

Etude d'un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté

1.1) Résolution avec un schéma d'EULER explicite

Le programme de schéma d'EULER explicite de ce système est :

```
%% Résolution avec un Schéma d'EULER Explicite
T0 = 1;
dt = 0.0064*0.8; % pas de temps

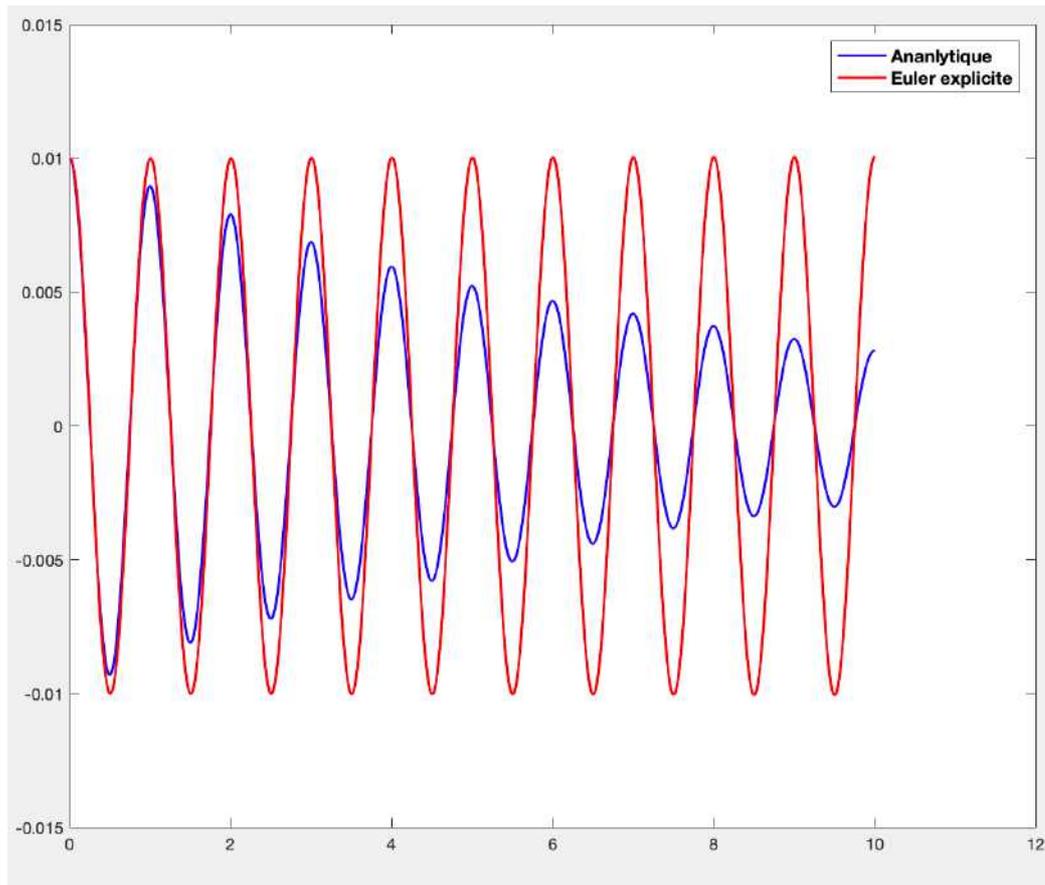
A = [1 dt; % matrice d'amplification
     -w0^2*dt 1-2*eps*w0*dt];
t = 0; % temps initial
i = 1; % indice
U = [x0; dx0]; % le vecteur [q; q']
q_t = [U(1); t]; % l'ensemble des vecteur [q; t] de chaque pas de temps
E = 1/2*(U(2)^2 + w0^2*U(1)^2);
while t <= 10*T0 % Simulation entre [0, 10*T0]
    U = A * U; % le schéma d'Euler explicite
    t = t + dt;
    i = i + 1;
    q_t(1, i) = U(1); % stocker le résultat du chaque instant t
    q_t(2, i) = t;
    %E(i) = 1/2*(U(2)^2 + w0^2*U(1)^2);
end
ex = q_t;
%ex_e = E;
save explicite.mat ex

eig(A)|
```

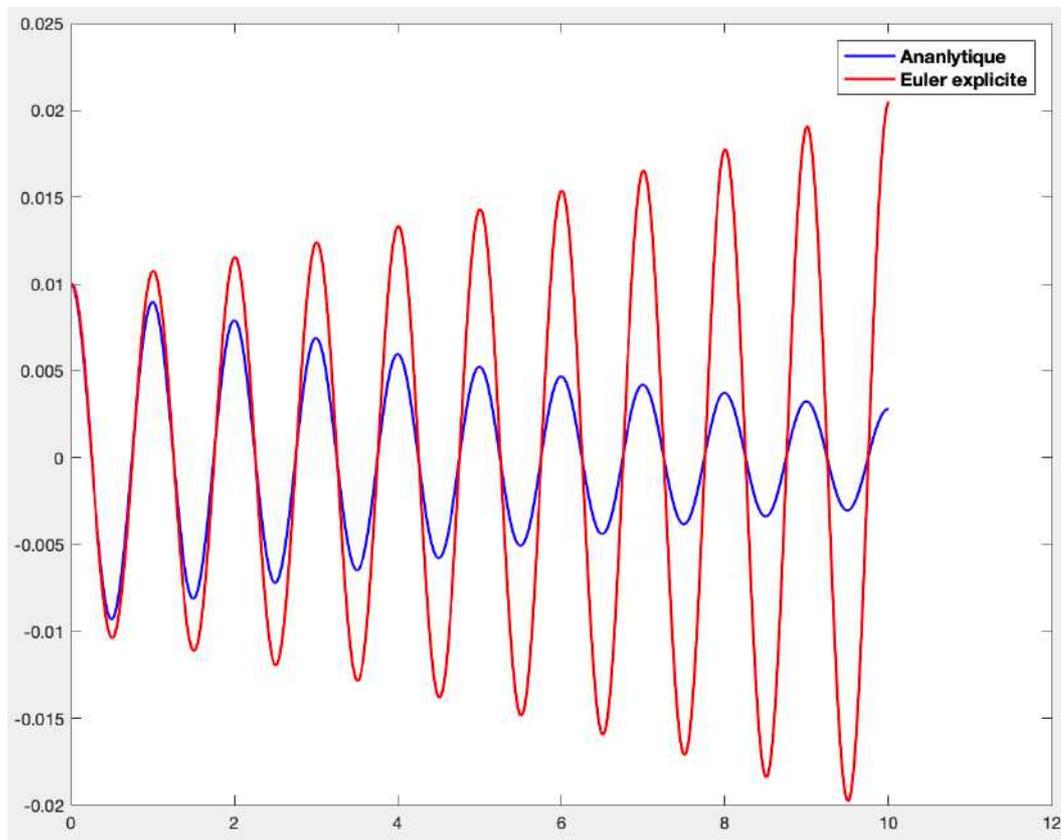
1.1.a)

On choisit $\Delta t = 0.01 > \frac{2\varepsilon}{\omega_0} = 0.0064$, le résultat obtenu est montré par le figure ci-

