2.1

on a relation d'Euler Explicite :

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix}$$

et $\ddot{q} + w_0^2 q = 0$

$$\Rightarrow \ddot{q}_{j+1} + w_0^2 q_{j+1} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_{j+1} = -w_0^2 q_{j+1}$$

car $\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t\, \ddot{q}_j$,

or $\ddot{q}_j = -w_0^2 q_j$

$$\Rightarrow \dot{q}_{j+1} = -w_0^2 \Delta t\, q_j + \dot{q}_j$$

car on a aussi $q_{j+1} = q_j + \Delta t\, \dot{q}_j$

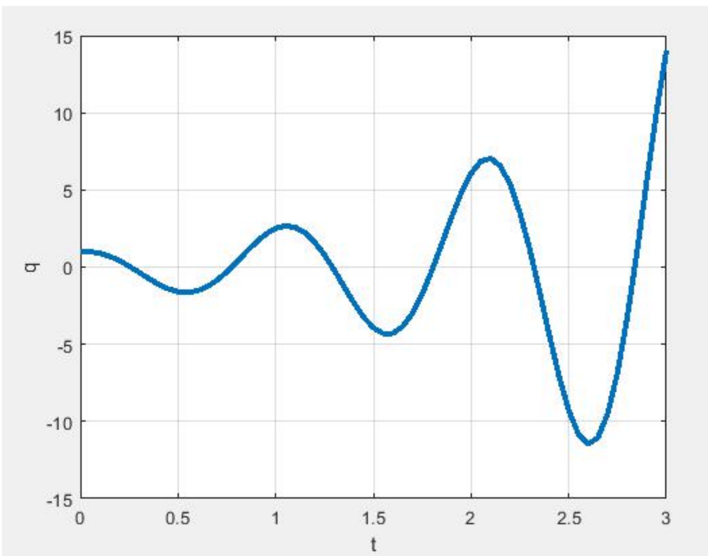
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -w_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix}$$

Exercice 2.2

Méthode 1

```
dt1=0.05;
T0=3;
q0=1;
dq0=0;
w0c=(2*pi)^2;
t1=(0:dt1:T0)';
np1=size(t1,1);
q1=zeros(np1,1);
dq1=zeros(np1,1);
ddq1=zeros(np1,1);
energ1=zeros(np1,1);
q1(1)=q0;
dq1(1)=dq0;
ddq1(1)=-w0c*q1(1);
for inc=2:np1
    q1(inc)=q1(inc-1)+dt1*dq1(inc-1);
    dq1(inc)=dq1(inc-1)+dt1*ddq1(inc-1);
    ddq1(inc)=-w0c*q1(inc)
end;
plot(t1,q1,'Linewidth',3)
grid on;
xlabel('t');
ylabel('q');
```

