

Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

L'équation du mouvement d'un pendule simple :

$$\text{Lagrangien : } L = E_c - E_p ,$$

$$\text{où } E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2, E_p = -mgd \cos \theta + cte$$

$$\text{Or } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \delta w, \delta w = 0$$

$$\text{Donc } I \ddot{\theta} + mgd \sin \theta = 0$$

$$\text{Et } \theta \ll 1$$

$$\text{On a } I \ddot{\theta} + mg\theta = 0$$

Solution analytique :

1.1) Les codes de résoudre l'équation différentielle est :

```
%% La Solution Analytique  
w0 = 2*pi;  
q = dsolve('D2q + w0^2*q = 0', 'q(0) = 1', 'Dq(0) = 0');  
% On trouve la résultat est q = cos(w0*x), donc q'=-w0*sin(x)
```

le résultat est :

$$q =$$

$$\exp(-t*w0*1i)/2 + \exp(t*w0*1i)/2$$

$$\text{Donc } q = \cos(\omega_0 x)$$

$$1.2) \quad E^* = \frac{1}{2} (\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 x) + \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 x)) = \frac{1}{2} \omega_0^2$$

On trouve que E^* est une constante, donc le système est conservatif.

Schéma d'EULER explicite :

2.1) On sait que :

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} + \Delta t \times \begin{pmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} q_{j+1} &= q_j + \Delta t \times \dot{q}_j \\ \dot{q}_{j+1} &= \dot{q}_j + \Delta t \times \ddot{q}_j \end{aligned}$$

Or

$$\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 q_{j+1}$$

Donc on a

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$$

2.2) Les codes :

```

%% Résolution avec un Schéma d'EULER Explicite
% On utilise la méthode 2:
T0 = 3;
dt = 0.01; % pas de temps

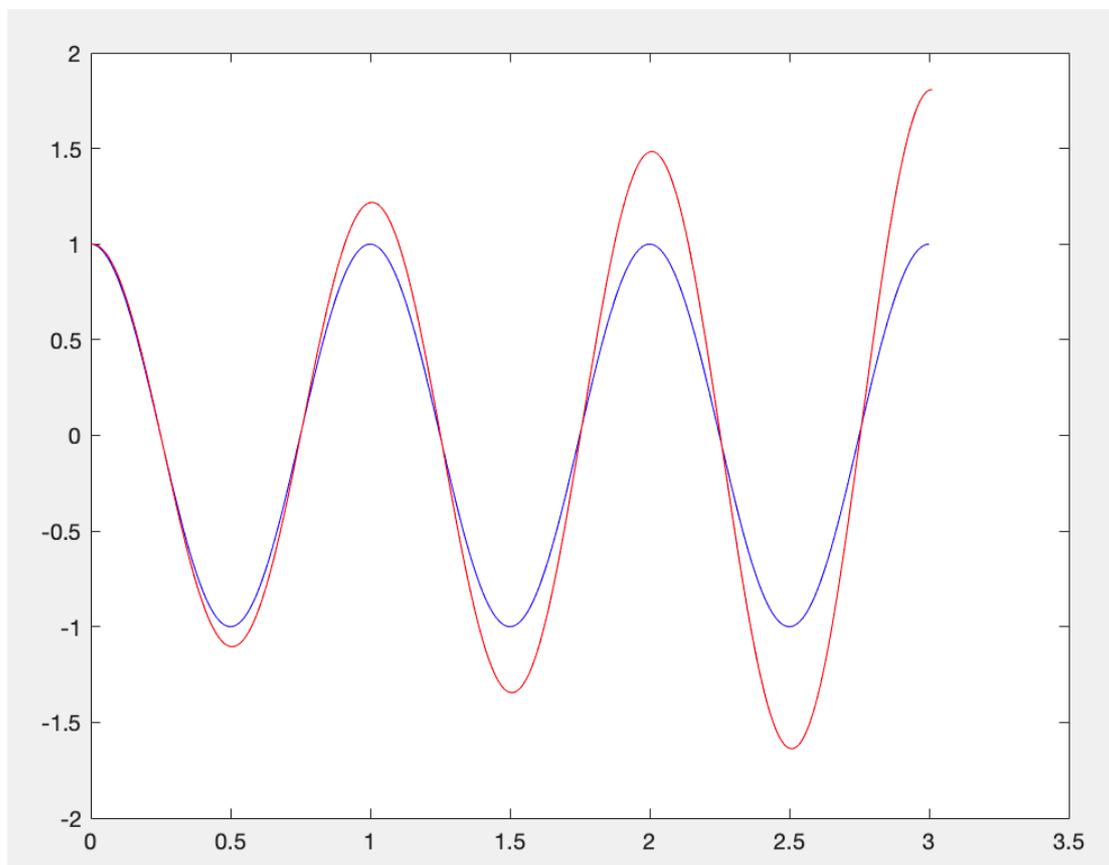
A = [1 dt; % matrice d'amplification
     -w0^2*dt 1];
t = 0; % temps initial
i = 1; % indice
U = [1; 0]; % le vecteur [q; q']
q_t = [U(1); t]; % l'ensemble des vecteur [q; t] de chaque pas de temps
E = 1/2*(U(2)^2 + w0^2*U(1)^2);
while t <= T0 % Simulation entre [0, T0]
    U = A * U; % le schéma d'Euler explicite
    t = t + dt;
    i = i + 1;
    q_t(1, i) = U(1); % stocker le résultat du chaque instant t
    q_t(2, i) = t;
    E(i) = 1/2*(U(2)^2 + w0^2*U(1)^2);
end
figure('name','Solution Analytique et d'Euler explicite')
plot(x, y, 'blue');
hold on;
plot(q_t(2, :), q_t(1, :), 'r');