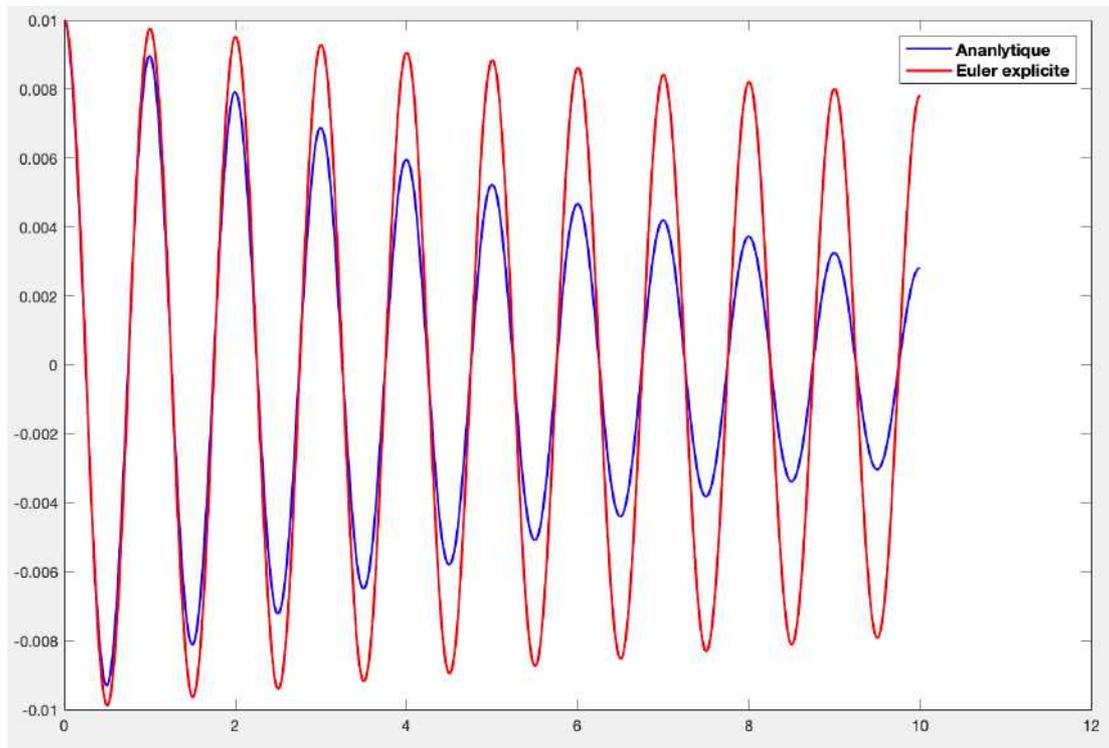
dessous :



1.1.b) Quand on choisit $\Delta t = \frac{2\varepsilon}{\omega_0} = 0.0064$:



1.1.c) Quand on choisit $\Delta t = 0.8 \times \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$:

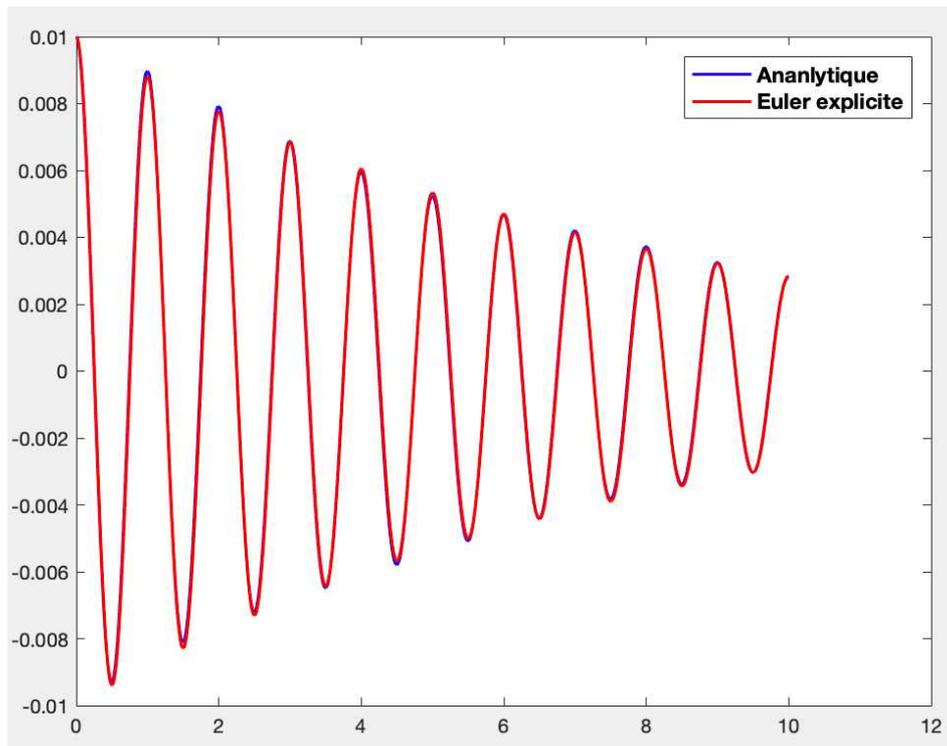


1.1.d)

On peut voir le graphe de solution exacte et solution numérique, il est plus précis si la solution numérique est plus proche de la solution analytique.

Si on choisit le rapport $\frac{\Delta t}{\frac{2\varepsilon}{\omega_0}}$ est assez petit, par exemple 0.0001, les résultats obtenus

est comme le figure montre ci-dessous :



On peut voir que c'est assez précis.

1.2) Résolution avec un schéma d'EULER implicite

Le programme de schéma d'EULER implicite dans ce problème est :

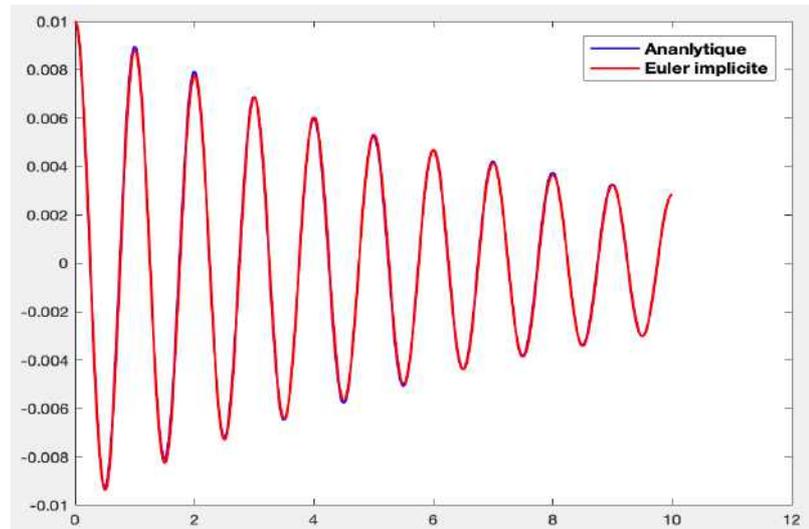
```
%% Résolution avec un Schéma d'EULER Implicite
T0 = 1;
dt = 0.001; % pas de temps

Ai = [1 -dt; % inverse de matrice d'amplification
      w0^2*dt 1+2*eps*w0*dt];
A = inv(Ai);

t = 0; % temps initial
i = 1; % indice
U = [x0; dx0]; % le vecteur [q; q']
q_t = [U(1); t]; % l'ensemble des vecteur [q; t] de chaque pas de temps
% E = 1/2*(U(2)^2 + w0^2*U(1)^2);
while t <= 10*T0 % Simulation entre [0, 10*T0]
    U = A * U; % le schéma d'Euler explicite
    t = t + dt;
    i = i + 1;
    q_t(1, i) = U(1); % stocker le résultat du chaque instant t
    q_t(2, i) = t;
    %E(i) = 1/2*(U(2)^2 + w0^2*U(1)^2);
end
im = q_t;
%im_e = E;
save implicite.mat im;
```

Quand Δt est le pas de temps critique, les valeurs propres d'inverse de matrice d'amplification A_i doit être équivalent à 1.

