1. Etude d'un double pendule avec l'hypothèse des petits mouvements

Nom :Armand   Numéro d'étudiant :SY1924103

1.1 Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite :

On sait que

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t * \dot{q}_n + \Delta t^2(0.5 - \beta) * \ddot{q}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{n+1} ;$$
$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t(1-\gamma) * \ddot{q}_n + \Delta t \gamma \ddot{q}_{n+1}$$

quand $\beta = 0, \gamma = \frac{1}{2}$ on peut obtenir :

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t * \dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{2} * \ddot{q}_n$$
$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} * \ddot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{n+1}$$

En même temps, on a l'équation :

$$\mathrm{m}a^2 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ddot{q}_n + \mathrm{mga} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} q_n = F_0 sinwt \begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

avec $q_n = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ et M= $\mathrm{m}a^2 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \mathrm{mga} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) selon le calcule, on peut obtenir le matrice d'amplification :

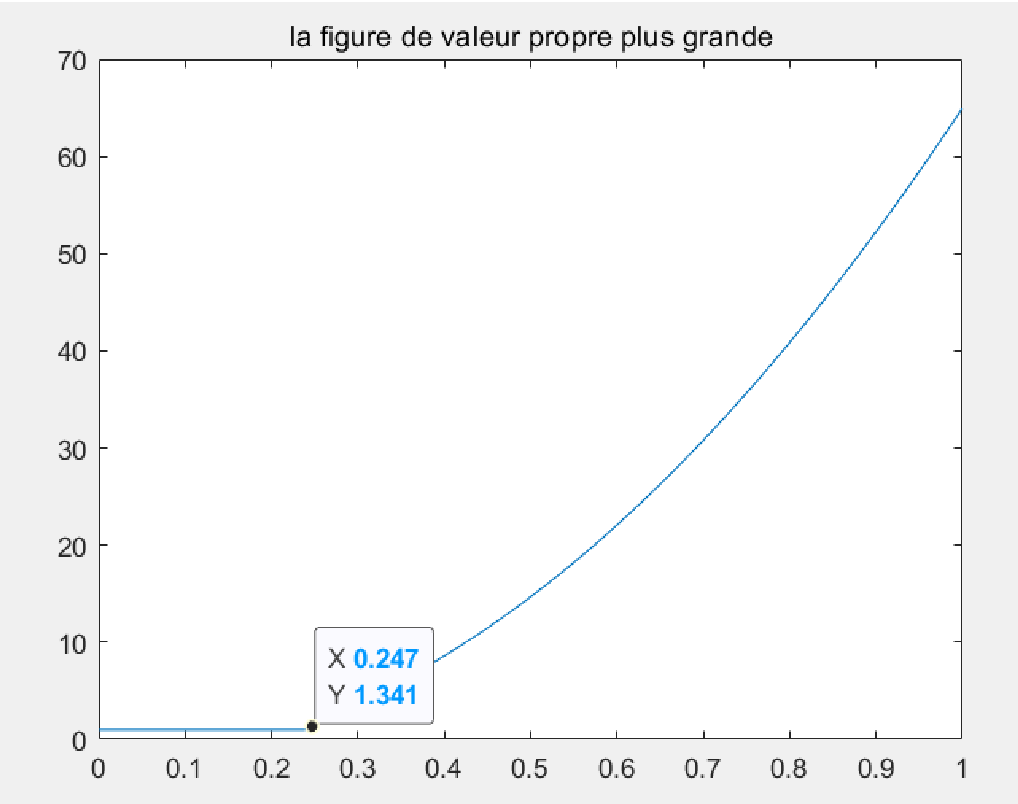
$$\boldsymbol{M_{amplification}} = \begin{bmatrix} Id2 - \frac{\Delta t^2}{2} M^{-1}K & \Delta t * Id2 \\ \frac{\Delta t^3}{4} M^{-1}KM^{-1}K - \Delta t M^{-1}K & Id2 - \frac{\Delta t^2}{2} M^{-1}K \end{bmatrix}$$