```

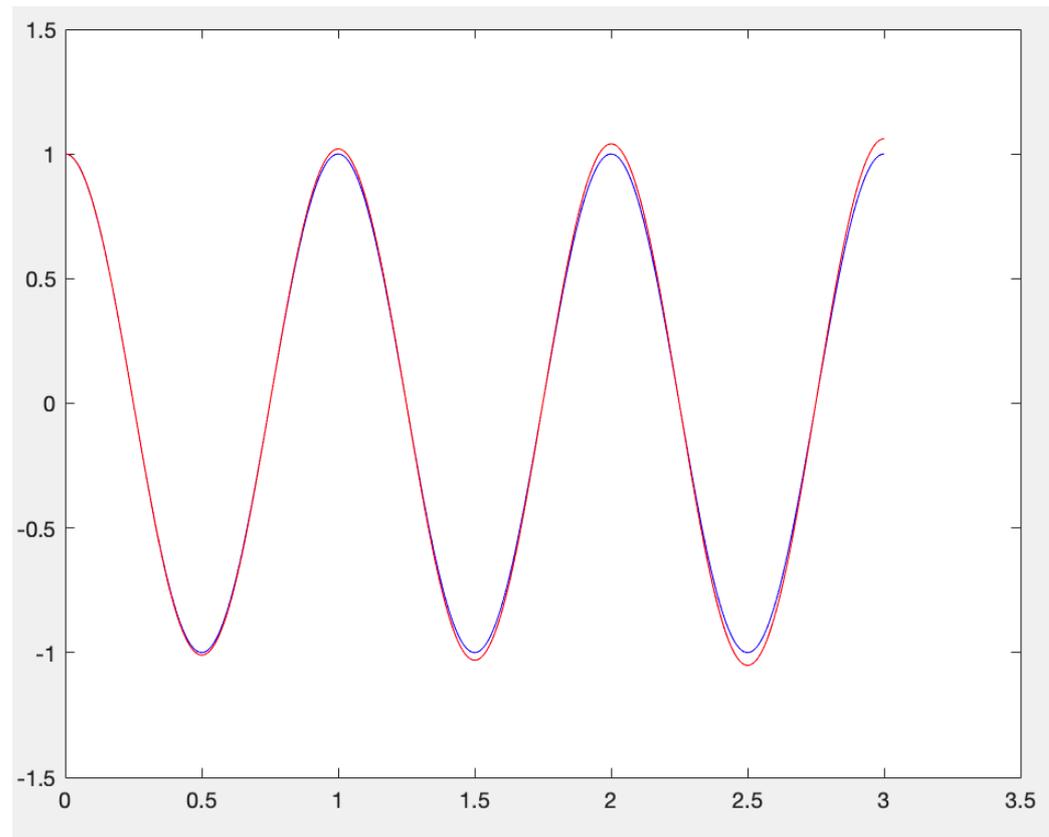
```
figure('name','E*')  
x1 = [0 : 0.02 : 3];  
y1 = Et;  
plot(x1, y1, 'o');  
hold on;  
plot(q_t(2, :), E, 'green');  
  
eig(A)
```

2.3)

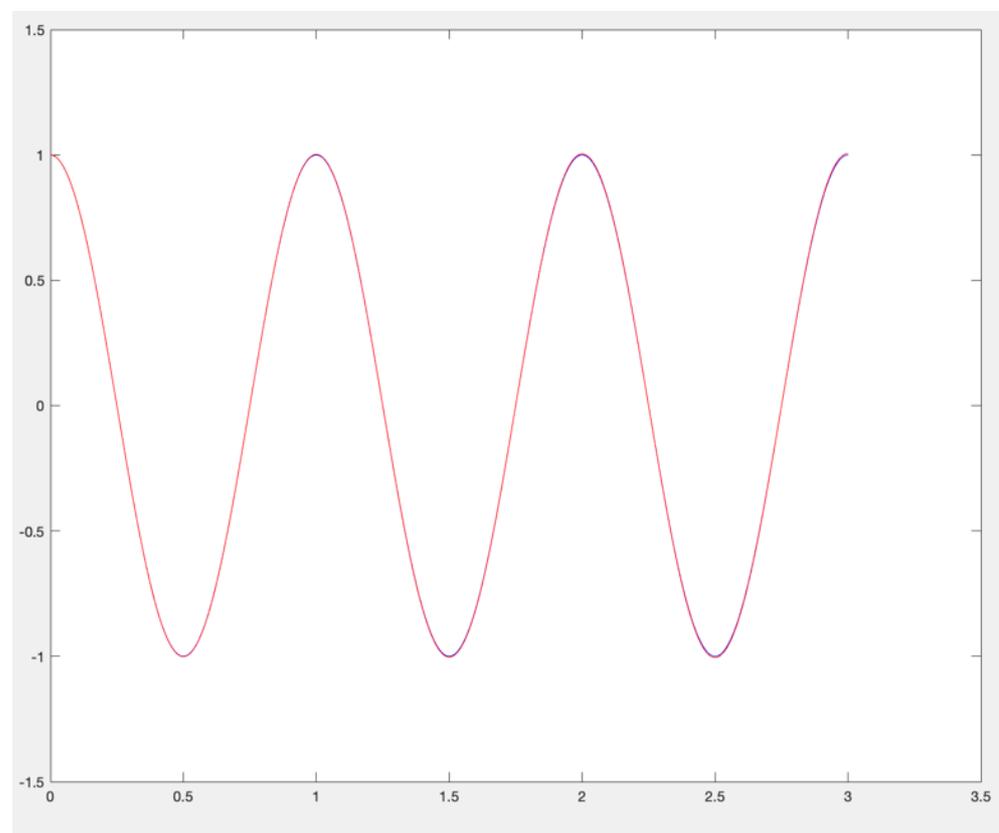
Quand $dt = 0.01$: (la solution analytique est en bleu, et numérique est en rouge)



Quand $dt = 0.001$:

