

DM 4

Prénom : Valentin

Numéro d'étudiant : ZY1824159/14241118

## Étude d'un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté

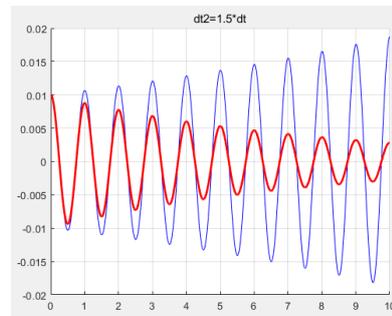
1.1 Avec un schéma d'EULER explicite :

L'initialisation et la solution exacte :

```
5 % Initialisation
6 - e=0.02;
7 - w0=2*pi;
8 - w0c=w0*(1-e^2)^(0.5);
9 - dt=2*e/w0;
10 - T0=1;
11 - x=0.01;
12 - dx=0;
13
14 % solution exacte
15 - t1=(0:dt:10*T0)';
16 - np1=size(t1,1);
17 - q0=(exp(-e*w0*t1)).*(x*cos(w0c*t1)+(e*w0*x+dx)*(sin(w0c*t1))/w0c);
18
```

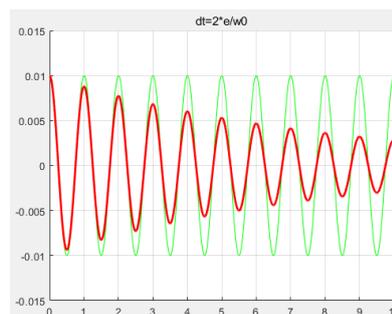
Quand on choisit  $\Delta t = 1.5dt > \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$ , alors la solution diverge et augmente :

```
30 - dt2=1.5*dt;
31 - t2=(0:dt2:10*T0)';
32 - np2=size(t2,1);
33 - A2=[1 dt2;-w0^2*dt2 1-2*e*w0*dt2];
34 - u2=[x; dx];
35 - q2=zeros(np2,1);
36 - q2(1)=x;
37 - for j=2:np2
38 -     u2=A2*u2;
39 -     q2(j)=u2(1);
40 - end
```



Quand on choisit  $\Delta t = dt = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$ , alors la solution est sinusoïdale.

```
19 % schéma explicite
20 - A1=[1 dt;-w0^2*dt 1-2*e*w0*dt];
21 - u1=[x; dx];
22 - q1=zeros(np1,1);
23 - q1(1)=x;
24 - for j=2:np1
25 -     u1=A1*u1;
26 -     q1(j)=u1(1);
27 - end
```

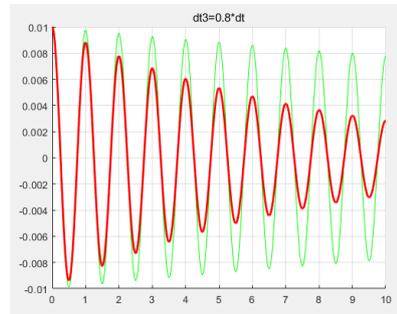


Quand on choisit  $\Delta t = 0.8 \frac{2\varepsilon}{\omega_0} > \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$ , la solution diverge et décroît, mais plus grande que la solution exacte :

```

42 - dt3=0.8*dt;
43 - t3=(0:dt3:10*T0)';
44 - np3=size(t3,1);
45 - A3=[1 dt3;-w0^2*dt3 1-2*e*w0*dt3];
46 - u3=[x;dx];
47 - q3=zeros(np3,1);
48 - q3(1)=x;
49 - for j=2:np3
50 -     u3=A3*u3;
51 -     q3(j)=u3(1);
52 - end

```



1.1 d) Les critères permettant d'étudier la précision de la solution :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 - 2\varepsilon \omega_0 \Delta t \end{bmatrix}$$

$$\text{soit } \det(\lambda I - A) = 0$$

On peut déduire que :  $\lambda = 1 - \varepsilon \omega_0 \Delta t \pm i \omega_0 \Delta t \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