On obtient $\Delta t = 0$, donc si Δt est plus petit, le résultat est plus proche de solution exacte, quand on choisit $\Delta t = 0.00001$, le résultat est :



1.3) Résolution avec un schéma de RUNGE KUTTA

Le programme de schéma de RUNGE KUTTA dans ce problème est :

```

%% Résolution avec un Schéma de RUNGE KUTTA
T0 = 1;
h = 0.04;
dt = h * 2*sqrt(2)/w0; % pas de temps

t = 0; % temps initial
i = 1; % indice
U = [x0; dx0]; % initialization du vecteur [q; dq]
q_t = [U(1); t]; % l'ensemble des vecteur [q; t] de chaque pas de temps
%E = 1/2*(U(2)^2 + w0^2*U(1)^2);

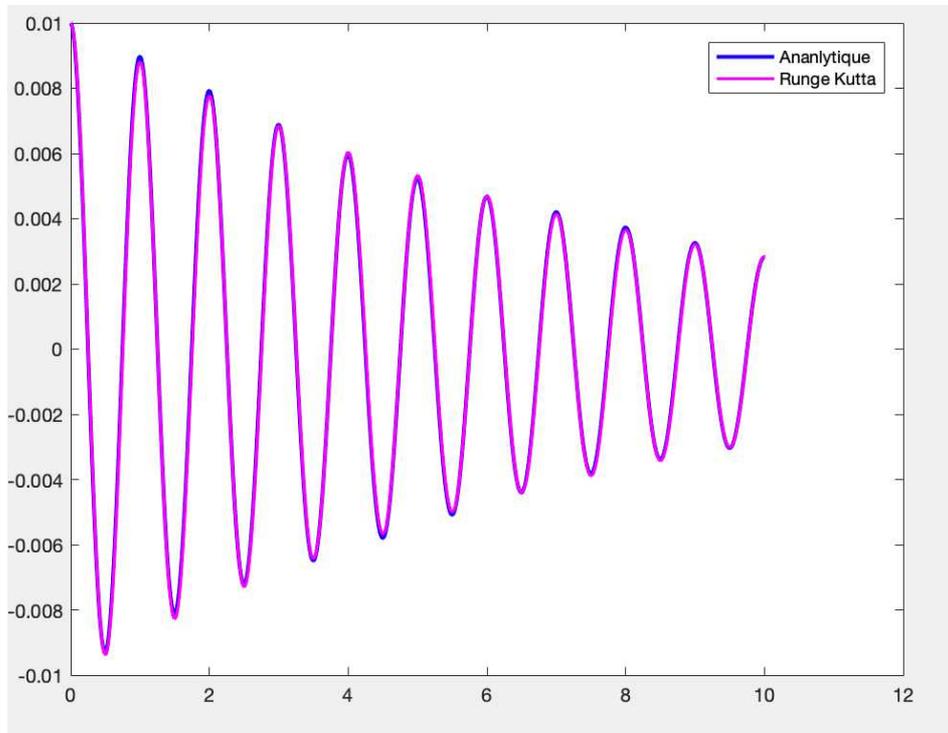
while t <= 10*T0 % Simulation entre [0, 10*T0]
    % le schéma de Runge Kutta
    K1 = cal_f(U,w0,eps);
    %U = U + K1 * dt/2;
    K2 = cal_f(U + K1 * dt/2,w0,eps);
    %U = U + K2 * dt/2;
    K3 = cal_f(U + K2 * dt/2,w0,eps);
    %U = U + K3 * dt;
    K4 = cal_f(U + K3 * dt,w0,eps);
    U = U + (K1+2*K2+2*K3+K4)*dt/6;

    t = t + dt;
    i = i + 1;
    q_t(1, i) = U(1); % stocker le résultat du chaque instant t
    q_t(2, i) = t;
    %E(i) = 1/2*(U(2)^2 + w0^2*U(1)^2);
end
r = q_t;
%r_e = E;
save rk.mat r;

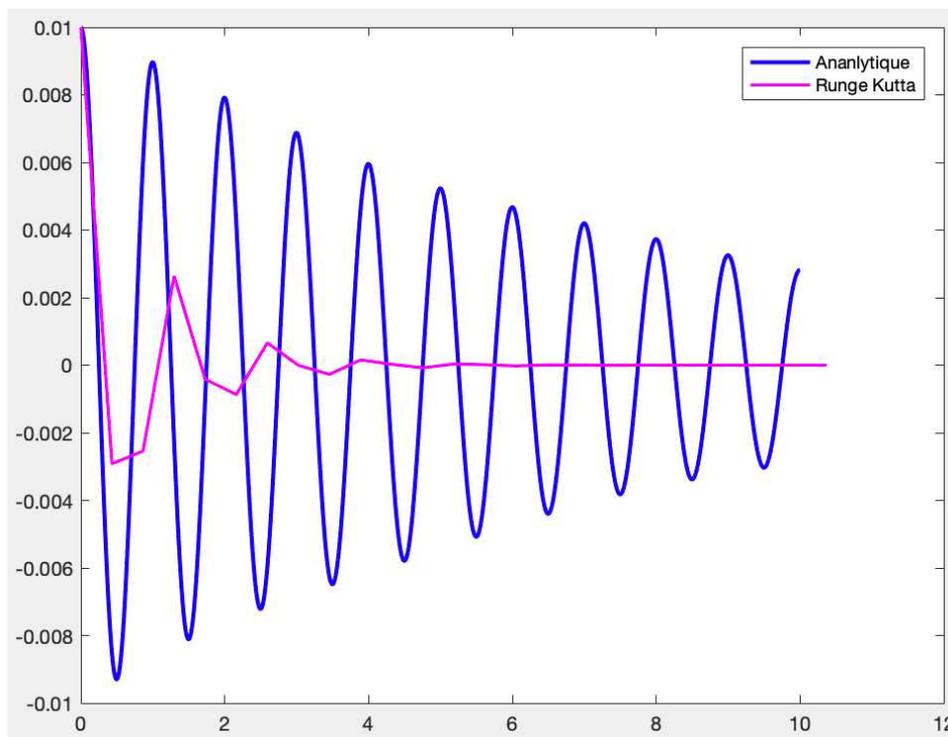
```

1.3.a)

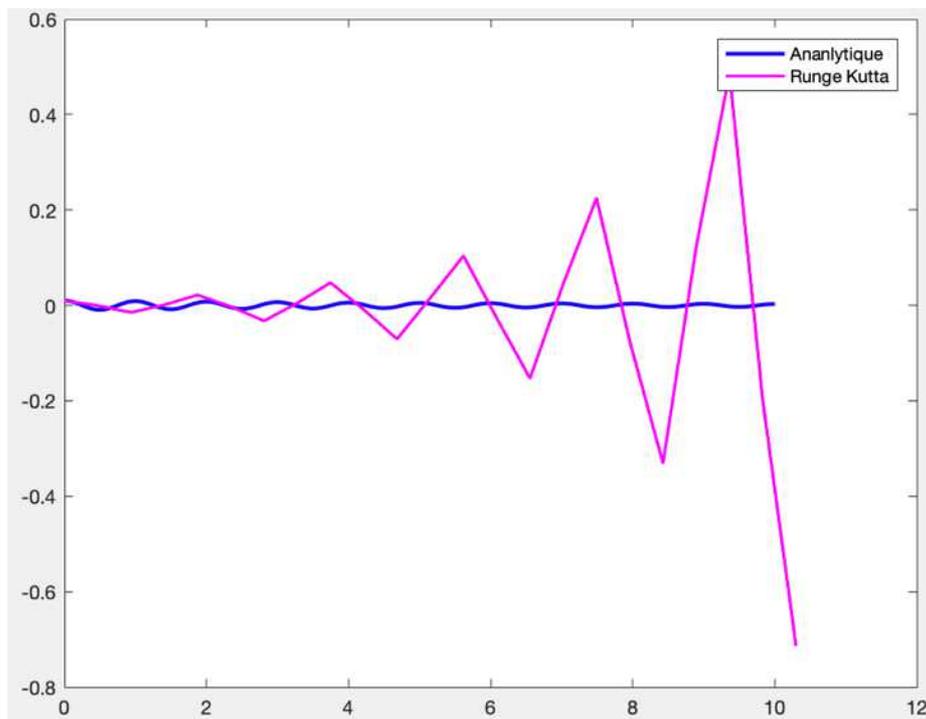
Quand $h = 0.04$:



Quand $h = 0.96$:



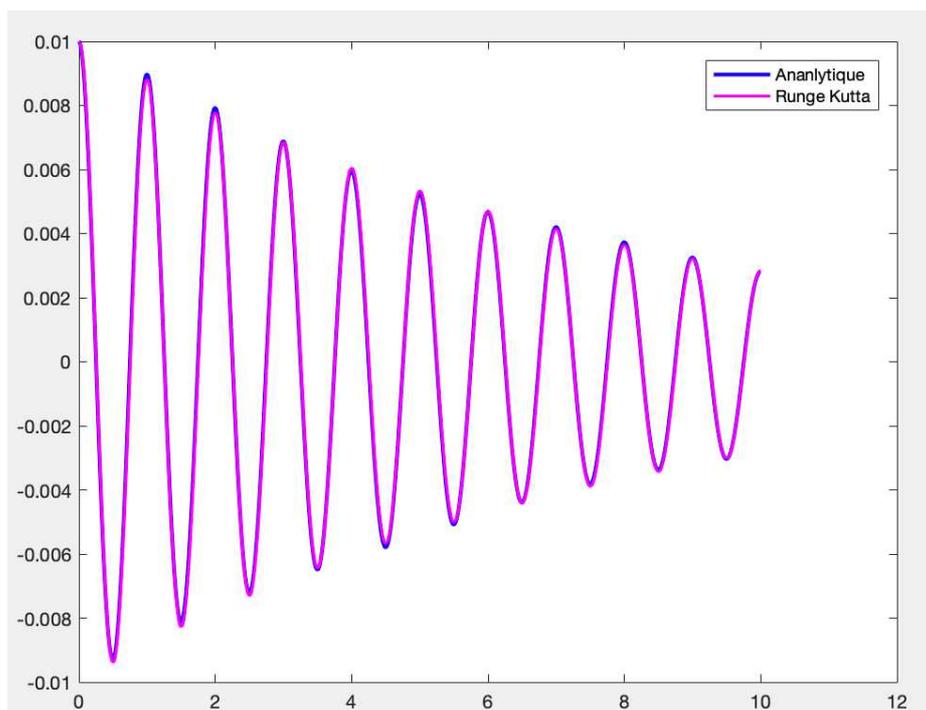
Quand $h = 1.04$:



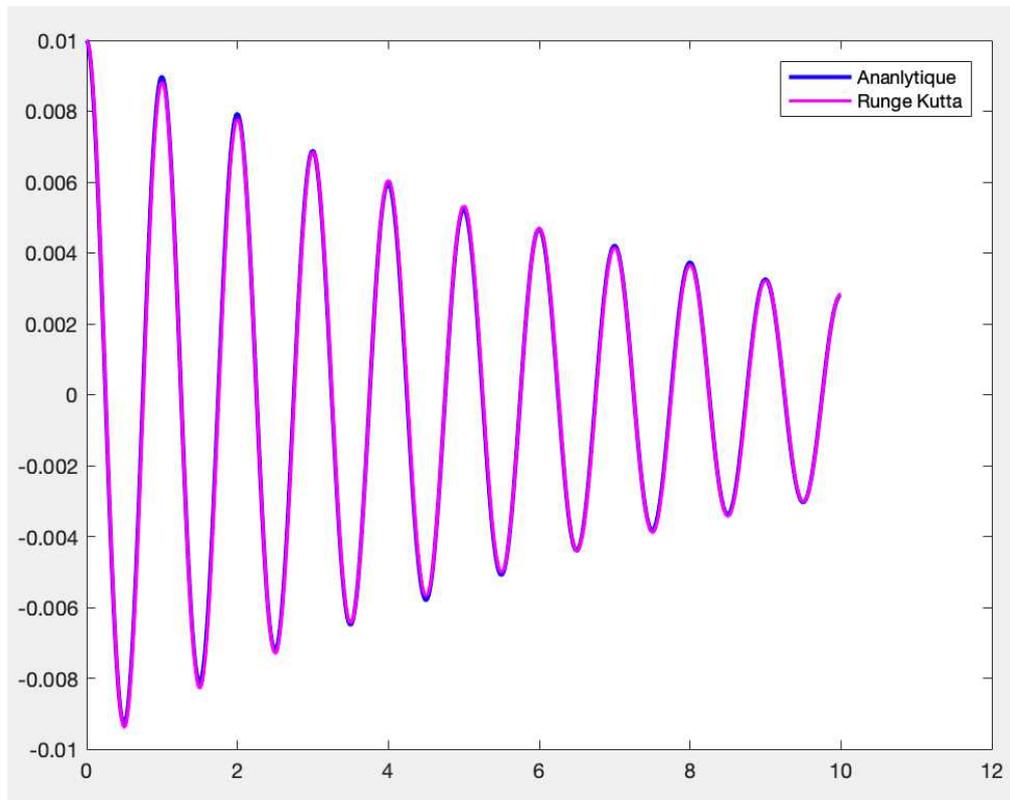
On peut conclure que si h est plus petit, la solution est plus précise.

1.3.b)

Si on choisit $h = 0.004$, le résultat est :



Si on choisit $h = 0.003$, le résultat est :



On peut voir les deux résultats sont assez précis, donc on peut choisir

$$h_c = \frac{0.004 + 0.003}{2} = 0.0035$$

Etude d'un double pendule avec l'hypothèse des petits mouvements

Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

1.1) On note $q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$

D'après les équations et les expressions donnés, on peut en déduire :

$$\ddot{q}_{n+1} = Kq_{n+1} + D$$

où $K = -\frac{mga}{ma^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \frac{F_0 \sin \omega t}{ma^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

et d'après relation (2) (3) on peut obtenir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta\Delta t^2 \\ 0 & 1 & -\gamma\Delta t \\ K & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \\ \ddot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & (\frac{1}{2} - \beta)\Delta t^2 \\ 0 & 1 & (1 - \gamma)\Delta t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D \end{bmatrix}$$

avec $\ddot{q}_{n+1} = Kq_{n+1} + D$, on a:

$$\begin{bmatrix} \beta K \Delta t^2 & 0 \\ -\gamma K \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (\frac{1}{2} - \beta)K\Delta t^2 & \Delta t \\ (1 - \gamma)K\Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 D \\ \Delta t D \end{bmatrix}$$

où $B = \begin{bmatrix} \beta K \Delta t^2 & 0 \\ -\gamma K \Delta t & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 + (\frac{1}{2} - \beta)K\Delta t^2 & \Delta t \\ (1 - \gamma)K\Delta t & 1 \end{bmatrix}$

Donc on a :

$$\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} + B^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 D \\ \Delta t D \end{bmatrix}$$

où $A = B^{-1}C$, et A est la matrice d'amplification

$$A = \begin{bmatrix} \beta K \Delta t^2 & 0 \\ -\gamma K \Delta t & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 + (\frac{1}{2} - \beta) K \Delta t^2 & \Delta t \\ (1 - \gamma) K \Delta t & 1 \end{bmatrix}$$

1.2)

On peut faire les valeur propres de A est 1, et on obtenu le pas critique, le calcul est trop compliqué, et mon ordinateur ne peut pas faire ce calcul.