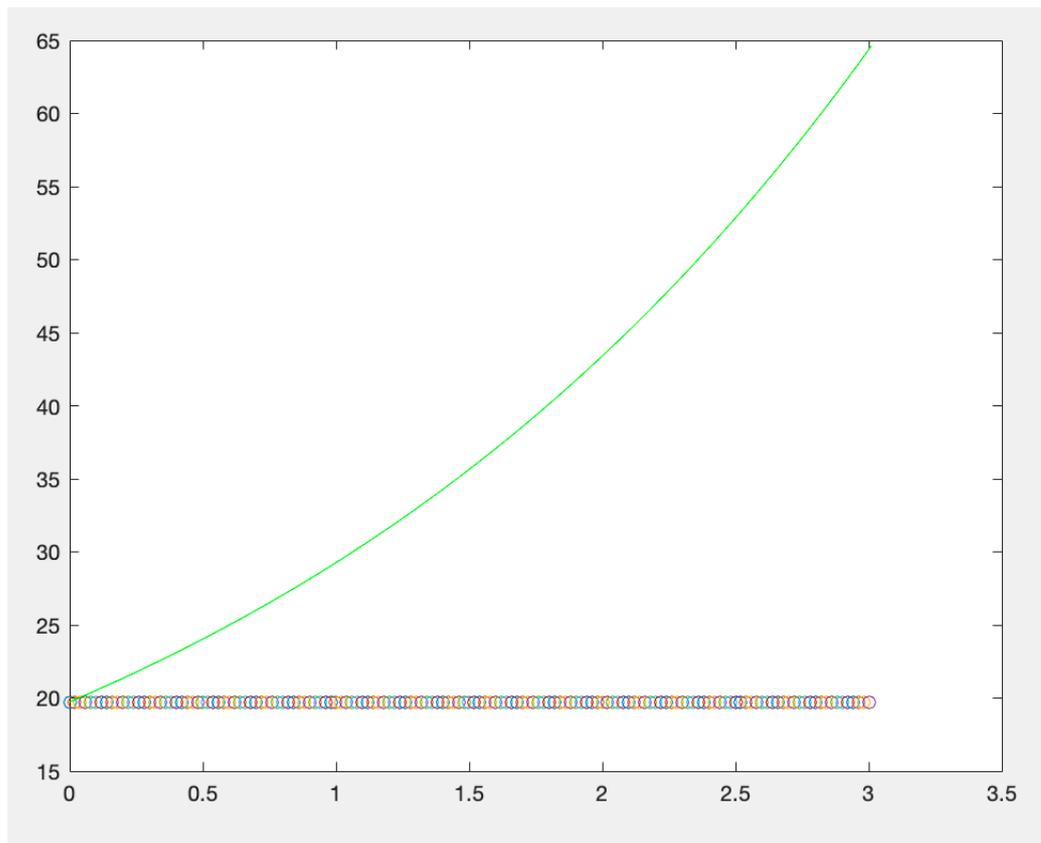


Quand $dt = 0.0001$:

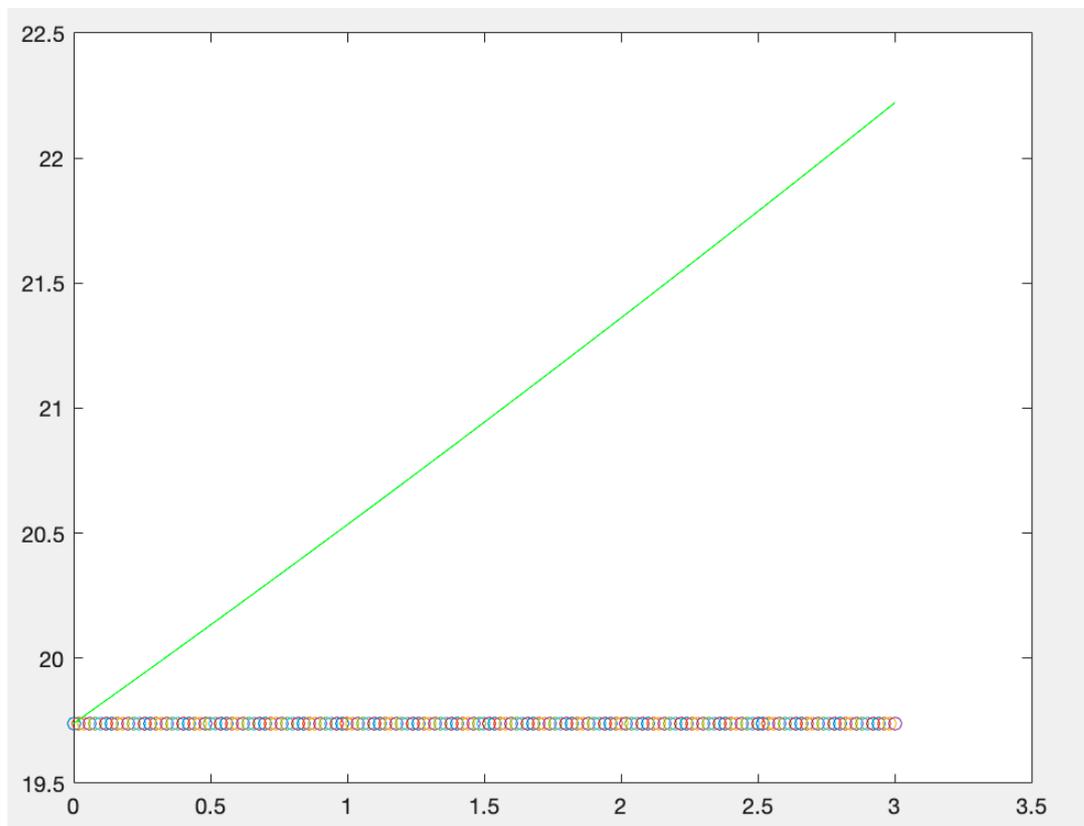


Donc si dt est plus petit, la solution numérique est plus précis.