2) Pour obtenir le pas de temps critique, d'abord, il faut calculer la valeur propre plus grand de la matrice d'amplification pour différente Δt . Ici c'est les codes de calcule :

```matlab
m=2;
a=0.5;
g=9.81;
F0=20;
w=2*pi;
M=(m*a^2).*[2,1;1,1];
K=(m*g*a).*[2,0;0,1];
valeur_max=[];
syms T_delta;
M_amplification=[eye(2)-(T_delta^2)/2.*inv(M)*K, T_delta.*eye(2);
    (T_delta^3)/4.*inv(M)*K*inv(M)*K-T_delta.*inv(M)*K, eye(2)-(T_delta^2)/2.*inv(M)*K];

for T_delta=0:0.001:1;
    valeur_max=[valeur_max,max(abs(eig(eval(M_amplification))))];
end
t=0:0.001:1;
plot(t, valeur_max);
title("la figure de valeur propre plus grande")
```

Et le figure est ici :



Alors on peut obtenir le temps critique est $\Delta t = 0.247s$

3) À t=0, $sinwt$ =0, alors la relation entre $q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0$ est :

$$\mathrm{m}a^2 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ddot{q}_0 + \mathrm{mga} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) Au début de mon analyse de question, on a déjà obtenu :

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t * \dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{2} * \ddot{q}_n$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} * \ddot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{n+1} \text{ ;}$$

Et pour l'équation : $\mathrm{m}a^2 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ddot{q}_n + \mathrm{mga} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} q_n = F_0 sinwt \begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,

Il faut faire la discrétisation. Alors on peut obtenir :

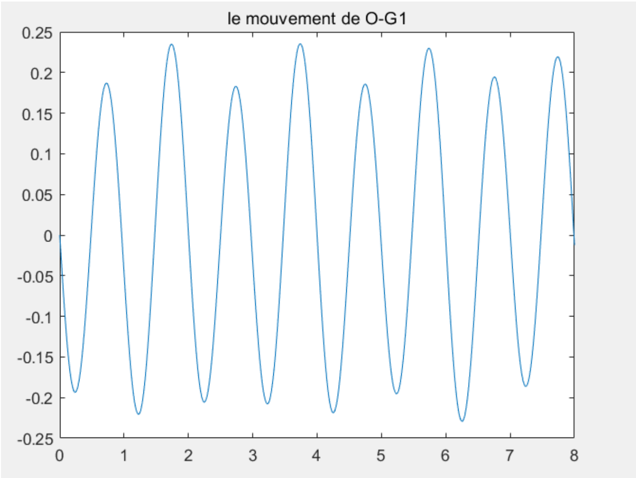
$M\ddot{q}_{n+1} + Kq_{n+1} = F_0 \sin\{w(n+1)\Delta t\} * \begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix})$