La condition d'être stable est :  $|\lambda| < 1$

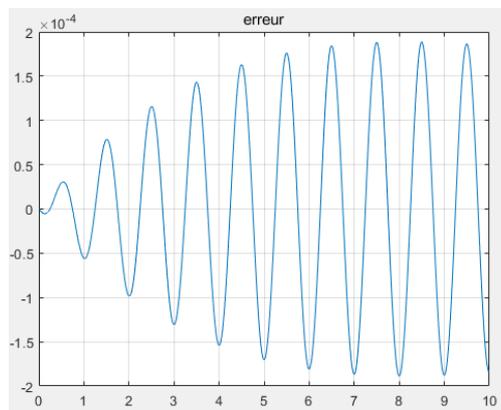
$$\text{d'où } \Delta t < \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

Quand  $\frac{\Delta t}{\frac{2\varepsilon}{\omega_0}} \leq 0.05$ , la solution calculée présente-t-elle une précision suffisante.

```

66 - q30=(exp(-e*w0*t3)).*(x*cos(w0c*t3)+(e*w0*x+dx)*(sin(w0c*t3))/w0c);
67 - figure(2)
68 - plot(t3,(q30-q3));
69 - title('erreur');
70 - grid on

```



1.2 Avec un schéma d'EULER implicite :

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + \Delta t \dot{x}_{n+1} \\
 \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + \Delta t \times \ddot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \Delta t(-2\varepsilon\omega_0\dot{x}_{n+1} - \omega_0^2 x_{n+1}) \\
 \dot{x}_n &= -2\varepsilon\omega_0\dot{x}_n - \omega_0^2 x_n \\
 -\Delta t \dot{x}_{n+1} + x_{n+1} &= x_n \\
 (1 + 2\varepsilon\omega_0\Delta t)\dot{x}_{n+1} + \omega_0^2\Delta t x_{n+1} &= \dot{x}_n \\
 u_n &= \begin{bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ \omega_0^2\Delta t & 1 + 2\varepsilon\omega_0\Delta t \end{bmatrix} u_{n+1} &= u_n
 \end{aligned}$$

```

73 - syms dtx
74 - A=[1 -dtx; w^2*dtx 1+2*e*w*dtx];
75 - eig(A^(-1))

```

1.3 On évalue numériquement la solution de l'équation sur l'intervalle de temps [ 0 100T0 ] avec un schéma de RUNGE KUTTA :

1.3 a) Calculer la solution obtenue pour les trois valeurs suivantes du coefficient h :

