

TD1 Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

Séance 1 :

Retrouver l'équation du mouvement du pendule simple avec les équations de Lagrange :

Tout d'abord, on a les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i, \quad \text{avec } L = E_C - E_p \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_p}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

Pour le pendule simple, on a :

$$E_C = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_p = -mga \cos \theta + cte$$

$$\delta W = 0$$

Donc, on peut obtenir :

$$m a^2 \ddot{\theta} + m g a \sin \theta = 0$$

On sait que θ est très petit, donc $\sin \theta \approx \theta$

Donc, on a :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \theta = 0$$

Cela est l'équation du mouvement du pendule simple.

Séance 2 :

Montrer que le schéma explicite avec matrice d'amplification est obtenu à partir du système du premier ordre que l'on discrétise en temps de manière explicite:

Schéma d'EULER explicite

$$\begin{matrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{matrix} = \begin{matrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{matrix} + \Delta t \begin{matrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{matrix}$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

On a :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_j + \omega_0^2 q_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_j = -\omega_0^2 q_j$$

Donc,

$$\begin{matrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{matrix} = \begin{matrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ \dot{q}_j + \Delta t * \ddot{q}_j \end{matrix} = \begin{matrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ \dot{q}_j + \Delta t * (-\omega_0^2 q_j) \end{matrix} = \begin{matrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 \Delta t * q_j + \dot{q}_j \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} * \begin{matrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{matrix}$$

Alors, on peut obtenir la matrice d'amplification : $A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 1 Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

Question 1

1.1 on a l'équation du mouvement du pendule simple: $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ (1)

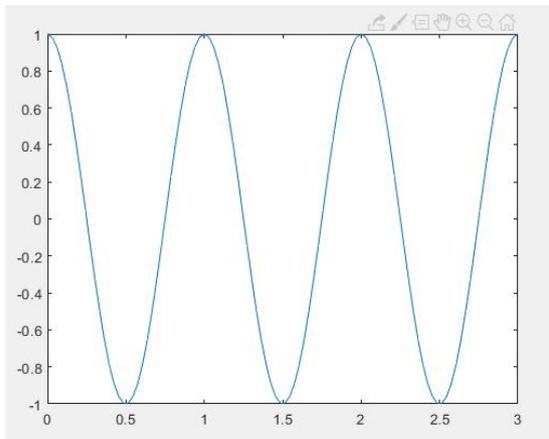
La solution est dans la forme $q(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$

Et on a les conditions initiales: $\omega_0 = 2\pi \text{rad/s}$; $q_0 = 1$; $\dot{q}_0 = 0$

Donc, on a $A = 0$ et $B = 1$

Alors, la solution analytique est $q(t) = \cos(2\pi t)$

```
clear all;
w0=2*pi;
q0=1;
dq0=0;
T0=3;
t=linspace(0,T0,300);
q=cos(2*pi*t);
plot(t,q)
```



1.2 $E^* = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2) = \frac{1}{2}(4\pi^2 \sin^2(2\pi t) + 4\pi^2 \cos^2(2\pi t)) = 2\pi^2 \approx 19.7392$

C'est une constante, indépendante du temps.

Question 2

2.1 on sait que
$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ q_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \\ q_j \end{pmatrix} + \Delta t * \begin{pmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} \quad (5)$$

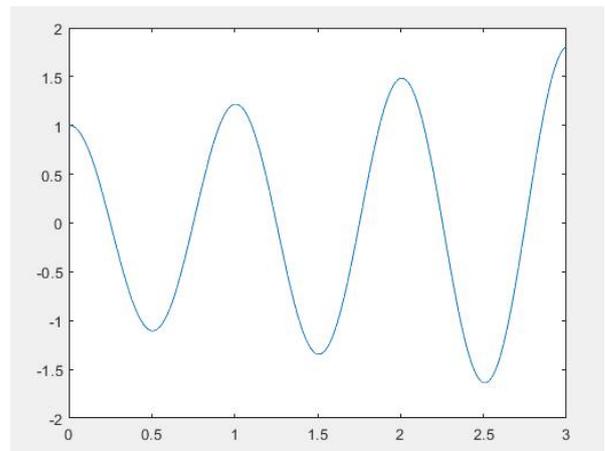
Donc, on a
$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ q_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \\ q_j \end{pmatrix} + \Delta t * \begin{pmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ \dot{q}_j + \Delta t * \ddot{q}_j \\ q_j + \Delta t * \dot{q}_j \end{pmatrix}$$

Et on a $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \Rightarrow \ddot{q} = -\omega_0^2 q \Rightarrow \ddot{q}_j = -\omega_0^2 q_j$

Alors,
$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ q_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ \dot{q}_j + \Delta t * \ddot{q}_j \\ q_j + \Delta t * \dot{q}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ \dot{q}_j + \Delta t * (-\omega_0^2 q_j) \\ q_j + \Delta t * \dot{q}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j + \Delta t * \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 \Delta t * q_j + \dot{q}_j \\ q_j + \Delta t * \dot{q}_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$$

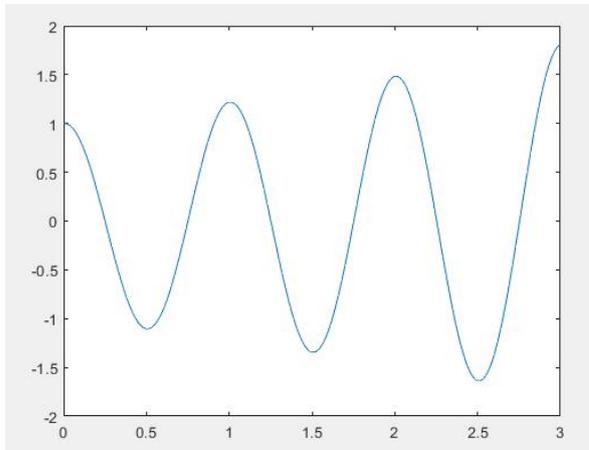
2.2 J'ai choisi la méthode 1.

```
clear all;
w0=2*pi;
q0=1;
dq0=0;
T0=3;
dt=0.01;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(1,np);
dq=zeros(1,np);
ddq=zeros(1,np);
E=zeros(1,np);
q(1)=q0;
dq(1)=dq0;
ddq(1)=-w0c*q(1);
for inc=2:np
    q(inc)=q(inc-1)+dt*dq(inc-1);
    dq(inc)=dq(inc-1)+dt*ddq(inc-1);
    ddq(inc)=-w0c*q(inc);
end
E=0.5*(dq.*dq+w0c*(q.^2));
plot(t,q)
```