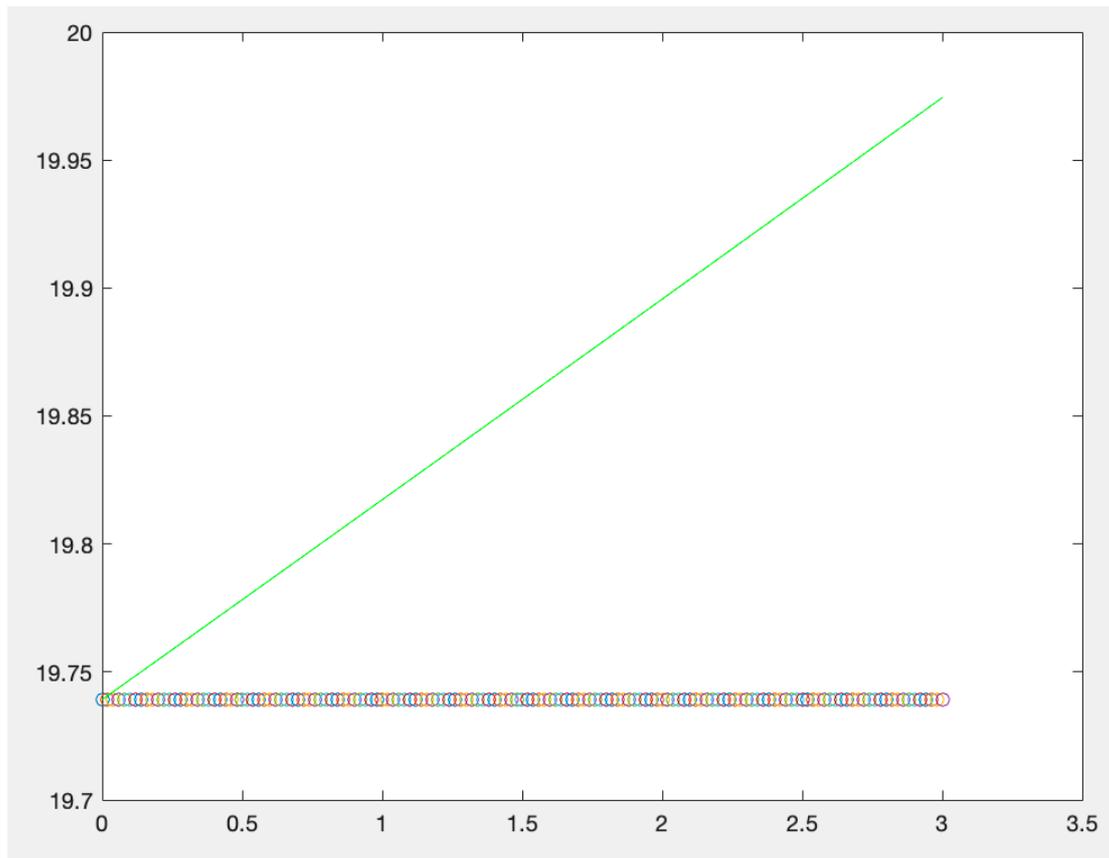
2.4) Quand $dt = 0.01$: (la valeur théorique du E^* est de cercle, et numérique est en vert)



Quand $dt = 0.001$:



Quand $dt = 0.0001$:



On peut trouver que E^* de méthode numérique est toujours descend, mais le maximum est plus petit si dt est plus petit.

2.5)

Quand $dt = 0.01$, les valeurs propres de A est :

$$\begin{aligned} & \mathbf{1.0000 + 0.0628i} \\ & \mathbf{1.0000 - 0.0628i} \end{aligned}$$

Quand $dt = 0.001$, les valeurs propres de A est:

$$\begin{aligned} & \mathbf{1.0000 + 0.0063i} \\ & \mathbf{1.0000 - 0.0063i} \end{aligned}$$

Quand $dt = 0.0001$, les valeurs propres de A est:

$$1.0000 + 0.0006i$$

$$1.0000 - 0.0006i$$

On peut trouver que la partie réelle des valeurs propres est 1, et le module de partie imaginaire est plus petit si Δt est plus petit, s'il est grand, la résolution est alors instable.

Schéma d'EULER implicite :

3.1)

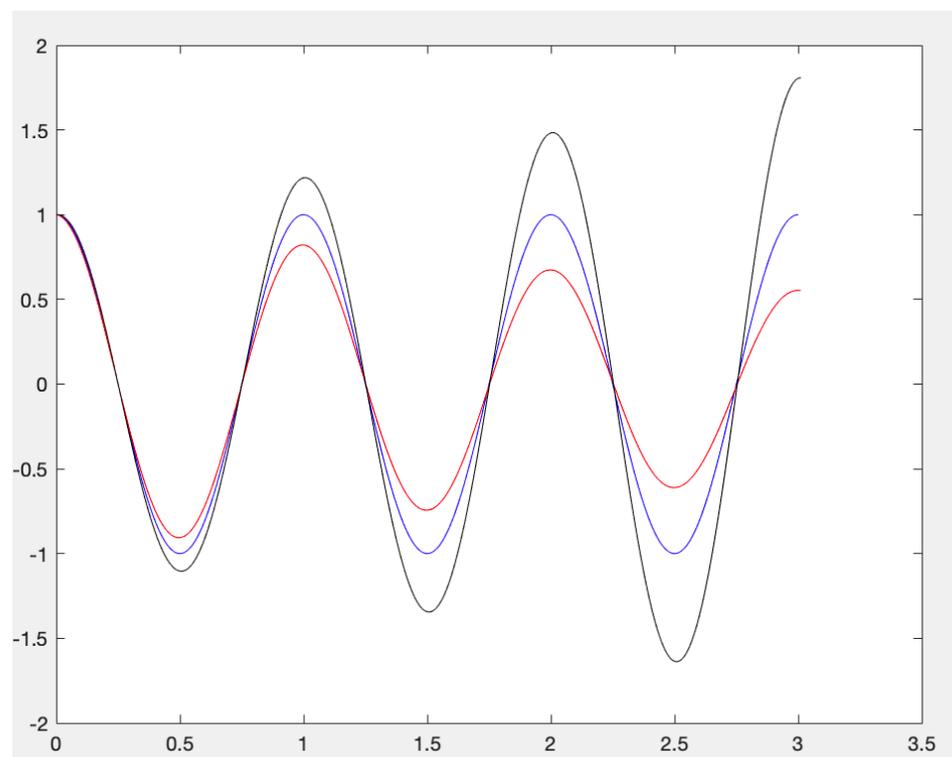
Les codes d'Euler implicite:

```
%% Résolution avec un Schéma d'EULER Implicite
% On utilise la méthode 2:
Ai = [1 -dt; % inverse de matrice d'amplification
      w0^2*dt 1];
A = inv(Ai);

t = 0; % temps initial
i = 1; % indice
U = [1; 0]; % le vecteur [q; q']
q_t = [U(1); t]; % l'ensemble des vecteur [q; t] de chaque pas de temps
E = 1/2*(U(2)^2 + w0^2*U(1)^2);
while t <= T0 % Simulation entre [0, T0]
    U = A * U; % le schéma d'Euler explicite
    t = t + dt;
    i = i + 1;
    q_t(1, i) = U(1); % stocker le résultat du chaque instant t
    q_t(2, i) = t;
    E(i) = 1/2*(U(2)^2 + w0^2*U(1)^2);
end
figure('name','Solution Analytique et d'Euler implicite')
plot(x, y, 'blue');
hold on;
plot(q_t(2, :), q_t(1, :), 'r');
hold on;
```