$$h = 0.04 \quad h = 0.96 \quad h = 1.04$$

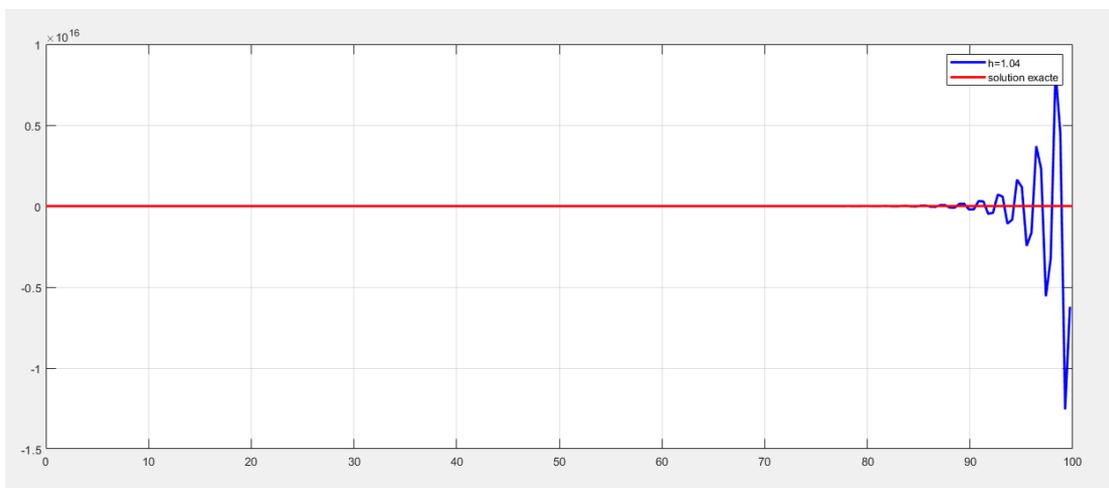
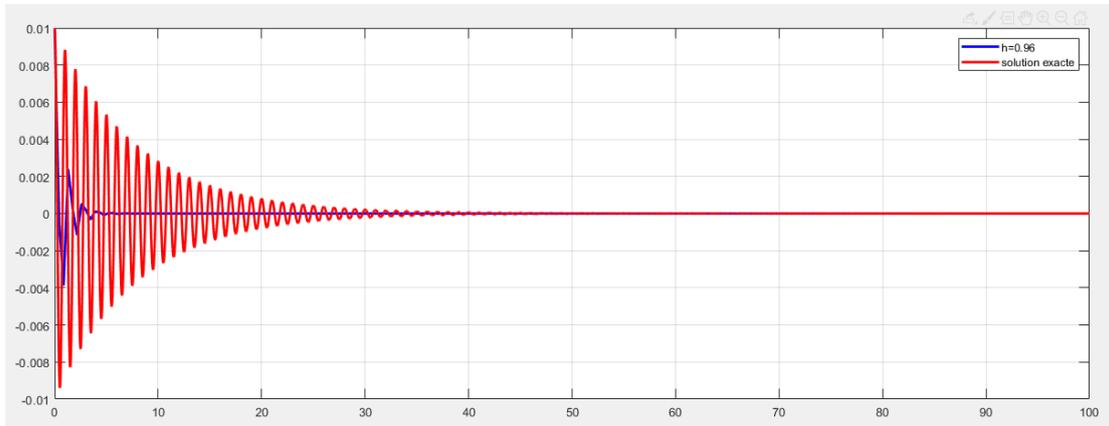
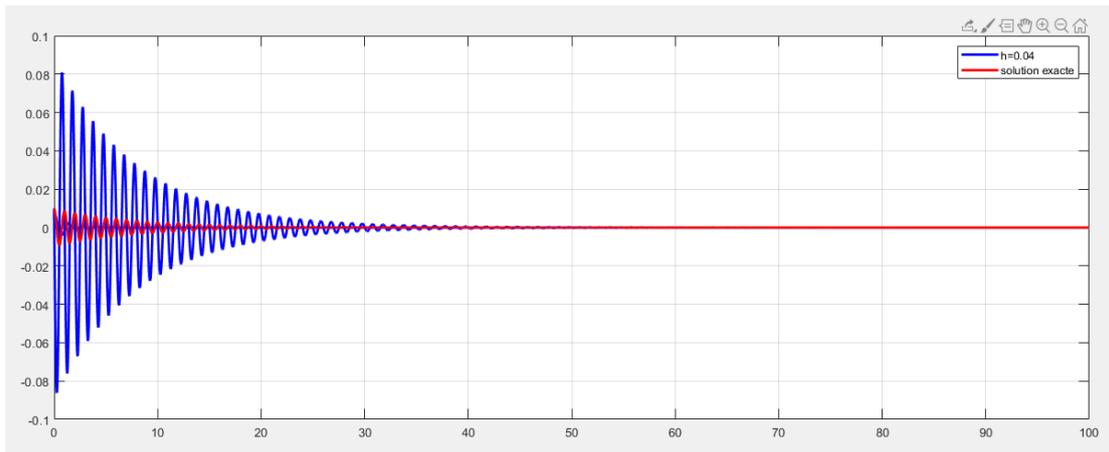
```

3 - w0 = 2*pi;
4 - e=0.02;
5 - T0=1;
6 - x0=0.01;
7 - dx0=0;
8 - w0c = w0*w0;
9 - h1 = 0.04;
10 - dt1=h1*2*sqrt(2)/w0;
11 - t1 = (0:dt1:100*T0)';
12 - np = size(t1,1);
13 - x1 = zeros(np,1);
14 - dx1 = zeros(np,1);
15 - x1(1) = x0;
16 - dx1(1) = dx0;
17 - xj = [x0 ; dx0];

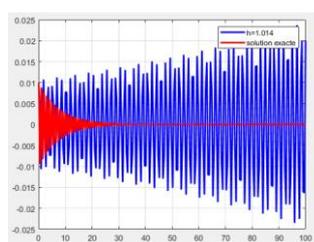
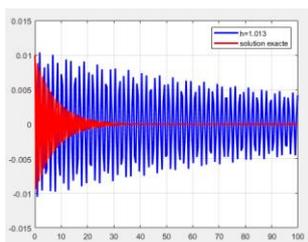
18 - A = [-1 1;0 w0c*dt1];
19 - B = [0 dt1;1 -(1+2*e*w0*dt1)];
20 - C = inv(B)*A;
21 - for i = 2 : np
22 -     k1 = C*xj;
23 -     k2 = C*(xj+k1*dt1/2);
24 -     k3 = C*(xj+k2*dt1/2);
25 -     k4 = C*(xj+k3*dt1);
26 -     K = (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
27 -     xj = xj + K * dt1;
28 -     x1(i) = xj(1);
29 -     dx1(i) = xj(2);
30 - end;
31 - plot(t1,x1, '-b','Linewidth',2);

35 - % solution exacte
36 - W=w0*(1-e^2)^(0.5);
37 - dt=2*e/w0;
38 - T0=1;
39 - x=0.01;
40 - xd=0;
41 - J=linspace(0,100*T0,100*T0/dt);
42 - Y0=(exp(-e*w0*J)).*(x*cos(W*J)+(e*w0*x+xd)*(sin(W*J))/W);
43 - plot(J,Y0,'r','Linewidth',2);
44 - legend('h=0.04','solution exacte');
45 - grid on;