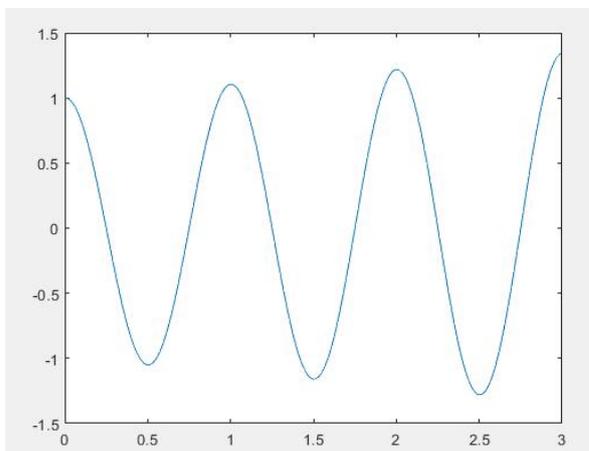


2.3 On choisit $dt_1=0.01s$; $dt_2=0.005s$; $dt_3=0.001s$, alors

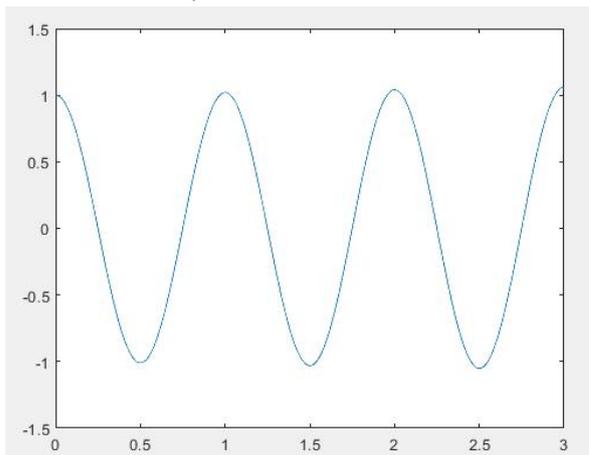
Pour $dt_1=0.01s$, le résultat est



Pour $dt_2=0.005s$, le résultat est



Pour $dt_3=0.001s$, le résultat est



On peut voir que quand dt devient petit, la divergence devient lente.

2.4 La solution exacte : $E^* = 2\pi^2 \approx 19.7392$

Pour $dt_1=0.01s$, le résultat est

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.8171	19.8954	19.9739	20.0528	20.1319	20.2114	20.2912	20.3713	20.4517	20.5325	20.6135	20.6949
2													
3													
4													
5													
6													

Pour $dt_2=0.005s$, le résultat est

E													
1x601 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7587	19.7782	19.7977	19.8173	19.8368	19.8564	19.8760	19.8956	19.9152	19.9349	19.9546	19.9743
2													
3													
4													
5													
6													

Pour $dt_3=0.001s$, le résultat est

E													
1x3001 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7400	19.7408	19.7415	19.7423	19.7431	19.7439	19.7447	19.7454	19.7462	19.7470	19.7478	19.7486
2													
3													
4													
5													
6													

E^* augmente avec le temps, c'est-à-dire que la divergence avec le temps.

On peut voir que quand dt devient petit, E^* augmente plus lentement.

2.5 On va calculer les valeurs propres pour $A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\Delta t \\ \omega_0^2 \Delta t & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + \omega_0^2 \Delta t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \pm i\omega_0 \Delta t$$

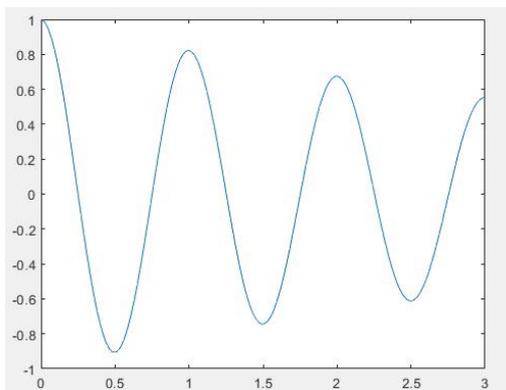
$$\Rightarrow |\lambda| = \sqrt{1 + \omega_0^2 \Delta t^2} > 1$$

Donc, la solution numérique est toujours instable.