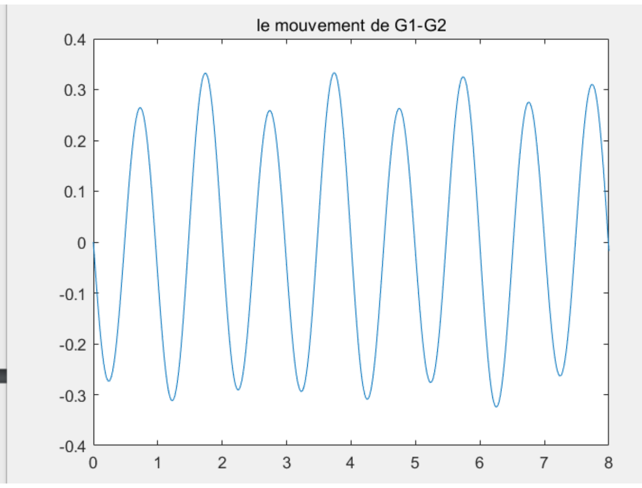
avec M= $\mathrm{m}a^2 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \mathrm{mga} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) A l'aide des relations précédentes obtenues et l'analyses, on peut programmer et ici, ces sont les code en utilisant un schéma de NEWMARK explicite :

```
clear all
m=2;
a=0.5;
g=9.81;
F0=20;
w=2*pi;
T0=8;
M=(m*a^2).*[2,1;1,1];
K=(m*g*a).*[2,0;0,1];
%ici on choist la valeur de T_delta;
%T_delta=0.02;
T_delta=0.02;
n=floor(T0/T_delta);
vec=[a;a/sqrt(2)];
qj=zeros(2,n);
qj_derive=zeros(2,n);
qj_prime2=zeros(2,n);
%les conditions initiales à temps 0;
qj(:,1)=[0;0];
qj_derive(:,1)=[-1.31519275;-1.85996342];
for i=1:n-1
   qj_prime2(:,i)=-inv(M)*K*qj(:,i)+(F0*sin(i*w*T_delta)).*inv(M)*vec;
   qj(:,i+1)=qj(:,i)+T_delta.*qj_derive(:,i)+((T_delta^2)/2).*qj_prime2(:,i);
   qj_prime2(:,i+1)=-inv(M)*K*qj(:,i+1)+(F0*sin(w*(i+1)*T_delta)).*inv(M)*vec;
   qj_derive(:,i+1)=qj_derive(:,i)+(T_delta/2).*qj_prime2(:,i)+(T_delta/2).*qj_prime2(:,i+1);
end
t=linspace(0,T0,n);
ti=t';
figure(1);
plot(ti,qj(1,:));
title("le mouvement de O-G1")
figure(2);
plot(ti,qj(2,:));
title("le mouvement de G1-G2");
% q1=qj(:,1)
% q2=qj(:,2)
% q3=qj(:,3)
% q25=qj(:,25)
% q1_derive=qj_derive(:,1)
% q2_derive=qj_derive(:,2)
% q3_derive=qj_derive(:,3)
% q25_derive=qj_derive(:,25)
```

6) On choisit la valeur de $\Delta t = 0.02s$, alors on peut obtenir deux figures ici :





Et en même temps, on peut obtenir :

q(0)=[0;0] ,

q(Δt)= [-0.0262 ;-0.0370],

q($2 * \Delta t$)= [-0.0516; -0.0730],

q(0.5)= [-0.0048 ;-0.0069]

$\dot{q}(0) = [-1.3152\,; -1.8600]$

$\dot{q}(\Delta t) = [\,-1.2903\,;\ -1.8247]$

$\dot{q}(2 * \Delta t) = [\,-1.2452\,; -1.7610]$

$\dot{q}(0.5) = [\,1.2259\,;\ 1.7337]$

1.2 Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite :

Sachant que :

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t * \dot{q}_n + \Delta t^2 (0.5 - \beta) * \ddot{q}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{n+1} \,;$$
$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t (1 - \gamma) * \ddot{q}_n + \Delta t \gamma \ddot{q}_{n+1}$$

quand $\beta = 0.25, \gamma = \frac{1}{2}$ on peut obtenir :

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t * \dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{4} * \ddot{q}_n + 0.25 * \Delta t^2 \ddot{q}_{n+1}$$
$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} * \ddot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{n+1}$$

En même temps, on a l'équation :

$$\mathrm{m}a^2 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ddot{q}_n + \mathrm{mga} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} q_n = F_0 sinwt \begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

avec $q_n = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ et M= $\mathrm{m}a^2 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \mathrm{mga} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

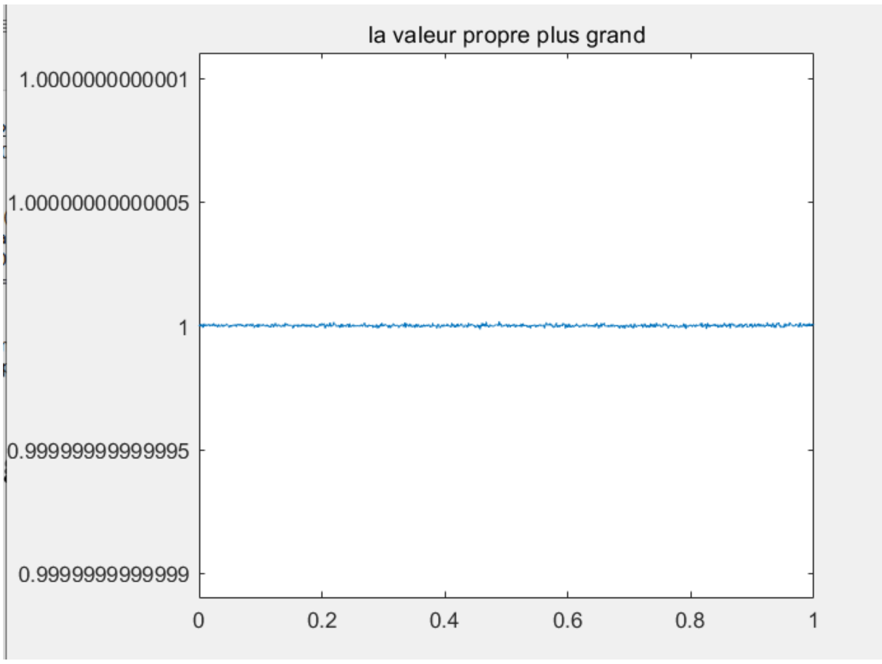
1) La matrice d'amplification est ici :