```



Donc on a déduit deux résultats stables pour  $h=0.04$  et  $h=0.96$ , et un instable pour  $h=1.04$ . Et le résultat est plus précis quand on fait  $h=0.96$ .



on voit que  $h_c$  est dans l'intervall

$(1.013, 1.014)$ , donc on a  $0.4560 < \Delta t_x < 0.4565$

## Étude d'un double pendule avec l'hypothèse des petits mouvements

1. Avec un schéma de NEWMARK explicite

1.1) La matrice d'amplification.

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2(0.5 - \beta)\ddot{q}_n + \Delta t^2\beta\ddot{q}_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{q}_n + \Delta t\gamma\ddot{q}_{n+1} \\ \ddot{q}_{n+1} &= -\omega_0^2 q_{n+1}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta\Delta t^2 \\ 0 & 1 & -\gamma\Delta t \\ \omega_0^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \\ \ddot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2(0.5 - \beta) \\ 0 & 1 & \Delta t(1 - \gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{n+1} &= -\omega_0^2 q_{n+1} \\ \dot{q}_n &= -\omega_0^2 q_n\end{aligned}$$

On a

$$\begin{bmatrix} 1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2 & 0 \\ \gamma\Delta t\omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t^2(0.5 - \beta)\omega_0^2 & \Delta t \\ (\gamma - 1)\Delta t\omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$B \begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = (B^{-1} \times C) \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

matrice d'amplification :

$$A = (B^{-1} \times C) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2\Delta t^2}{2(1+\beta\Delta t^2\omega_0^2)} & \frac{\Delta t}{1+\beta\Delta t^2\omega_0^2} \\ -\omega_0^2\Delta t\left[1 - \frac{\gamma\omega_0^2\Delta t^2}{2(1+\beta\Delta t^2\omega_0^2)}\right] & 1 - \frac{\gamma\omega_0^2\Delta t^2}{2(1+\beta\Delta t^2\omega_0^2)} \end{bmatrix}$$

Car  $\beta = 0, \gamma = 0.5$  :

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2\Delta t^2}{2} & \Delta t \\ -\omega_0^2\Delta t\left[1 - \frac{0.5\omega_0^2\Delta t^2}{2}\right] & 1 - \frac{0.5\omega_0^2\Delta t^2}{2} \end{bmatrix}$$

1.2) A partir de cette matrice d'amplification, le pas de temps critique.

$$\det[A - \lambda I] = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda[2 - (\omega_0^2\Delta t^2)^2] + 1 = 0$$

On souhaite que  $\Delta \leq 0$

$$\text{Donc } \Delta t^2 \leq \frac{4}{\omega_0^2} = 0.1$$

1.3) La relation entre  $q_0, \dot{q}_0$  et  $\ddot{q}_0$  :

$$\begin{aligned}\ddot{q} + \omega_0^2 q &= 0 \\ q(0) &= q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0\end{aligned}$$

donc

$$\ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 = 0$$

## Oscillateur non linéaire à un degré de liberté

### 1. Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

1.1 On a

$$\begin{aligned}q_{j+1} &= q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2(0.5 - \beta)\ddot{q}_j + \Delta t^2\beta\ddot{q}_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} &= \dot{q}_j + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{q}_j + \Delta t\gamma\ddot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1} &= -\omega_0^2 q_{j+1}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta\Delta t^2 \\ 0 & 1 & -\gamma\Delta t \\ \omega_0^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2(0.5 - \beta) \\ 0 & 1 & \Delta t(1 - \gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{bmatrix}$$

Et

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{j+1} &= -\omega_0^2 q_{j+1} \\ \ddot{q}_j &= -\omega_0^2 q_j \\ \begin{bmatrix} 1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2 & 0 \\ \gamma\Delta t\omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \Delta t^2(0.5 - \beta)\omega_0^2 & \Delta t \\ (\gamma - 1)\Delta t\omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix} \\ B \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} &= C \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = (B^{-1} \times C) \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

Matrice d'amplification :

$$A = (B^{-1} \times C) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2)} & \frac{\Delta t}{1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2} \\ -\omega_0^2 \Delta t \left[ 1 - \frac{\gamma\omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2)} \right] & 1 - \frac{\gamma\omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2)} \end{bmatrix}$$

Car  $\beta = 0, \gamma = 0.5$

On a

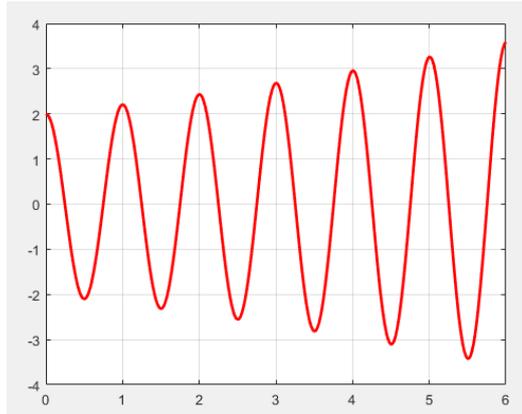
$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2 \Delta t^2}{2} & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t \left[ 1 - \frac{0.5\omega_0^2 \Delta t^2}{2} \right] & 1 - \frac{0.5\omega_0^2 \Delta t^2}{2} \end{bmatrix}$$