Question 3

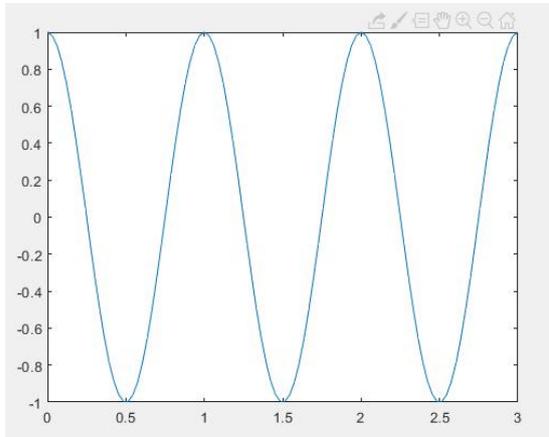
3.1 J'ai choisi la méthode 1.

```
clear all;
w0=2*pi;
q0=1;
dq0=0;
T0=3;
dt=0.01;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(1,np);
dq=zeros(1,np);
ddq=zeros(1,np);
E=zeros(1,np);
q(1)=q0;
dq(1)=dq0;
ddq(1)=-w0c*q(1);
for inc=2:np
    q(inc)=(q(inc-1)+dt*dq(inc-1))/(1+w0c*dt*dt);
    ddq(inc)=-w0c*q(inc);
    dq(inc)=dq(inc-1)+dt*ddq(inc);
end
E=0.5*(dq.*dq+w0c*(q.^2));
plot(t,q)
```

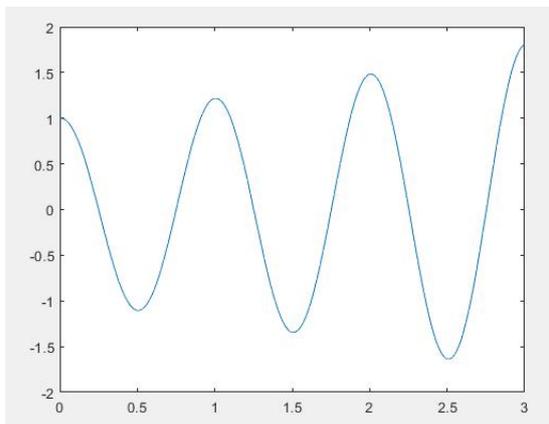


3.2 On choisit $dt=0.01s$

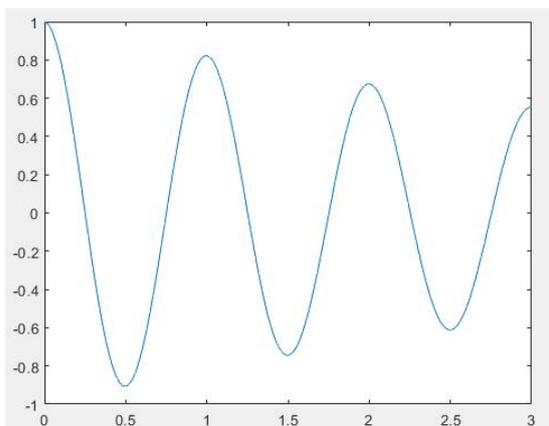
Pour la solution exacte



Pour la solution d'EULER explicite



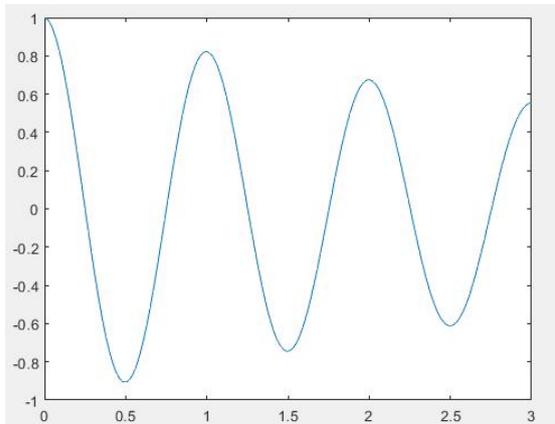
Pour la solution d'EULER implicite



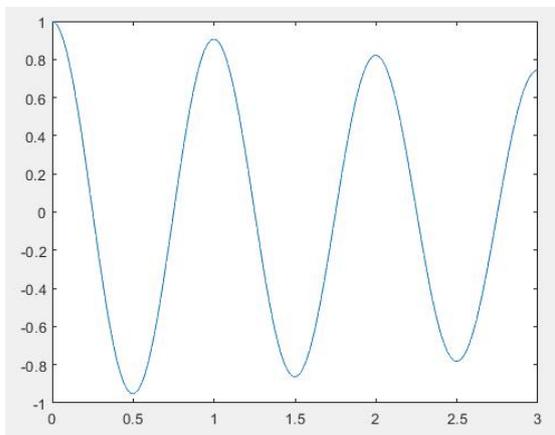
Alors, la solution exacte est stable avec le temps. Par rapport à la solution exacte, la solution d'EULER explicite diverge avec le temps, et la solution d'EULER implicite converge avec le temps.

3.3 On choisit $dt_1=0.01s$; $dt_2=0.005s$; $dt_3=0.001s$, alors

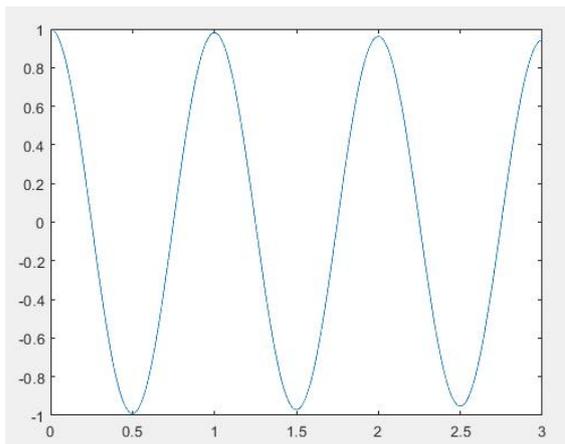
Pour $dt_1=0.01s$, le résultat est



Pour $dt_2=0.005s$, le résultat est



Pour $dt_3=0.001s$, le résultat est



On peut voir que quand dt devient petit, l'atténuation des oscillations est plus faible.