Figure

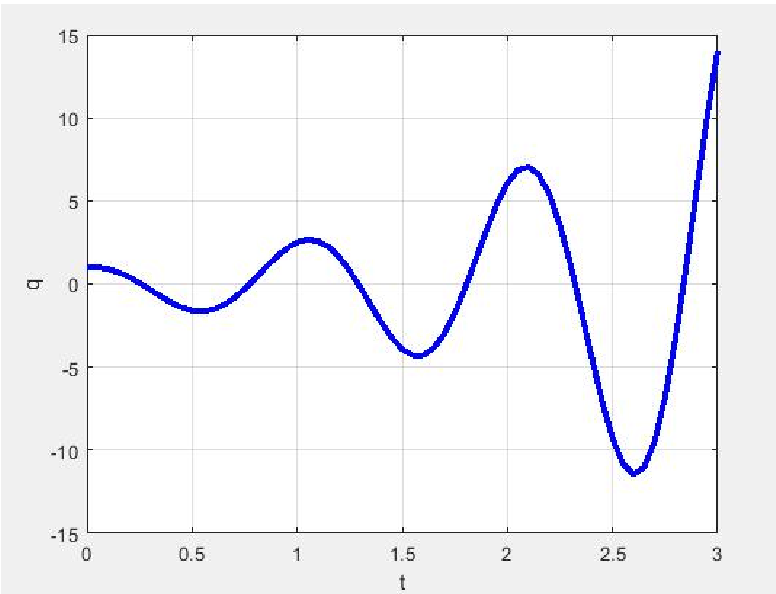


Méthode 2

```
t1=(0:dt1:T0)';
np1=size(t1,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(np1,1);
q1b(1)=q0;
A=[1,dt1;-w0c*dt1,1];
for inc=2:np1
    q=A*q;
    q1b(inc)=q(1);
    dq1b(inc)=q(2);
end

plot(t1,q1b,'b-','Linewidth',3)
grid on;
xlabel('t');
ylabel('q');
```

Figure

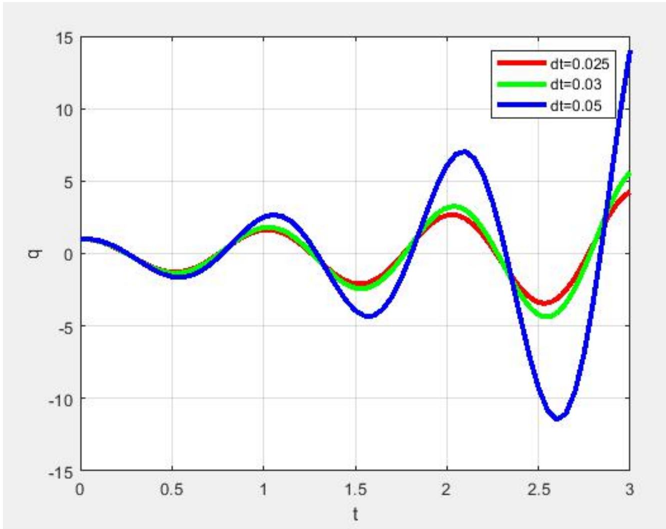


Exercie 2.3

Méthode 1

```
I0=3;q0=1;dq0=0;w0c=(2*pi)^2;
for dt1=[0.025 0.03 0.05 ]
    t1=(0:dt1:I0)';
    np1=size(t1,1);
    q1=zeros(np1,1);
    dq1=zeros(np1,1);
    ddq1=zeros(np1,1);
    q1(1)=q0;
    dq1(1)=dq0;
    ddq1(1)=-w0c*q1(1);
    for inc=2:np1
        q1(inc)=q1(inc-1)+dt1*dq1(inc-1);
        dq1(inc)=dq1(inc-1)+dt1*ddq1(inc-1);
        ddq1(inc)=-w0c*q1(inc)
    end
    if dt1==0.025
        plot(t1,q1,'r','Linewidth',3)
        hold on
    elseif dt1==0.03
        plot(t1,q1,'g','Linewidth',3)
        hold on
    else
        plot(t1,q1,'b','Linewidth',3)
    end
end;
grid on;
xlabel('t');
ylabel('q');
legend('dt=0.025','dt=0.03','dt=0.05')
```