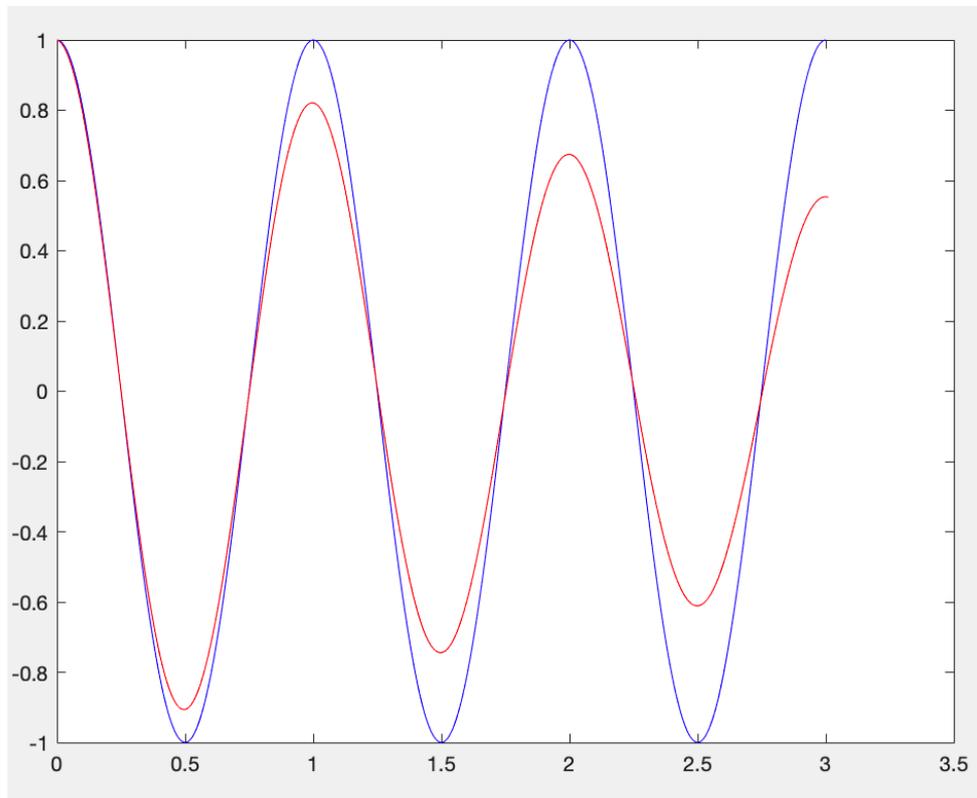
3.2)

le résultat d'Euler explicite est en noir, le résultat d'Euler implicite est en rouge,
le résultat analytique est en bleu

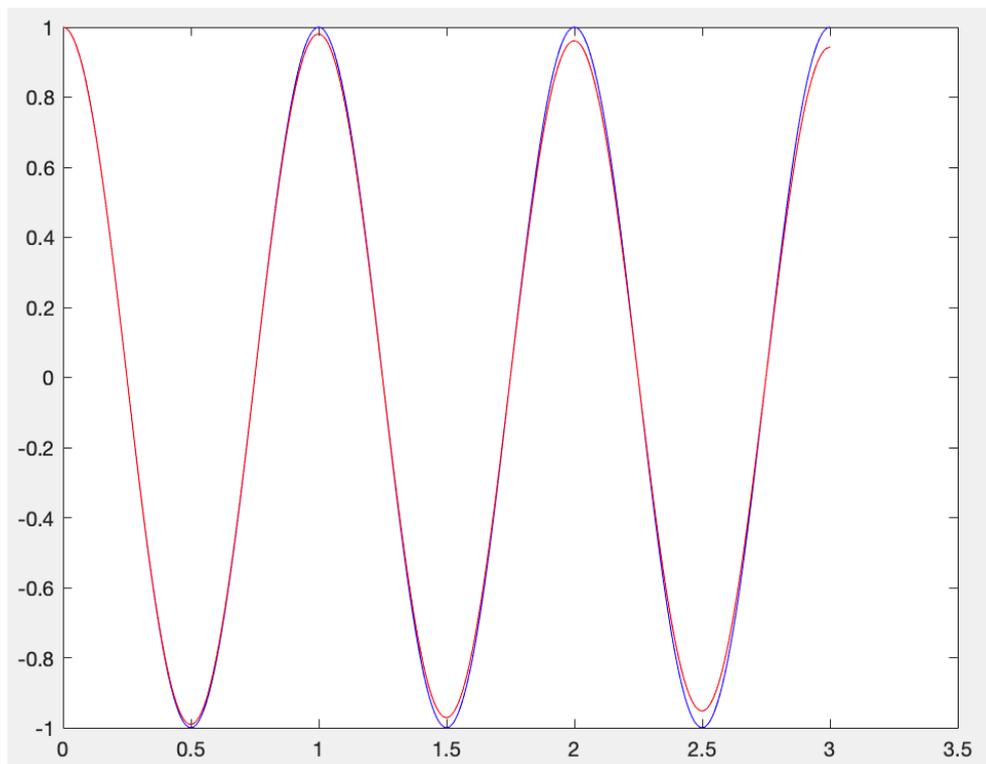


3.3)