3.4 La solution exacte : $E^* = 2\pi^2 \approx 19.7392$

Pour $dt=0.01s$, le résultat est

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.6616	19.5843	19.5073	19.4306	19.3541	19.2780	19.2022	19.1267	19.0515	18.9766	18.9020	18.8276
2													
3													
4													
5													
6													

Pour $dt=0.005s$, le résultat est

E													
1x601 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7197	19.7003	19.6809	19.6615	19.6421	19.6227	19.6034	19.5840	19.5647	19.5454	19.5262	19.5069
2													
3													
4													
5													
6													

Pour $dt=0.001s$, le résultat est

E													
1x3001 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7384	19.7377	19.7369	19.7361	19.7353	19.7345	19.7338	19.7330	19.7322	19.7314	19.7306	19.7299
2													
3													
4													
5													
6													

E^* diminue avec le temps, c'est-à-dire que la convergence avec le temps.

On peut voir que quand dt devient petit, E^* diminue plus lentement.

3.5 On va calculer les valeurs propres pour $A = \frac{1}{1 + \omega_0^2 \Delta t^2} \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 + \omega_0^2 \Delta t^2) \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{1 \pm i\omega_0 \Delta t}{1 + \omega_0^2 \Delta t^2}$$

$$\Rightarrow \quad |\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2 \Delta t^2}} < 1$$

Donc, la solution numérique est toujours stable.

Question 4

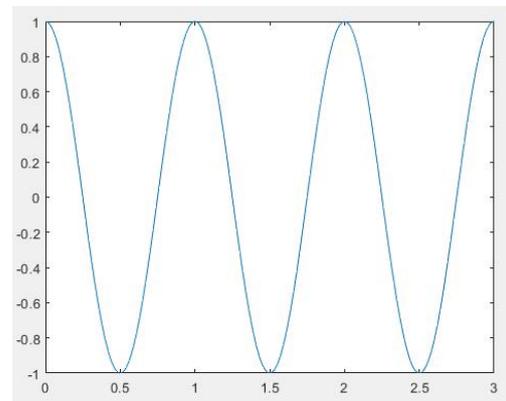
4.1 On suppose que $U = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix}$, et on a $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

$$\text{Donc, on a : } \dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -\omega_0^2 q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} U$$

C'est une formulation adaptée aux schémas du premier ordre.

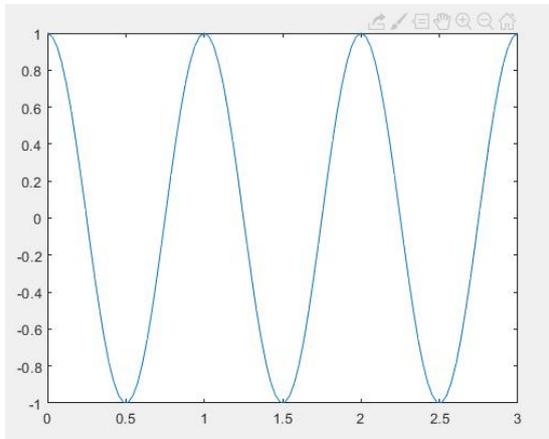
4.2 On choisit $dt=0.01s$

```
clear all;
w0=2*pi;
q0=1;
dq0=0;
T0=3;
dt=0.01;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(1,np);
dq=zeros(1,np);
E=zeros(1,np);
U=[q0;dq0];
q(1)=q0;
dq(1)=dq0;
C=[0 1;-w0c 0];
for inc=2:np
    k1=C*U;
    k2=C*(U+1/2*k1*dt);
    k3=C*(U+1/2*k2*dt);
    k4=C*(U+k3*dt);
    K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    U=U+K*dt;
    q(inc)=U(1);
    dq(inc)=U(2);
end
E=0.5*(dq.*dq+w0c*(q.^2));
plot(t,q)
```

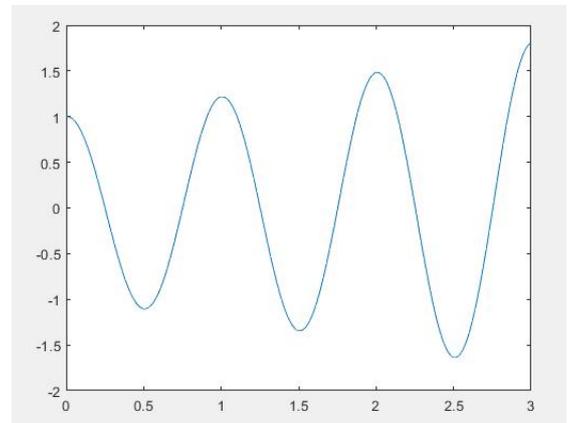


4.3 On va comparer quatre résultats différents :

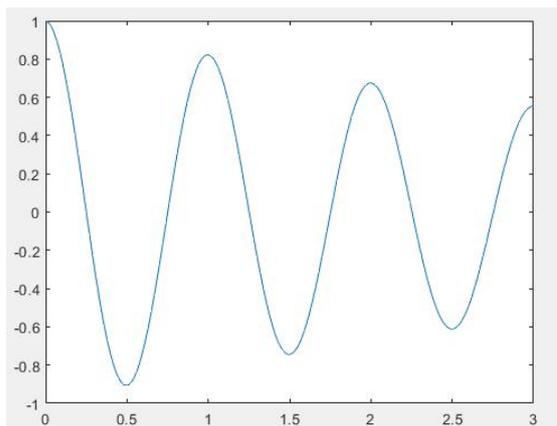
Pour la solution exacte



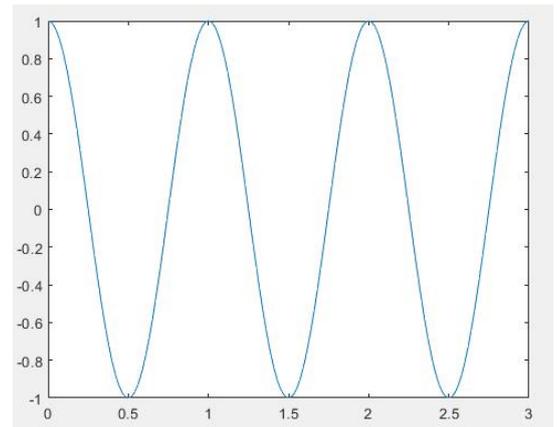
Pour la solution d'EULER explicite



Pour la solution d'EULER implicite



Pour la solution de RUNGE KUTTA



On peut voir que la solution de RUNGE KUTTA est plus précis par rapport à la solution exacte.