1.3)

$$\ddot{q}_0 = Kq_0 + D$$

1.4) J'ai déjà en déduit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \Delta t^2 \\ 0 & 1 & -\gamma \Delta t \\ K & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \\ \ddot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & (\frac{1}{2} - \beta) \Delta t^2 \\ 0 & 1 & (1 - \gamma) \Delta t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} + B^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta t^2 D \\ \Delta t D \end{bmatrix}$$

1.5) Le programme de ce problème est ci-dessous :

```
clear
m = 2;
a = 0.5;
g = 9.81;
F0 = 20;
w = 2*pi;
T0 = 8;
q0 = [0;0];
Dq0 = [-1.31519275; -1.85996342];
K = -m*g/(m*a)*inv([2,1;1,1])*[2,0;0,1];
%% 1
beta=0;
gama=0.5;
dt = 0.02;
t = 0;
i = 1;
U = [q0; Dq0];
th1_t=[];
th2_t=[];
```

```

B=[eye(2)-beta*K*dt^2, zeros(2);
   -gama*K*dt, eye(2)];
C=[eye(2)+(0.5-beta)*K*dt^2, eye(2)*dt;
   (1-gama)*K*dt, eye(2)];
A=inv(B)*C;

while t <= T0
    th1_t(1,i) = U(1);
    th1_t(2,i) = t;
    th2_t(1,i) = U(2);
    th2_t(2,i) = t;
    i = i+1;
    t = t+dt;
    D = F0*sin(w*t)/(m*a*a) * inv([2,1;1,1]) * [a;a/sqrt(2)];
    tmp = U;
    U = A * tmp + inv(B)*[0.5*dt^2*D; dt*D];
end
plot(th1_t(2,:), th1_t(1,:), 'r');
hold on;
plot(th2_t(2,:), th2_t(1,:), 'b');
legend('theta1', 'theta2');

disp('theta1');
[th1_t(1,1),th1_t(1,2),th1_t(1,3),th1_t(1,26)]
disp('theta2');
[th2_t(1,1),th2_t(1,2),th2_t(1,3),th2_t(1,26)]

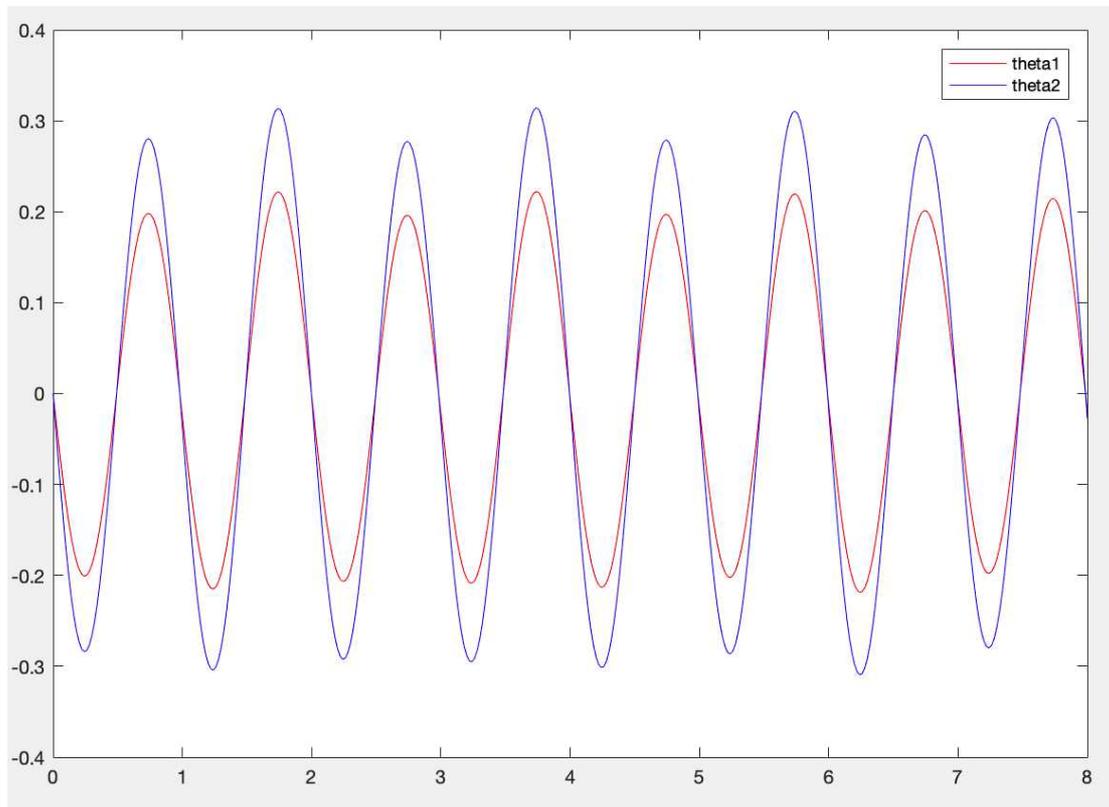
```

1.6)

$$\begin{array}{l}
 q(0) = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad q(\Delta t) = \begin{matrix} -0.0262 \\ -0.037 \end{matrix} \quad q(2\Delta t) = \begin{matrix} -0.0518 \\ -0.0732 \end{matrix} \\
 \dot{q}(0) = \begin{matrix} -1.3152 \\ -1.86 \end{matrix} \quad \dot{q}(\Delta t) = \begin{matrix} -1.2975 \\ -1.8349 \end{matrix} \quad \dot{q}(2\Delta t) = \begin{matrix} -1.2594 \\ -1.7811 \end{matrix} \\
 \ddot{q}(0) = Kq(0) + D \quad \ddot{q}(\Delta t) = Kq(\Delta t) + D \quad \ddot{q}(2\Delta t) = Kq(2\Delta t) + D
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 q(0.5) = \begin{matrix} 0.0108 \\ 0.0152 \end{matrix} \\
 \dot{q}(0.5) = \begin{matrix} 1.2688 \\ 1.7943 \end{matrix} \\
 \ddot{q}(0.5) = Kq(0.5) + D
 \end{array}$$

Les résultats graphiques obtenus sont :



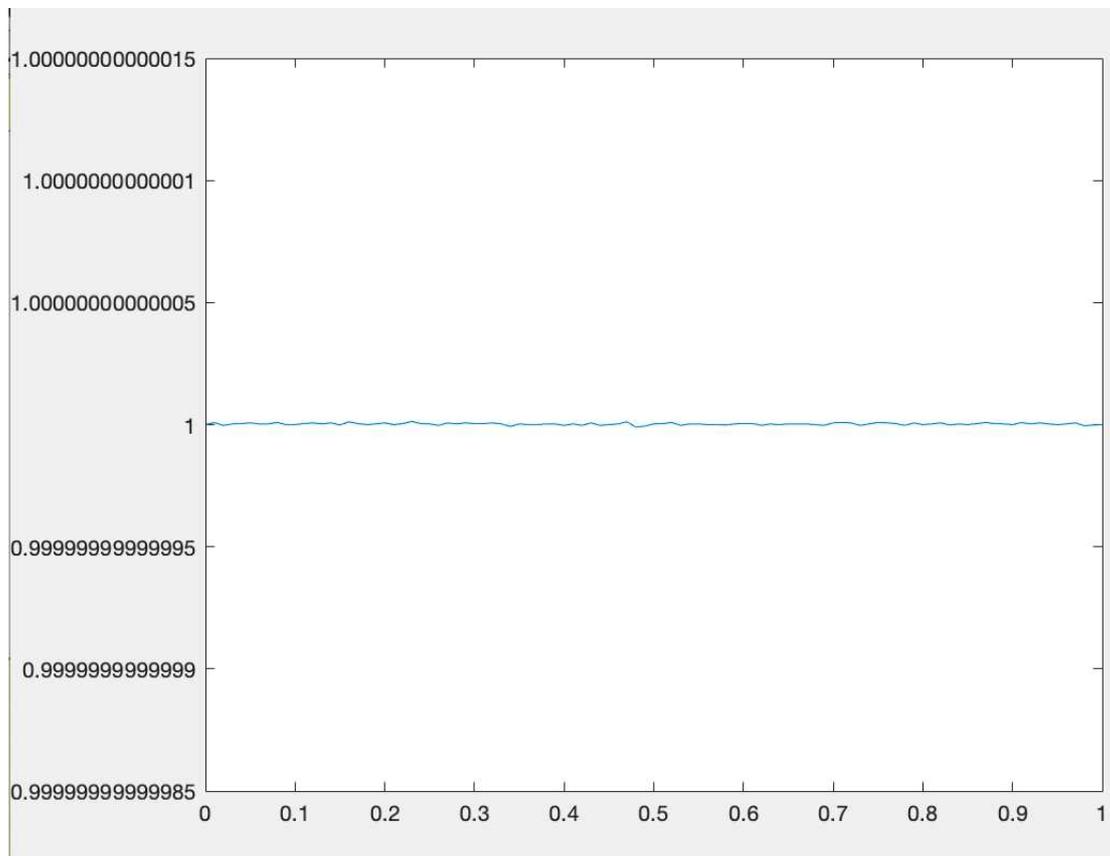
2. Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite

