Question 3

3.1 L'énergie mécanique est $E = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2)$

3.2

```

clear all;
w0=2*pi;
q0=2;
dq0=0;
a=0.1;
T0=6;
dt=0.02;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q1=zeros(1,np);
dq1=zeros(1,np);
ddq1=zeros(1,np);
E1=zeros(1,np);
q2=zeros(1,np);
dq2=zeros(1,np);
ddq2=zeros(1,np);
E2=zeros(1,np);
q1(1)=q0;
dq1(1)=dq0;
ddq1(1)=-w0c*q0*(1+a*q0*q0);
q2(1)=q0;
dq2(1)=dq0;
ddq2(1)=-w0c*q0*(1+a*q0*q0);
for inc=2:np
    q1(inc)=q1(inc-1)+dt*dq1(inc-1)+1/2*dt*dt*ddq1(inc-1);
    ddq1(inc)=-w0c*q1(inc)*(1+a*q1(inc)*q1(inc));
    dq1(inc)=dq1(inc-1)+1/2*dt*(ddq1(inc-1)+ddq1(inc));
end
E1=0.5*(dq1.*dq1+w0c*(q1.^2));
ddq0=-w0c*q0*(1+a*q0*q0);
Q=[q0;dq0;ddq0];
e=0.01;
A=[1 dt dt*dt/4;0 1 dt/2;0 0 0];
for inc=2:np
    Q=A*Q;
    p1=Q(1);

```

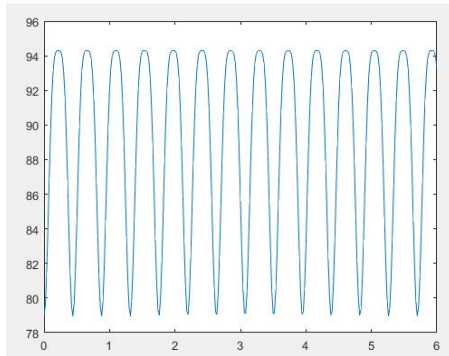


```

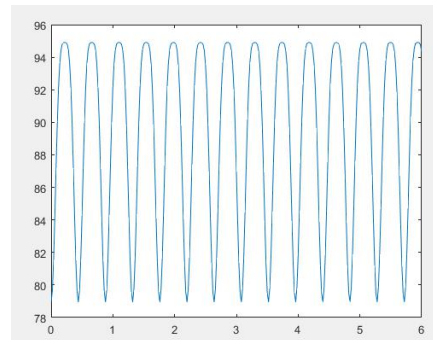
p2=Q(2);
p3=Q(3);
while(abs(p3+w0c*p1+a*w0c*p1^3)>e)
    syms dp1 dp2 dp3;
[dp10,dp20,dp30]=solve(dp1-0.25*dt*dt*dp3==0,dp2-0.5*dt*dt*dp3==0,dp3+w0
c*dp1*(1+3*a*p1*p1)==-(p3+w0c*p1*(1+a*p1*p1)),dp1,dp2,dp3);
    Q=Q+[dp10,dp20,dp30];
    p1=Q(1);
    p2=Q(2);
    p3=Q(3);
end
q2(inc)=Q(1);
dq2(inc)=Q(2);
ddq2(inc)=Q(3);
end
E2=0.5*(dq2.*dq2+w0c*(q2.^2));
figure(1)
plot(t,E1)
figure(2)
plot(t,E2)

```

3.3 On choisit $dt=0.02s$, on peut obtenir les deux résultats :



La figure de E1



La figure de E2

Alors, on peut voir que les deux résultats sont presque même. Et E2 est un peu plus grande que E1.