4.4 On veut comparer quatre résultats différents de E^* :

Pour la solution exacte : $E^* = 2\pi^2 \approx 19.7392$

Pour la solution d'EULER explicite

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.8171	19.8954	19.9739	20.0528	20.1319	20.2114	20.2912	20.3713	20.4517	20.5325	20.6135	20.6949
2													
3													
4													
5													
6													

Pour la solution d'EULER implicite

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.6616	19.5843	19.5073	19.4306	19.3541	19.2780	19.2022	19.1267	19.0515	18.9766	18.9020	18.8276
2													
3													
4													
5													
6													

Pour la solution de RUNGE KUTTA

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392
2													
3													
4													
5													
6													

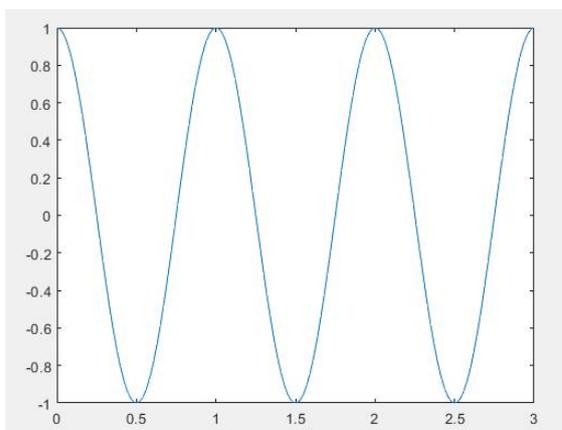
On peut voir que la quantité E^* de RUNGE KUTTA est plus précis par rapport à celle exacte, ni diverge ni converge.

Question 5

5.1.1 J'ai choisi la méthode 1.

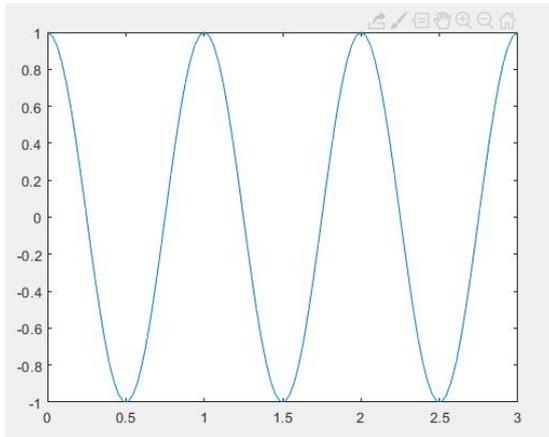
```
clear all;
w0=2*pi;
q0=1;
dq0=0;
T0=3;
dt=0.01;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(1,np);
dq=zeros(1,np);
ddq=zeros(1,np);
E=zeros(1,np);
q(1)=q0;
dq(1)=dq0;
ddq(1)=-w0c*q0;
for inc=2:np

    q(inc)=(q(inc-1)+dt*dq(inc-1)+1/4*dt*dt*ddq(inc-1))/(1+1/4*w0c*dt
    *dt);
    ddq(inc)=-w0c*q(inc);
    dq(inc)=dq(inc-1)+1/2*dt*(ddq(inc-1)+ddq(inc));
end
E=0.5*(dq.*dq+w0c*(q.^2));
plot(t,q)
```