2.1) c'est la même que question 1.1

2.2) Le programme de cette question est :

```
%% 2
beta=0.25;
gama=0.5; |
dt=0:0.01:1;
val_max = [];
for i = 1:(1/0.01+1)
    B=[eye(2)-beta.*K*dt(i)^2, zeros(2);
      -gama.*K*dt(i), eye(2)];
    C=[eye(2)+(0.5-beta)*K*dt(i)^2, eye(2)*dt(i);
      (1-gama).*K*dt(i), eye(2)];
    A=inv(B)*C;
    [vec,val]=eig(A);
    val_max(i) = max([abs(val(1,1)),abs(val(2,2)),abs(val(3,3)),abs(val(4,4))]);
end
plot(dt, val_max)
```

L'allure graphique de l'évolution de la plus grande valeur propre de A en fonctions de Δt est :



On peut trouver que les plus grandes valeurs propres de A dans Δt dans le domaine $0 \sim 1$ s sont assez proche de 1.

2.3)

$$\ddot{q}_0 = Kq_0 + D$$

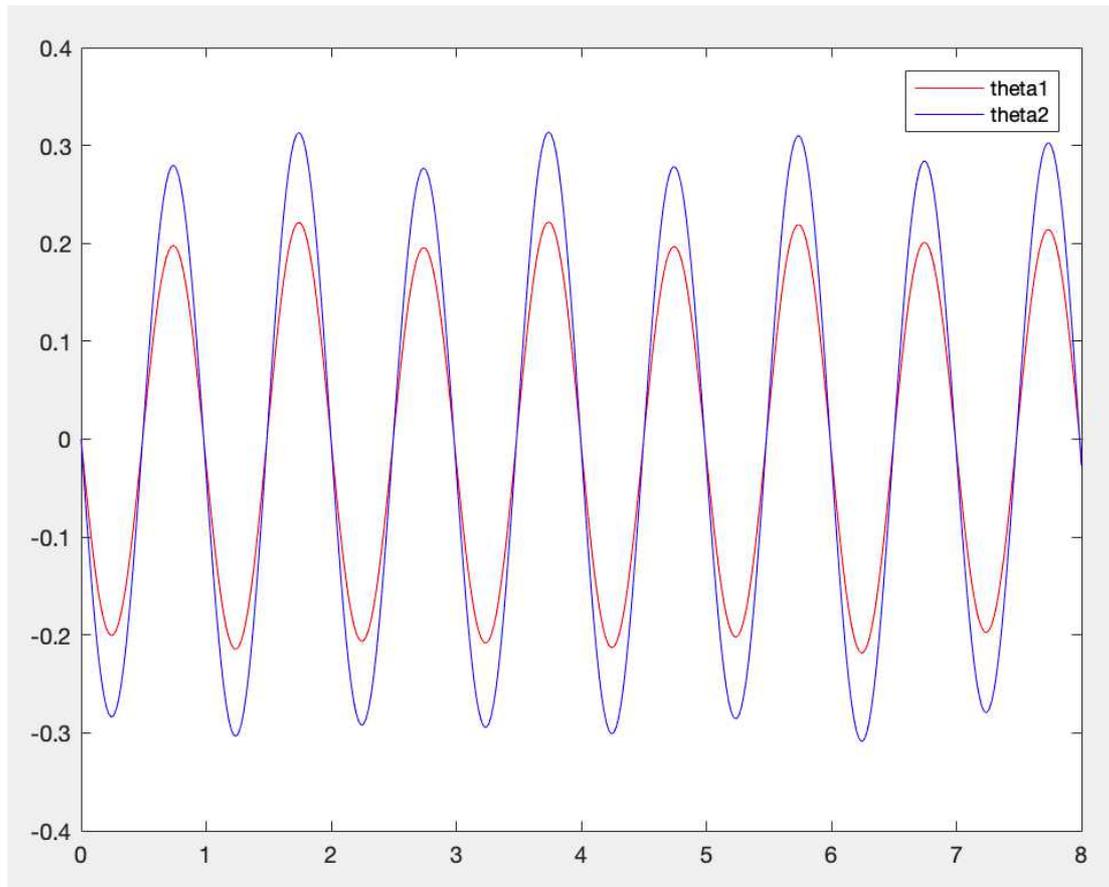
2.4)

$$\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} + B^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta t^2 D \\ \Delta t D \end{bmatrix}, \text{ c'est le même que question 1.4}$$

2.5)

Le programme est le même que question 1, sauf la valeur de β est changée.

On peut obtenir les résultats ci-dessous :



2.6)

$$\begin{array}{l}
 q(0) = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad q(\Delta t) = \begin{matrix} -0.0261 \\ -0.0369 \end{matrix} \quad q(2\Delta t) = \begin{matrix} -0.0517 \\ -0.0731 \end{matrix} \\
 \dot{q}(0) = \begin{matrix} -1.3152 \\ -1.86 \end{matrix} \quad \dot{q}(\Delta t) = \begin{matrix} -1.2975 \\ -1.8350 \end{matrix} \quad \dot{q}(2\Delta t) = \begin{matrix} -1.2594 \\ -1.7811 \end{matrix} \\
 \ddot{q}(0) = Kq(0) + D \quad \ddot{q}(\Delta t) = Kq(\Delta t) + D \quad \ddot{q}(2\Delta t) = Kq(2\Delta t) + D
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 q(0.5) = \begin{matrix} 0.0106 \\ 0.0150 \end{matrix} \\
 \dot{q}(0.5) = \begin{matrix} 1.2683 \\ 1.7943 \end{matrix} \\
 \ddot{q}(0.5) = Kq(0.5) + D
 \end{array}$$

Ces valeurs sont presque les mêmes que question 1.6.

oscillateur non linéaire à un degré de liberté

1. Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

1.1) D'après les équations et les expressions donnés, on peut en déduire :

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_n + \beta \Delta t^2 (-\omega_0^2 q_{n+1} (1 + a q_{n+1}^2))$$

C'est équivalent à :

$$q_{n+1} (1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2) + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 q_{n+1}^3 - (q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_n) = 0$$

On peut résoudre cette équation pour obtenir q_{n+1}

Et pour \dot{q}_{n+1} :

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_n + \gamma \Delta t (-\omega_0^2 q_{n+1} (1 + a q_{n+1}^2))$$

Et à la fin :

$$\ddot{q}_{n+1} = -\omega_0^2 q_{n+1} (1 + a q_{n+1}^2)$$

1.2)