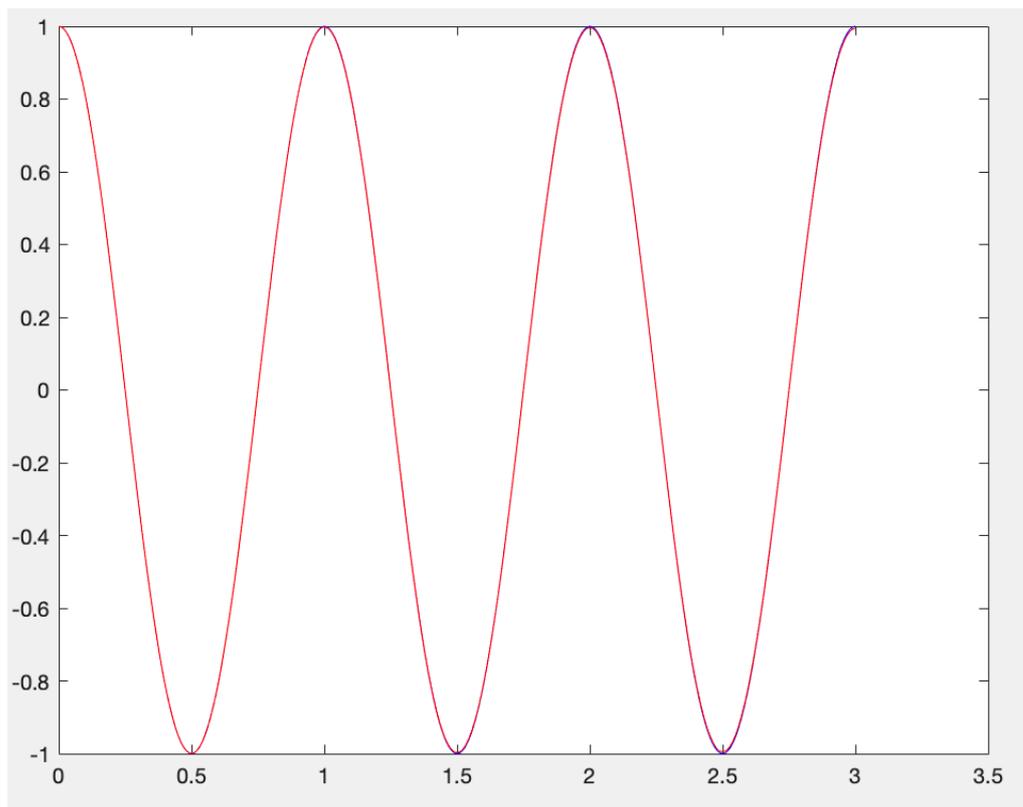
Quand $dt = 0.01$: (la solution analytique est en bleu, et numérique est en rouge)



Quand $dt = 0.001$:

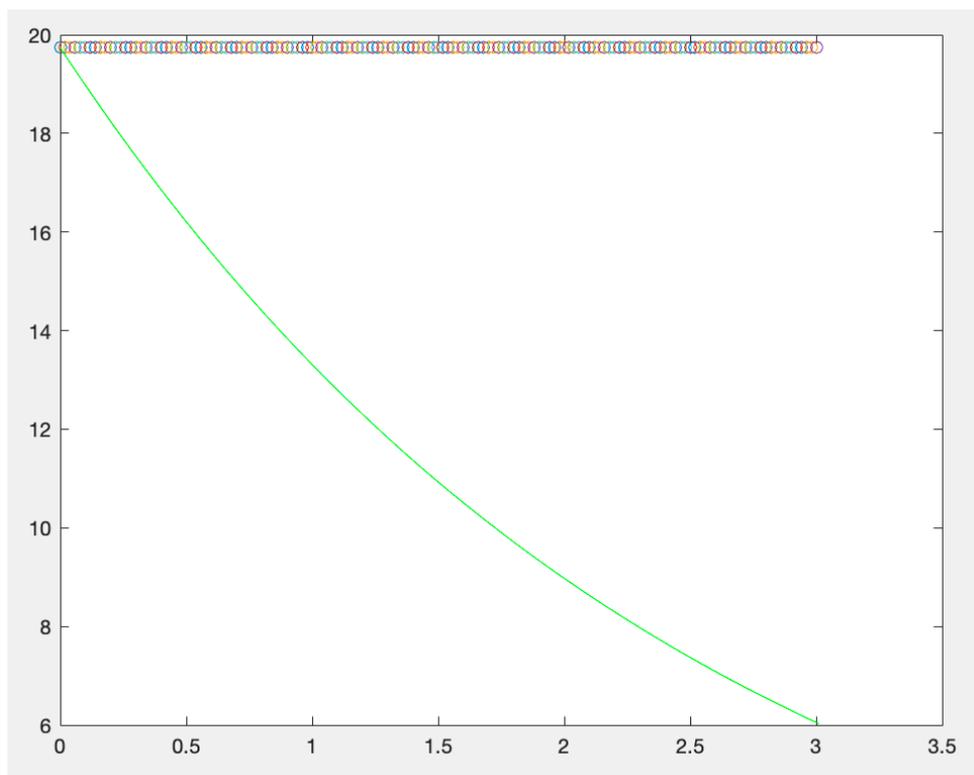


Quand $dt = 0.0001$:

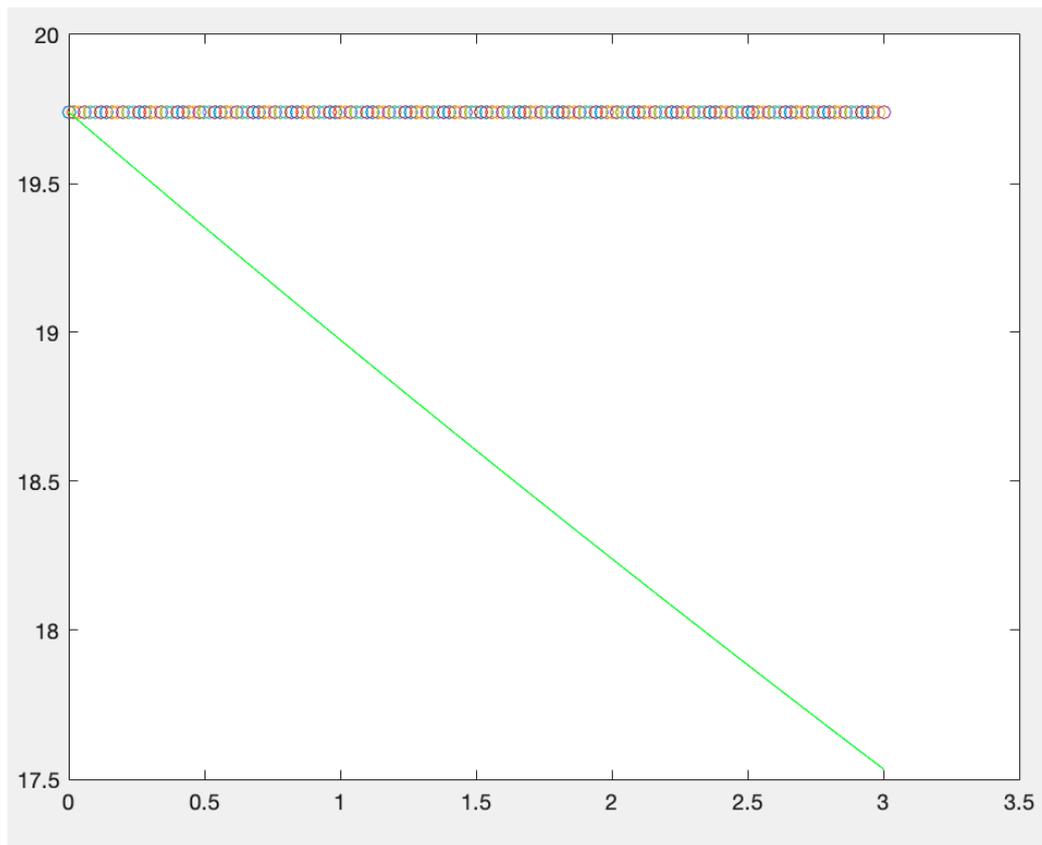


Donc si dt est plus petit, la solution numérique est plus précis.

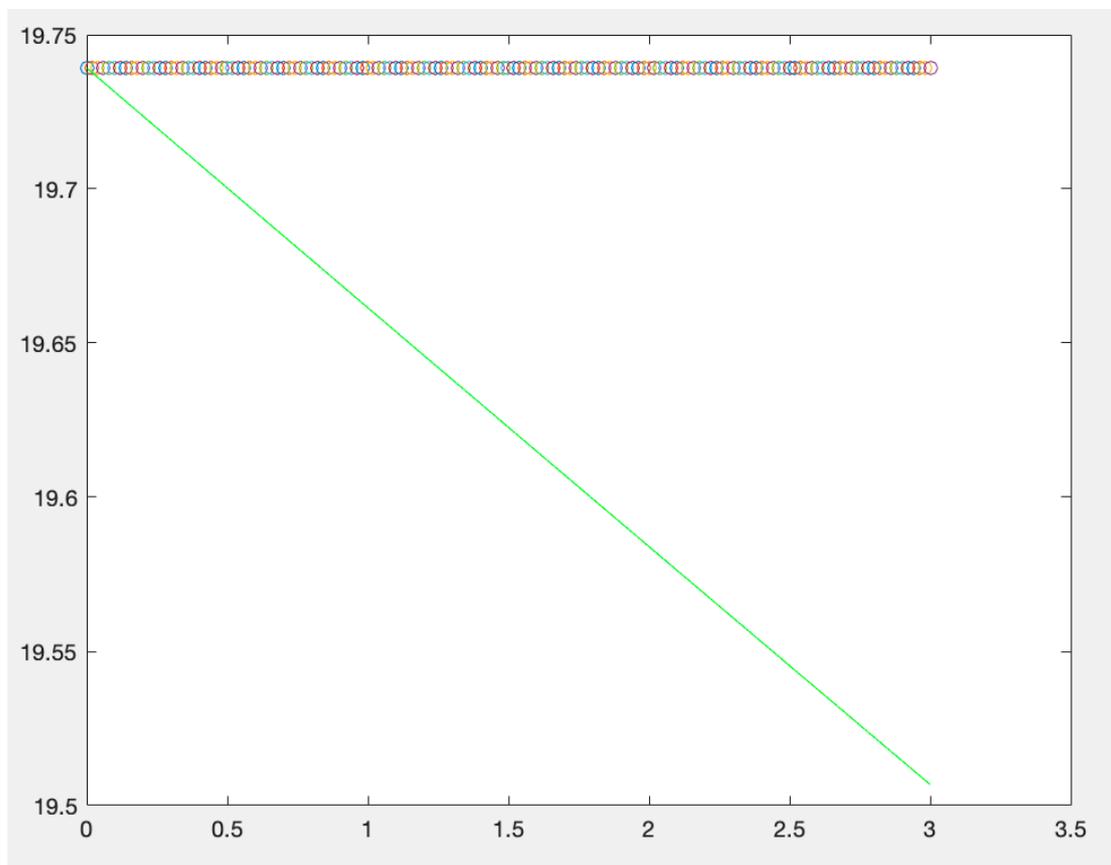
3.4) Quand $dt = 0.01$: (la valeur théorique du E^* est de cercle, et numérique est en vert)



Quand $dt = 0.001$:



Quand $dt = 0.0001$:



On peut trouver que E^* de méthode numérique est toujours descend, mais le minimum est plus grand si dt est plus petit.

3.5)

Quand $dt = 0.01$, les valeurs propres de A est :

$$\begin{aligned} &0.9961 + 0.0626i \\ &0.9961 - 0.0626i \end{aligned}$$

Quand $dt = 0.001$, les valeurs propres de A est:

$$\begin{aligned} &1.0000 + 0.0063i \\ &1.0000 - 0.0063i \end{aligned}$$

Quand $dt = 0.0001$, les valeurs propres de A est:

$$\begin{aligned} &1.0000 + 0.0006i \\ &1.0000 - 0.0006i \end{aligned}$$

On peut trouver que la partie réelle des valeurs propres est égale ou inférieur à 1, et le module de partie imaginaire est plus petit si dt est plus petit, s'il est grand, la résolution est alors instable.

Schéma de RUNGE KUTTA

4.1)

On sait que: $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

soit $dq = \dot{q}$

on a donc $\begin{cases} \dot{q} = dq \\ \ddot{q} = -\omega_0^2 q \end{cases}$, c'est la formulation adaptée aux schéma du premier ordre.