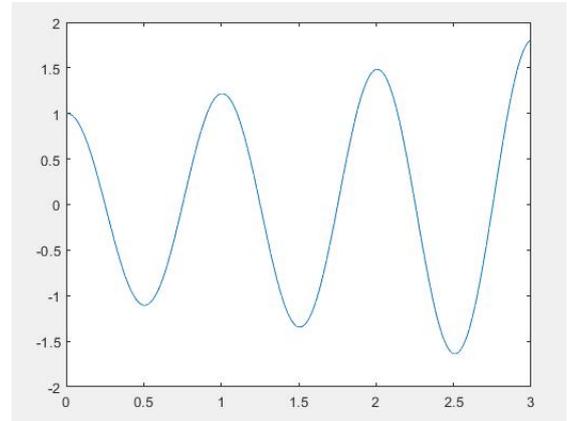


5.1.2 On va comparer cinq résultats différents :

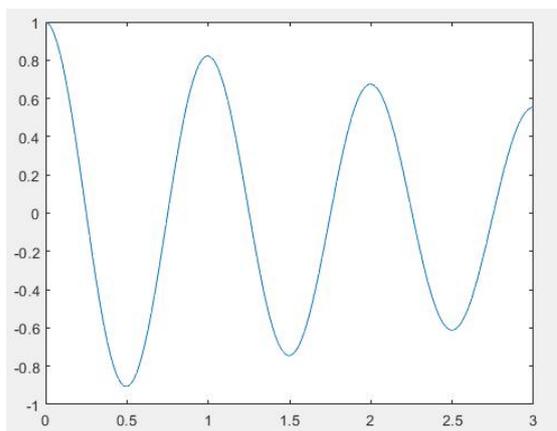
Pour la solution exacte



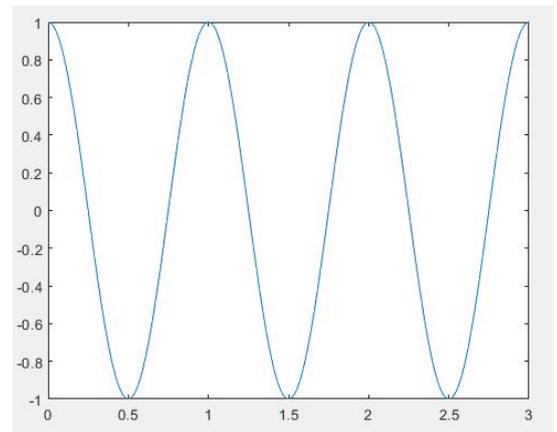
Pour la solution d'EULER explicite



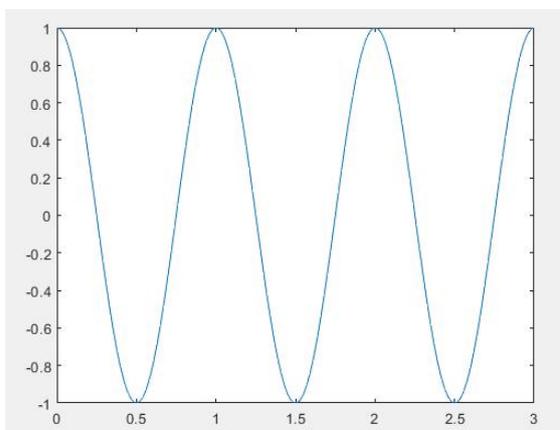
Pour la solution d'EULER implicite



Pour la solution de RUNGE KUTTA



Pour la solution de NEWMARK ($\beta=0.25, \gamma=0.5$)



On peut voir que la solution de NEWMARK ($\beta=0.25, \gamma=0.5$) est autant précis que la solution de RUNGE KUTTA.

5.1.3 On va comparer cinq résultats différents de E^* :

Pour la solution exacte : $E^* = 2\pi^2 \approx 19.7392$

Pour la solution d'EULER explicite

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.8171	19.8954	19.9739	20.0528	20.1319	20.2114	20.2912	20.3713	20.4517	20.5325	20.6135	20.6949
2													
3													
4													
5													
6													

Pour la solution d'EULER implicite

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.6616	19.5843	19.5073	19.4306	19.3541	19.2780	19.2022	19.1267	19.0515	18.9766	18.9020	18.8276
2													
3													
4													
5													
6													

Pour la solution de RUNGE KUTTA

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392
2													
3													
4													
5													
6													

Pour la solution de NEWMARK ($\beta=0.25, \gamma=0.5$)

E													
1x301 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392	19.7392
2													
3													
4													
5													
6													

On peut voir que la quantité E^* de NEWMARK ($\beta=0.25, \gamma=0.5$) est autant précis que la quantité E^* de RUNGE KUTTA.

5.1.4

```
clear all;
w0=2*pi;
r=0.5;
y=0.25;
dt=(0:0.001:1);
np=size(dt,2);
m=zeros(1,np);
n=zeros(1,np);
l=zeros(1,np);
for inc=1:np
    t=dt(inc);
    B=[1+y*t*t*w0*w0 0;r*t*w0*w0 1];
    C=[1-(0.5-y)*t*t*w0*w0 t;-(1-r)*t*w0*w0 1];
    A=inv(B)*C;
    [V D]=eig(A);
    m(inc)=D(1,1);
    n(inc)=D(2,2);
    l(inc)=abs(m(inc));
end
m
n
l
```

Donc, les valeurs propres sont : m et n; la module est l.

les valeurs propres :

The image shows two screenshots of MATLAB variable viewers. The top screenshot shows the variable 'm' as a 1x1001 complex double array. The bottom screenshot shows the variable 'n' as a 1x1001 complex double array. Both arrays show values for iterations 1 through 13.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	1.0000 + 0...	1.0000 + 0...	0.9999 + 0...	0.9998 + 0...	0.9997 + 0...	0.9995 + 0...	0.9993 + 0...	0.9990 + 0...	0.9987 + 0...	0.9984 + 0...	0.9980 + 0...	0.9976 + 0...	0.9972 + 0...
n	1.0000 + 0...	1.0000 - 0...	0.9999 - 0...	0.9998 - 0...	0.9997 - 0...	0.9995 - 0...	0.9993 - 0...	0.9990 - 0...	0.9987 - 0...	0.9984 - 0...	0.9980 - 0...	0.9976 - 0...	0.9972 - 0...

La module est :

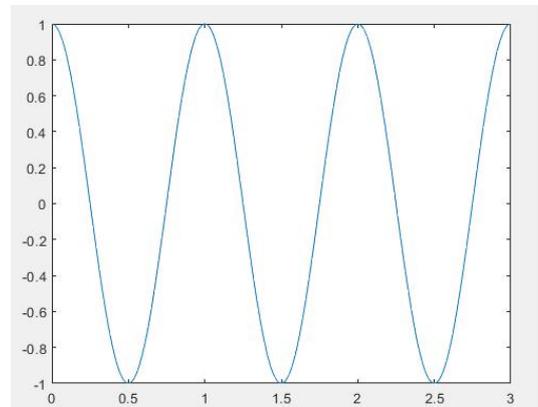
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1.0000	1	1	1	1.0000	1	1.0000	1.0000	1	1	1.0000	1.0000
2													
3													
4													
5													
6													

	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001
1	1	1.0000	1	1	1.0000	1	1.0000	1	1.0000	1	1	1.0000	1
2													
3													
4													
5													
6													

On peut voir que la module est toujours 1, donc la solution est quasi stable.