Le programme de cette question est ci-dessous :

```
clear

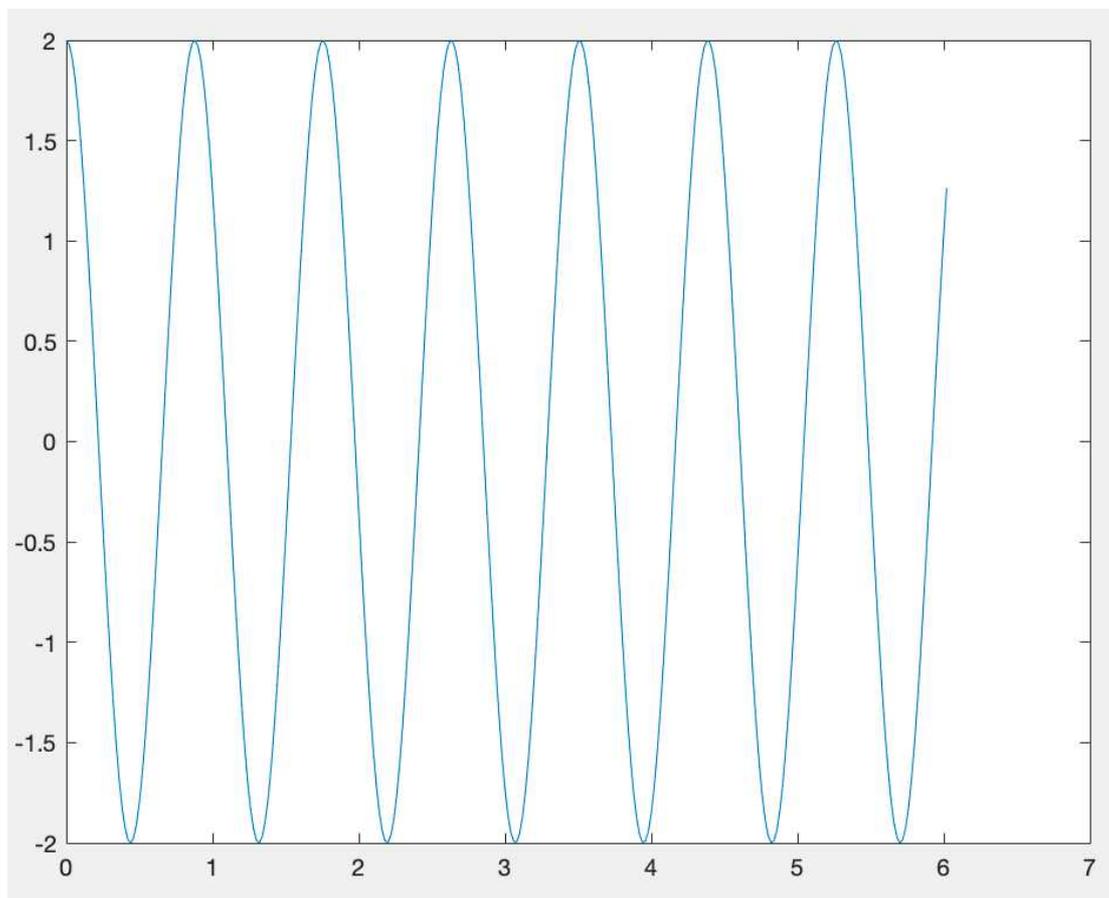
w0 = 2*pi;
a = 0.1;
q0 = 2;
Dq0 = 0;
D2q0 = -w0^2*q0*(1+a*q0^2);
T0 = 6;
dt = 0.02;
t = 0;
i = 1;
U = [q0; Dq0];
q_t = [q0,t];
```

```

%%1 NewMark Explicite
beta = 0;
gama=0.5;
while t <= T0
    i = i+1;
    t = t+dt;
    U2 = U;
    a0 = -(U2(1) + dt*U2(2) + dt^2*(0.5-beta)*(-w0^2*U2(1)*(1+a*U2(1)^2)));
    a1 = 1 + beta*dt^2*w0^2;
    a2 = 0;
    a3 = beta*dt^2*w0^2;
    tmp = roots([a3,a2,a1,a0]);
    U(1) = tmp(1);
    U(2) = U2(2) + dt*(1-gama)*(-w0^2*U2(1)*(1+a*U2(1)^2)) + gama*dt*(-w0^2*U(1)*(1+a*U(1)^2));
    q_t(1,i) = U(1);
    q_t(2,i) = t;
end
disp('q');
[q_t(1,1),q_t(1,2),q_t(1,3),q_t(1,302)]
plot(q_t(2,:), q_t(1,:));

```

1.3) Quand $\Delta t = 0.02s$, le figure de résultat obtenu est :



$$q(0) = 2.0, q(\Delta t) = 1.9779, q(2\Delta t) = 1.9123, q(T_0) = 1.2642$$

2. Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite

2.1)

On doit chercher à minimiser $\Delta\ddot{q}_{n+1}$.

2.2) Théoriquement on a :

$$(\ddot{q}_{n+1}^* + \Delta\ddot{q}_{n+1}^*) + \omega_0^2(q_{n+1}^* + \Delta q_{n+1}^*)(1 + a(q_{n+1}^* + \Delta q_{n+1}^*)^2) = 0$$

Donc la valeur analytique de $\Delta\ddot{q}_{n+1}$:

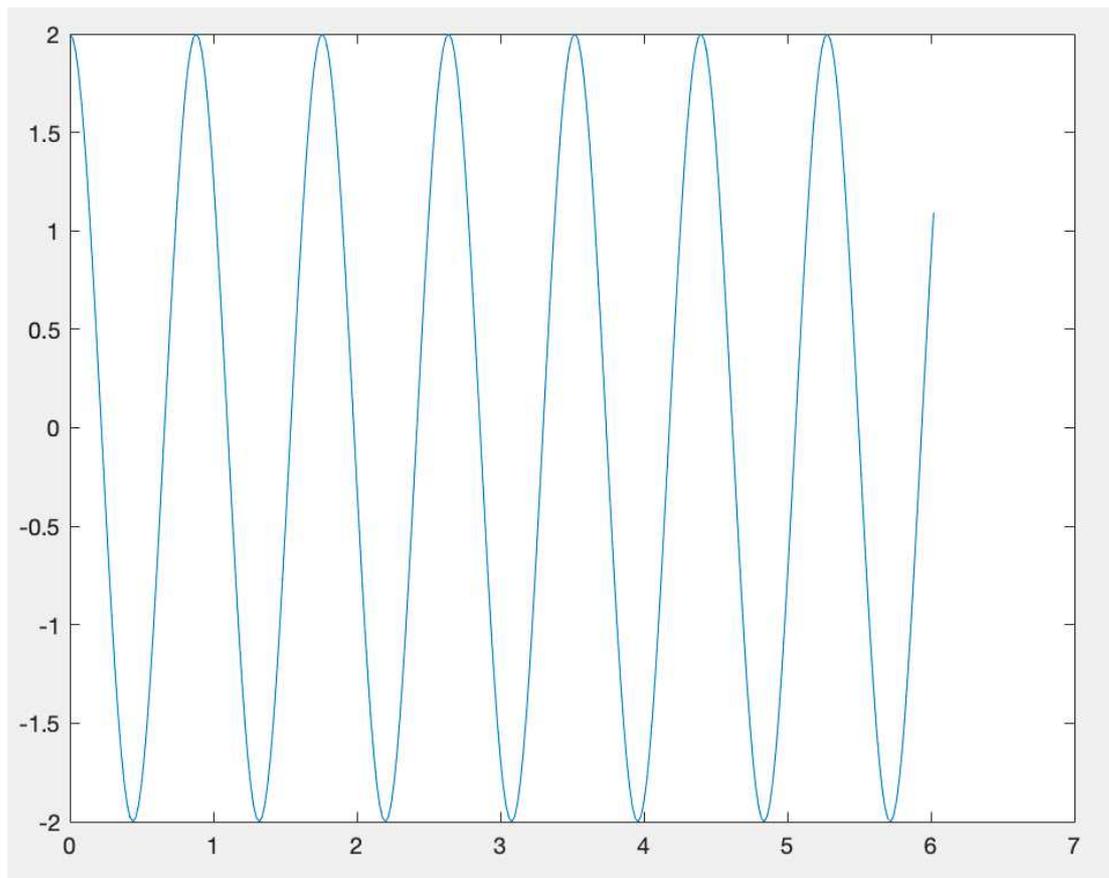
$$\Delta\ddot{q}_{n+1} = -\omega_0^2(q_{n+1}^* + \Delta q_{n+1}^*)(1 + a(q_{n+1}^* + \Delta q_{n+1}^*)^2) - \ddot{q}_{n+1}^*$$