1.2 La résolution de l'équation différentielle (2) avec un schéma de NEWMARK explicite :

```

3 - dt1 = 0.02;
4 - T0 = 6;
5 - w0 = 2*pi;
6 - q0 = 2;
7 - dq0 = 0;
8 - a = 0.1;
9 - w0c = w0*w0;
10 - t1 = (0:dt1:T0)';
11 - np1 = size(t1,1);
12 - q1 = zeros(np1,1);
13 - dq1 = zeros(np1,1);
14 - q1(1) = q0;
15 - dq1(1) = dq0;
16 - for i = 2 : np1
17 -     q1(i) = q1(i-1)*(1-0.5*w0c*dt1*dt1) + dt1*dq1(i-1);
18 -     dq1(i) = q1(i-1)*w0c*dt1*(0.25*w0c*dt1*dt1-1) + dq1(i-1)*(1-0.25*w0c*dt1*dt1);
19 - end
20 - plot (t1,q1, '-r','Linewidth',2)

```



1.3 On choisit  $\Delta t = 0.02$  s. Les valeurs numériques de  $q(t)$  pour les valeurs de  $t$  égales à  $0s$ ,  $\Delta t$ ,  $2\Delta t$  et  $T_0$  est

$$\begin{aligned} q_{t=0} &= 2 \\ q_{t=\Delta t} &= 1.9842 \\ q_{t=2\Delta t} &= 1.9371 \\ q_{t=T_0} &= 3.5927 \end{aligned}$$

2 Avec un schéma de NEWMARK implicite

2.1 Il faut minimiser la correction entre la valeur exacte et la valeur estimée.

2.2 Calculer la correction :

$$\begin{aligned} f(\ddot{q}'_{j+1} + \Delta q_{j+1}, q'_{j+1} + \Delta q_{j+1}) &= 0 \\ \ddot{q}'_{j+1} + \Delta q_{j+1} + \omega_0^2 (q'_{j+1} + \Delta q_{j+1}) (1 + a(q'_{j+1} + \Delta q_{j+1})^2) &= 0 \\ f(\ddot{q}'_{j+1} + \Delta q_{j+1}, q'_{j+1} + \Delta q_{j+1}) = 0 &= f(\ddot{q}'_{j+1}, q'_{j+1}) + \frac{\partial f}{\partial q'_{j+1}} \Delta q_{j+1} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{q}'_{j+1}} \Delta q_{j+1} \\ \text{avec } \Delta q_{j+1} &= \beta \Delta t^2 \Delta \ddot{q}_{j+1} \end{aligned}$$

on déduit que :

$$\Delta q_{j+1} = - \frac{f(\ddot{q}'_{j+1}, q'_{j+1})}{\frac{\partial f}{\partial \ddot{q}'_{j+1}} + 0.25 \frac{\partial f}{\partial q'_{j+1}} \Delta t^2}$$

2.3 On a  $\ddot{q}_{j+1}^0 = 0$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{j+1}^0 &= \dot{q}_j + 0.5\Delta t \ddot{q}_j \\ q_{j+1}^0 &= q_j + \Delta t \dot{q}_j + 0.25\Delta t^2 \ddot{q}_j \end{aligned}$$

```

23 - dt2 = 0.02; |
24 - t2 = (0:dt2:T0)';
25 - np2 = size(t2,1);
26 - q2 = zeros(np2,1);
27 - dq2 = zeros(np2,1);
28 - q2(1) = q0;
29 - dq2(1) = dq0;
30 - ddq2(1) = 0;
31 - for inc = 2 : np2
32 -     q2(inc) = q2(inc-1)+dt2*dq2(inc-1)+0.25*dt2*dt2*ddq2(inc-1);
33 -     dq2(inc) = dq2(inc-1)+0.5*dt2*ddq2(inc-1);
34 -     ddq2(inc) = -w0c*q2(inc)*(1+a*q2(inc)*q2(inc));
35 - end
36 - plot(t2,q2,'b-', 'Linewidth',2)

```