$$\begin{bmatrix} inv(1 + 0.25\Delta t^2 M^{-1}K) * (1 - 0.25\Delta t^2 M^{-1}K) & inv(1 + 0.25\Delta t^2 M^{-1}K) * \Delta t \\ -0.5\Delta t M^{-1}\ddot{K} * (1 + inv(1 + 0.25\Delta t^2 M^{-1}K) * (1 - 0.25\Delta t^2 M^{-1}K)) & 1 - 0.5\Delta t^2 M^{-1}K * inv(1 + 0.25\Delta t^2 M^{-1}K) \end{bmatrix}$$

2) Pour obtenir le pas de temps critique, d'abord, il faut calculer la valeur propre plus grand de la matrice d'amplification pour différente Δt . Ici c'est les codes de calcule :

```
clear all
m=2;
a=0.5;
g=9.81;
F0=20;
w=2*pi;
M=(m*a^2).*[2,1;1,1];
K=(m*g*a).*[2,0;0,1];
valeur_max=[];
syms T_delta
A=[inv(eye(2)+(0.25*T_delta^2).*inv(M)*K)*(eye(2)-(0.25*(T_delta^2)).*inv(M)*K),T_delta.*inv(eye(2)+(0.25*T_delta^2).*inv(M)*K);
   (-0.5*T_delta).*inv(M)*K*(eye(2)+inv(eye(2)+(0.25*T_delta^2).*inv(M)*K)*(eye(2)-(0.25*T_delta^2).*inv(M)*K)),eye(2)-(0.5*T_delta^2).*inv(M)*K*inv(eye(2)+(0.25*T_delta^2).*inv(M)*K)];
for T_delta=0:0.001:1;
   valeur_max=[valeur_max,max(abs(eig(eval(A))))];
end
t=0:0.001:1;
plot(t, valeur_max);
title("la valeur propre plus grand")
```

Et le figure est ici：



La valeur propre plus grand est presque constante(égale à 1)

3) C’est pareil avec le précédent.À t=0, $sinwt$ =0, alors la relation entre $q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0$ est :

$$\mathrm{m}a^2 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ddot{q}_0 + \mathrm{mga} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) Au début de mon analyse de question, on a déjà obtenu :

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t * \dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{4} * \ddot{q}_n + 0.25 * \Delta t^2 \ddot{q}_{n+1}$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} * \ddot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{n+1}$$

Et pour l’équation : $\mathrm{m}a^2 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ddot{q}_n + \mathrm{mga} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} q_n = F_0 sinwt \begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,

Il faut faire la discrétisation. Alors on peut obtenir :

$$M\ddot{q}_{n+1} + Kq_{n+1} = F_0 \sin\{w(n+1)\Delta t\} * \begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix})$$