2.3) Le programme de cette question est :

```
%% 2 NewMark Implicite
eps = 0.001;
beta = 0.25; gama = 0.5;
U(3,1)=D2q0;
err = 0;
while t <= T0
    i = i+1;
    t = t+dt;
    U2 = U;
    U(1) = U2(1) + dt*U2(2) + dt^2*(0.5-beta)*(-w0^2*U2(1)*(1+a*U2(1)^2));
    U(2) = U2(2) + dt*(1-gama)*(-w0^2*U2(1)*(1+a*U2(1)^2));
    U(3)= 0;
    err = abs(U(2) + w0^2*U(1)*(1+a*U(1)));
    if err > eps
        % correction
        %tmp = roots([w0^2*a*beta^2*dt^4, 1+2*w0^2*a*U(1)*beta*dt^2+w0^2*beta*dt^2, U(
        detq2 = -(U(3)+w0^2*U(1)*(1+a*U(1)^2))/(1+beta*dt^2*w0^2*(1+3*a*U(1)^2));
        detq1 = gama*dt*detq2;
        detq = beta*dt^2*detq2;
        U(1) = U(1) + detq;
        U(2) = U(2) + detq1;
        U(3) = U(3) + detq2;
    end
    q_t(1,i) = U(1);
    q_t(2,i) = t;
end

disp('q');
[q_t(1,1),q_t(1,2),q_t(1,3),q_t(1,302)]
plot(q_t(2,:), q_t(1,:));
```

2.4) Quand $\Delta t = 0.02s$, le figure de résultat obtenu est :



$$q(0) = 2.0, q(\Delta t) = 1.9781, q(2\Delta t) = 1.9131, q(T_0) = 1.0931$$

3. Energie mécanique

3.1) Energie mécanique de ce système est notée E

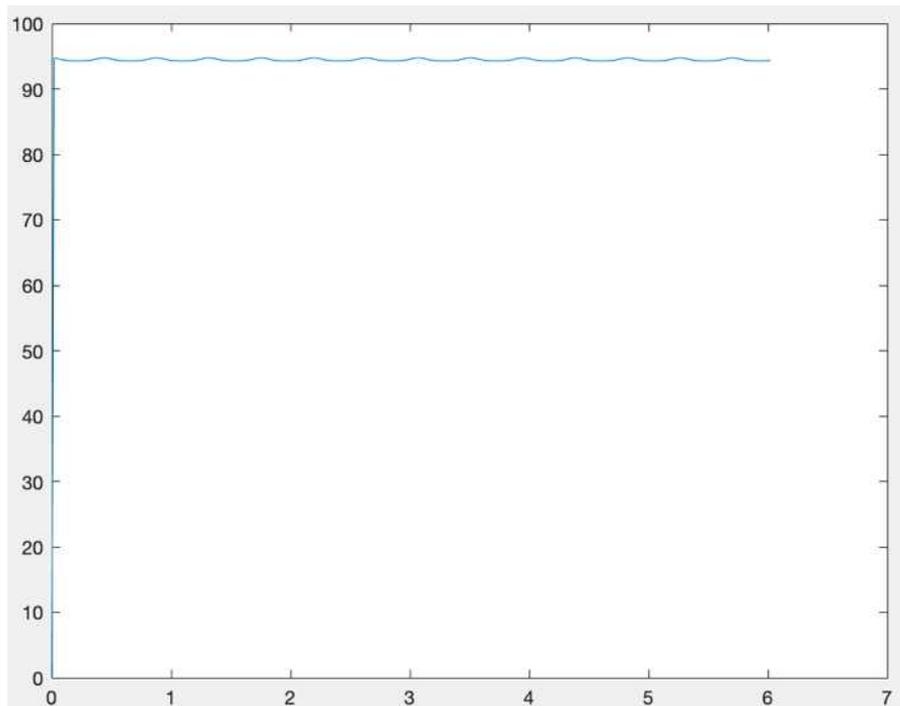
$$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \int kq(1 + aq^2) dq$$

$$\text{Donc } E^* = \frac{E}{m} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \omega_0^2\left(\frac{1}{2}q^2 + \frac{a}{4}q^4\right)$$

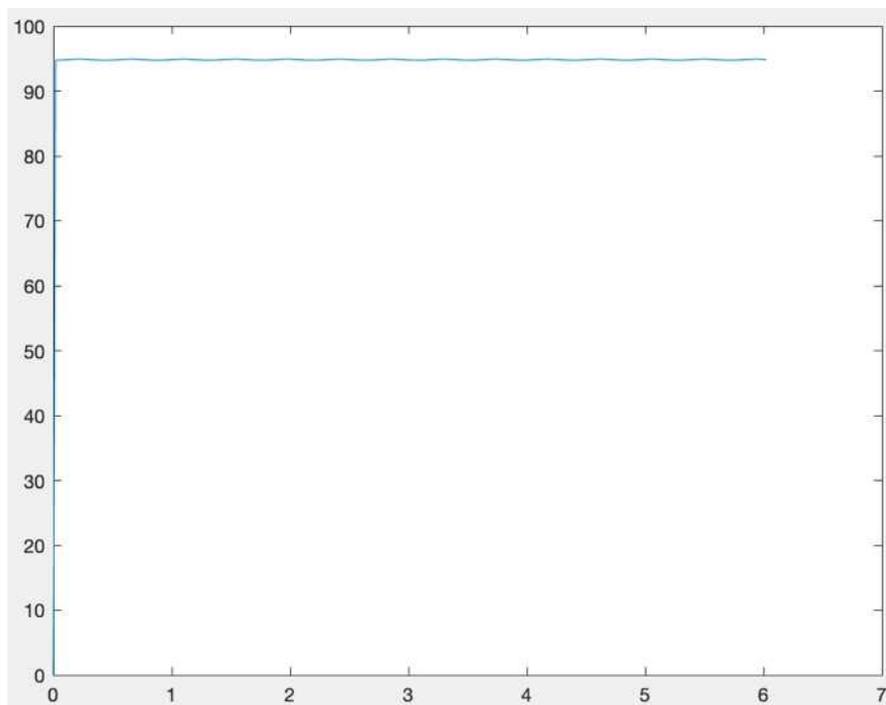
3.2) les codes pour calculer E^* dans le cycle du temps sont:

$$E(i) = 1/2*U(2)^2 + w0^2*(U(1)^2/2+a*U(1)^4/4);$$

3.3) Quand $\Delta t = 0.02s$, E^* de schéma explicite est :



Quand $\Delta t = 0.02s$, E^* de schéma implicite est :



On peut voir que la valeur d'énergie mécanique de ce système est presque constante, parce que il n'y a pas d'énergie perdue par frottement dans ce système.