4.2) Le figure de programme de schéma de Runge Kutta est ci-dessous :

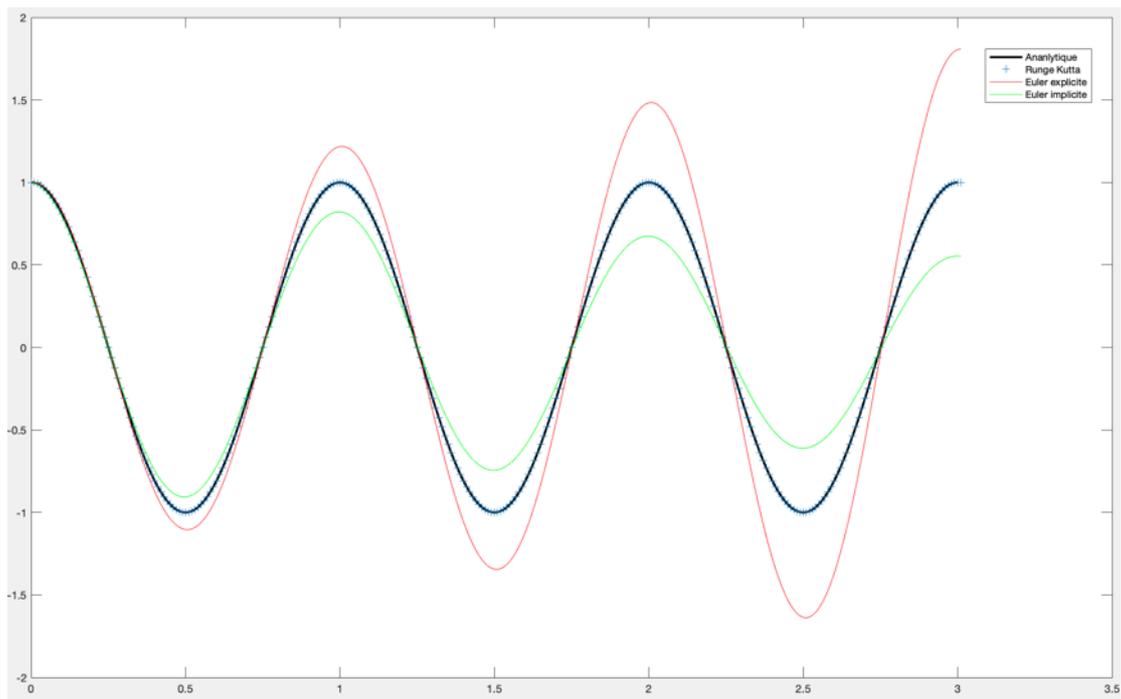
```
%% Résolution avec un Schéma de RUNGE KUTTA
T0 = 3;
dt = 0.01; % pas de temps

% A = [1 dt; % matrice d'amplification
% -w0^2*dt 1];
t = 0; % temps initial
i = 1; % indice
U = [1; 0]; % initialization du vecteur [q; dq]
q_t = [U(1); t]; % l'ensemble des vecteur [q; t] de chaque pas de temps
E = 1/2*(U(2)^2 + w0^2*U(1)^2);

while t <= T0 % Simulation entre [0, T0]
    % le schéma de Runge Kutta
    K1 = cal_f(U,w0);
    %U = U + K1 * dt/2;
    K2 = cal_f(U + K1 * dt/2,w0);
    %U = U + K2 * dt/2;
    K3 = cal_f(U + K2 * dt/2,w0);
    %U = U + K3 * dt;
    K4 = cal_f(U + K3 * dt,w0);
    U = U + (K1+2*K2+2*K3+K4)*dt/6;

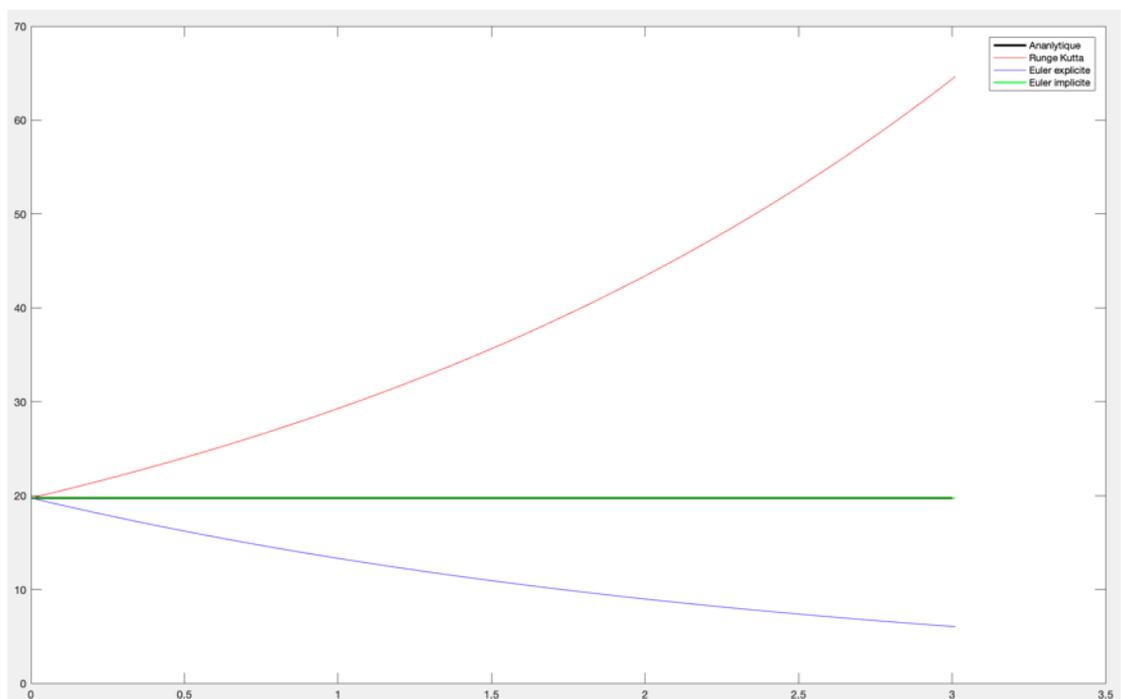
    t = t + dt;
    i = i + 1;
    q_t(1, i) = U(1); % stocker le résultat du chaque instant t
    q_t(2, i) = t;
    E(i) = 1/2*(U(2)^2 + w0^2*U(1)^2);
end
```

4.3)



Quand $\Delta t = 0.01$, on peut voir que la solution du schéma de Runge Kutta est plus précis que celles de schéma d'Euler explicite et implicite.

4.4)



Quand $\Delta t = 0.01$, on peut voir que la quantité E^* du schéma de Runge Kutta est plus précis que celles de schéma d'Euler explicite et implicite.