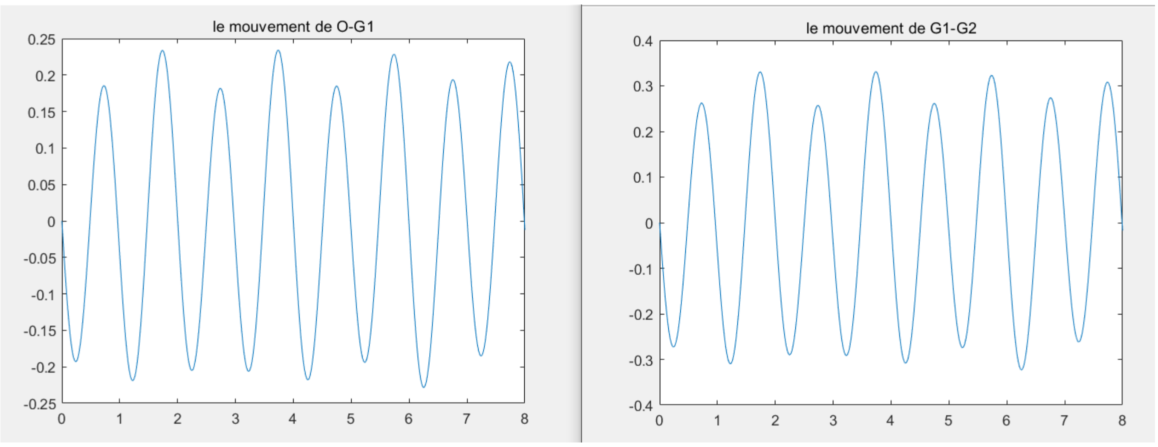
avec M= $\mathrm{m}a^2 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \mathrm{mga} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) A l'aide des relations précédentes obtenues et l'analyses, on peut programmer et ici, ces sont les code en utilisant un schéma de NEWMARK implicite :

```
a=0.5;
g=9.81;
F0=20;
w=2*pi;
T0=8;
M=(m*a^2).*[2,1;1,1];
K=(m*g*a).*[2,0;0,1];
T_delta=0.02;
n=floor(T0/T_delta);
vec=[a;a/sqrt(2)];
qj=zeros(2,n);
qj_derive=zeros(2,n);
qj_prime2=zeros(2,n);
%les conditions initiales
qj(:,1)=[0;0];
qj_derive(:,1)=[-1.31519275;-1.85996342];

for i=1:n-1
    qj_prime2(:,i)=-inv(M)*K*qj(:,i)+(F0*sin(w*i*T_delta)).*inv(M)*vec;
    qj(:,i+1)=inv(eye(2)+(0.25*T_delta^2).*inv(M)*K)*(qj(:,i)+T_delta.*qj_derive(:,i)+(0.25*(T_delta^2)).*qj_prime2(:,i)+(0.25*(T_delta^2)*F0*sin((i+1)*w*T_delta)).*inv(M)*vec);
    qj_prime2(:,i+1)=-inv(M)*K*qj(:,i+1)+(F0*sin((i+1)*w*T_delta)).*inv(M)*vec;
    qj_derive(:,i+1)=qj_derive(:,i)+(T_delta/2).*qj_prime2(:,i)+(T_delta/2).*qj_prime2(:,i+1);
end
t=linspace(0,T0,n);
ti=t';
figure(1);
plot(ti,qj(1,:));
title("le mouvement de O-G1")
figure(2);
plot(ti,qj(2,:));
title("le mouvement de G1-G2");
% q1=qj(:,1)
% q2=qj(:,2)
% q3=qj(:,3)
% q25=qj(:,25)
% q1_derive=qj_derive(:,1)
% q2_derive=qj_derive(:,2)
% q3_derive=qj_derive(:,3)
% q25_derive=qj_derive(:,25)
```

6) On choisit la valeur de $\Delta t = 0.02s$, alors on peut obtenir deux figures ici :



Et en même temps, on peut obtenir :

q(0)=[0;0] ,

q(Δt)= $[-0.0261; -0.0368]$,

q($2 * \Delta t$)= $[-0.0514; -0.0727]$,

q(0.5)= $[-0.0054\,; -0.0077]$,

$\dot{q}(0) = [-1.3152\,; -1.8600]$,

$\dot{q}(\Delta t) = [-1.2903\,; -1.8247]$,

$\dot{q}(2 * \Delta t) = [-1.2453\,; -1.7611]$,

$\dot{q}(0.5) = [1.2243\,; 1.7315]$,