Figure



Méthode 2

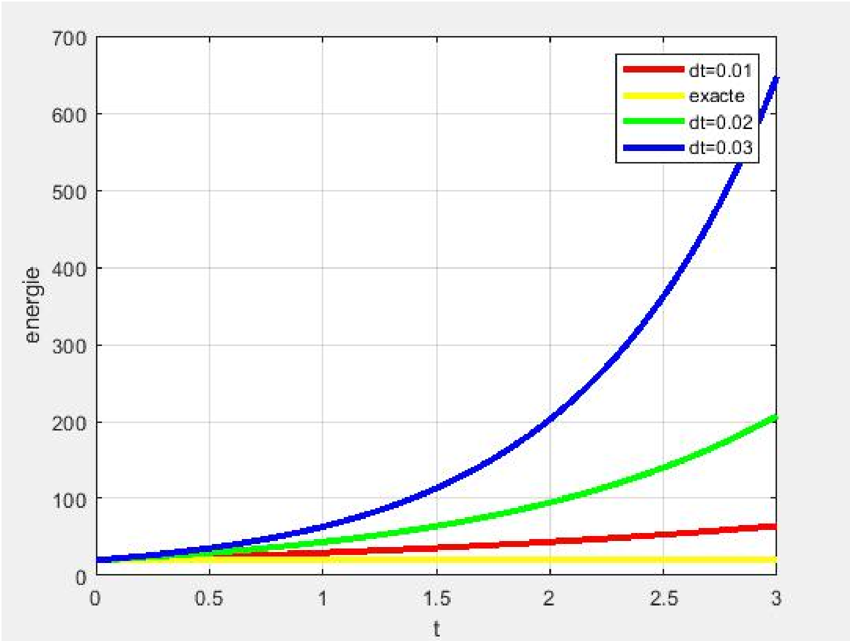
```
T0=3;q0=1;dq0=0;w0c=(2*pi)^2;
for dt1=[0.025 0.03 0.05]
    t1=(0:dt1:T0)';
    np1=size(t1,1);
    q=[q0;dq0];
    q1b=zeros(np1,1);
    q1b(1)=q0;
    A=[1,dt1;-w0c*dt1,1];
    for inc=2:np1
        q=A*q;
        q1b(inc)=q(1);
        dq1b(inc)=q(2);
    end
    if dt1==0.025
       plot(t1,q1b,'r-','Linewidth',3)
       hold on
    elseif dt1==0.03
        plot(t1,q1b,'g','Linewidth',3)
        hold on
    else
        plot(t1,q1b,'b','Linewidth',3)
    end
end
grid on;
xlabel('t');
ylabel('q');
legend('dt=0.025','dt=0.03','dt=0.05')
```

Exercice 2.4

```
I0=3;q0=1;dq0=0;w0c=(2*pi)^2;
for dt1=[0.01 0.02 0.03 ]
    t1=(0:dt1:I0)';
    np1=size(t1,1);
    q1=zeros(np1,1);
    dq1=zeros(np1,1);
    ddq1=zeros(np1,1);
    energ1=zeros(np1,1);
    energ=zeros(np1,1);
    q1(1)=q0;
    dq1(1)=dq0;
    ddq1(1)=-w0c*q1(1);
    energ1(1)=0.5*(dq1(1).*dq1(1)+w0c*(q1(1).^2));
    energ(1)=2*pi^2;
    for inc=2:np1
        q1(inc)=q1(inc-1)+dt1*dq1(inc-1);
        dq1(inc)=dq1(inc-1)+dt1*ddq1(inc-1);
        ddq1(inc)=-w0c*q1(inc);
        energ1(inc)=0.5*(dq1(inc).*dq1(inc)+w0c*(q1(inc).^2))
        energ(inc)=2*pi^2
    end
    if dt1==0.01
        plot(t1,energ1,'r','Linewidth',3)
        hold on
        plot(t1,energ,'y','Linewidth',3)
        hold on
    elseif dt1==0.02
        plot(t1,energ1,'g','Linewidth',3)
        hold on
    else dt1==0.03
        plot(t1,energ1,'b','Linewidth',3)

    end
end;
grid on;
xlabel('t');
ylabel('energie');
legend('dt=0.01','exacte','dt=0.02','dt=0.03')
```

Figure



Exercice 2.5

```
%on prend l'exemple de dt=0.05
dt1=sym('dt1','real');w0c=sym('w0c','real');
dt=0.05;
w0=2*pi;
A=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
[z,d]=eig(A)
% d =1.0000 + 0.3142i    0.0000 + 0.0000i
%     0.0000 + 0.0000i    1.0000 - 0.3142i
% abs(1-0.3142i)=1.0482
% abs(1+0.3142i)=1.0482
% donc -1<d1,d2<1
% donc instable
% pour les autres cas, les valeurs propre sont aussi égales à
%    (1-i*w0*dt)et(1+i*w0*dt)dont la module sont sûrement supérieur
%    que 1
```