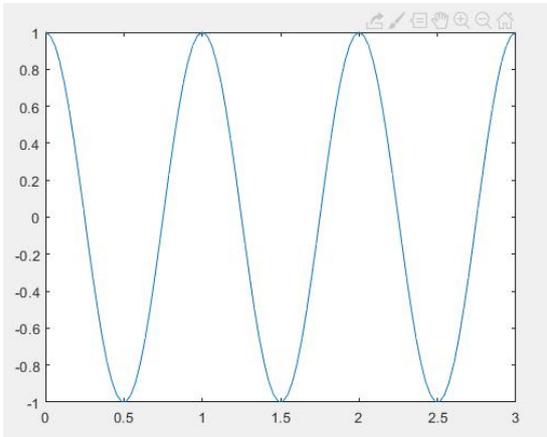
5.2.1 J'ai choisi la méthode 1.

```
clear all;
w0=2*pi;
q0=1;
dq0=0;
T0=3;
dt=0.01;
w0c=w0*w0;
t=(0:dt:T0);
np=size(t,2);
q=zeros(1,np);
dq=zeros(1,np);
ddq=zeros(1,np);
E=zeros(1,np);
q(1)=q0;
dq(1)=dq0;
ddq(1)=-w0c*q0;
for inc=2:np
    q(inc)=q(inc-1)+dt*dq(inc-1)+1/2*dt*dt*ddq(inc-1);
    ddq(inc)=-w0c*q(inc);
    dq(inc)=dq(inc-1)+1/2*dt*(ddq(inc-1)+ddq(inc));
end
E=0.5*(dq.*dq+w0c*(q.^2));
plot(t,q)
```

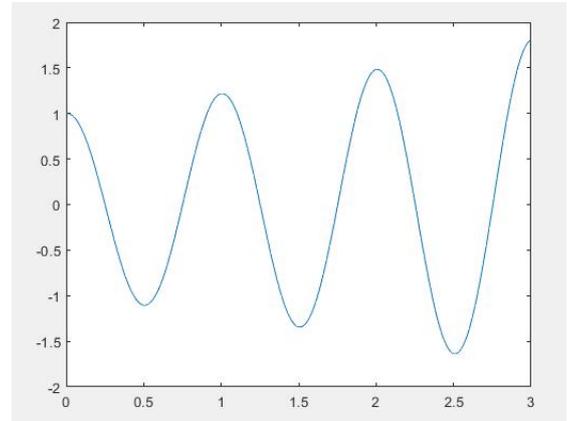


5.2.2 On va comparer six résultats différents :

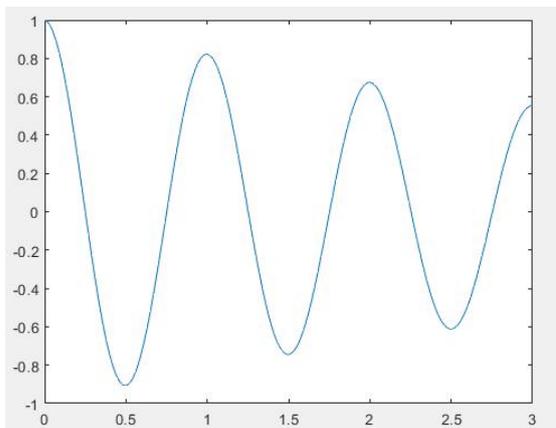
Pour la solution exacte



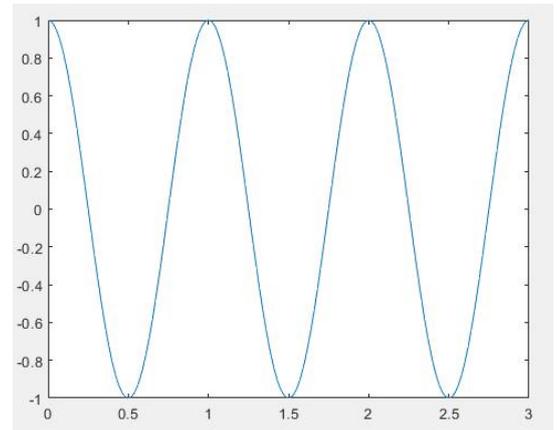
Pour la solution d'EULER explicite



Pour la solution d'EULER implicite

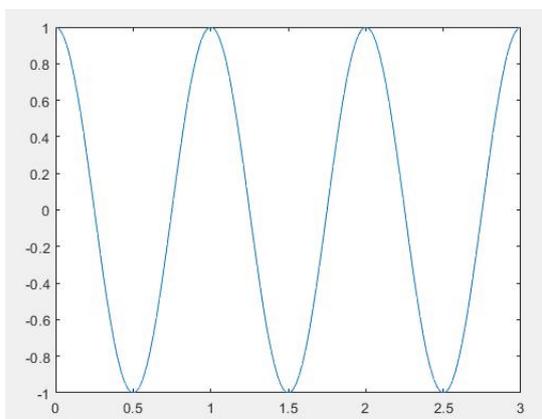


Pour la solution de RUNGE KUTTA

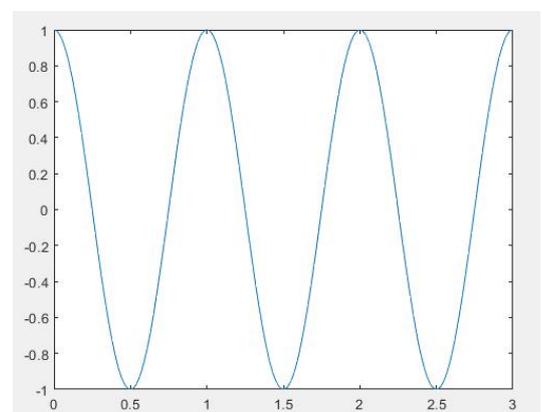


Pour la solution de NEWMARK

($\beta=0.25$, $\gamma=0.5$)



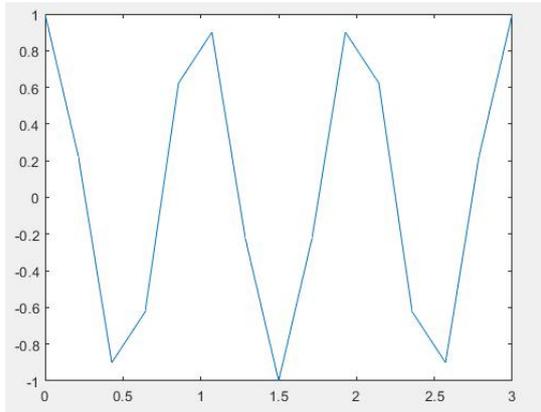
($\beta=0$, $\gamma=0.5$)



On peut voir que la solution de NEWMARK ($\beta=0, \gamma=0.5$) est autant précise que la solution de RUNGE KUTTA et la solution de NEWMARK ($\beta=0.25, \gamma=0.5$).

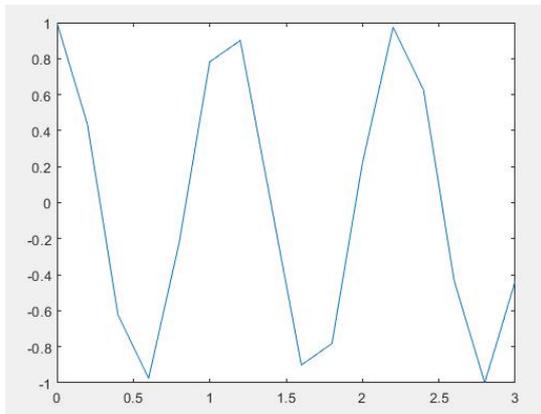
5.2.3 Pour $dt=0.2s$:

Pour la solution exacte

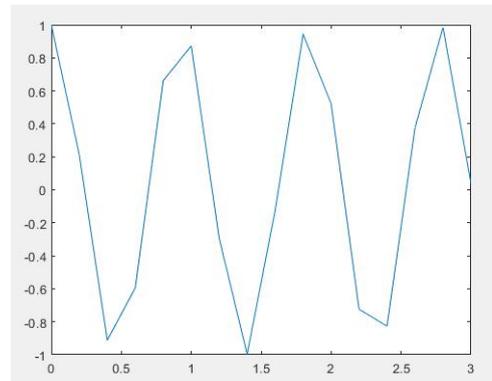


Pour la solution de NEWMARK

($\beta=0.25$, $\gamma=0.5$)



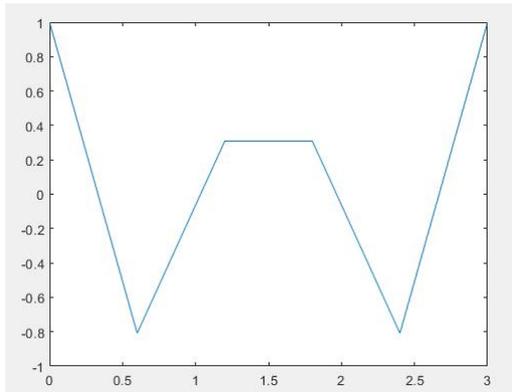
($\beta=0$, $\gamma=0.5$)



On peut voir que la solution de NEWMARK ($\beta=0$, $\gamma=0.5$) est plus précise que la solution de NEWMARK ($\beta=0.25$, $\gamma=0.5$) quand $dt=0.2s$.

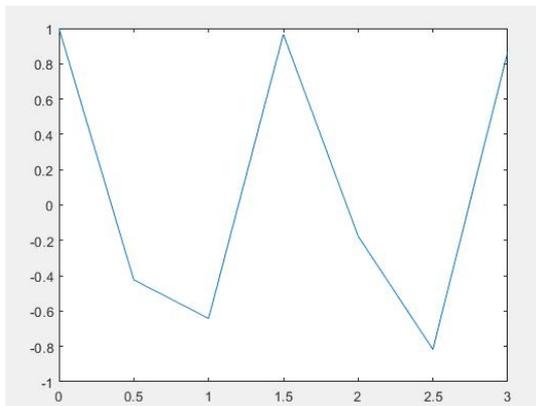
Pour $dt=0.5s$:

Pour la solution exacte

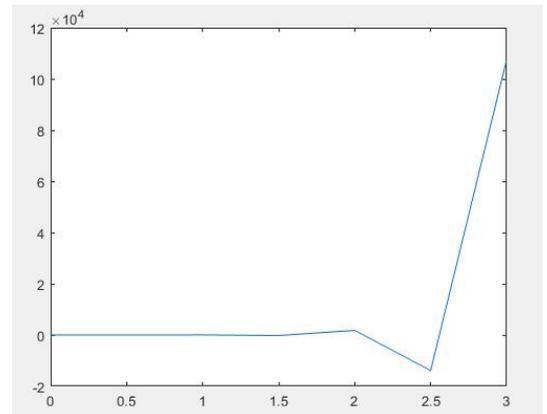


Pour la solution de NEWMARK

($\beta=0.25$, $\gamma=0.5$)



($\beta=0$, $\gamma=0.5$)



On peut voir que la solution de NEWMARK ($\beta=0.25$, $\gamma=0.5$) est plus précis que la solution de NEWMARK ($\beta=0$, $\gamma=0.5$) quand $dt=0.5s$.

La module est :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1.0000	1	1.0000	1	1	1	1	1	1	1	1
2													
3													
4													
5													
6													

	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327
1	1.0000	1.0000	1.0000	1	1.0000	1.0000	0.8766	0.8138	0.7712	1.3556	0.7097	0.6855	0.6641	
2														
3														
4														
5														
6														

	2989	2990	2991	2992	2993	2994	2995	2996	2997	2998	2999	3000	3001
1	0.0029	0.0029	0.0028	0.0028	351.4105	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	352.5927	352.8293	0.0028	0.0028
2													
3													
4													
5													
6													

On peut voir que $\Delta t_c = 0.318s$

Et on a $\Delta t_c = \alpha * \frac{2}{\omega_0}$; alors $\alpha = \pi \Delta t_c = 0.999026s$.