DM 3
Prénom : Valentin
Numéro d'étudiant : ZY1824159/14241118

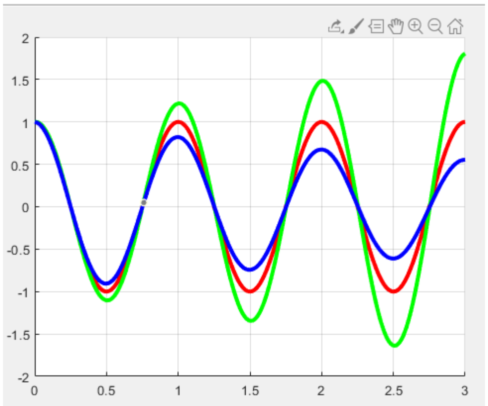
3.1 Programmez la résolution de l'équation (1) à l'aide d'un schéma d'EULER implicite :
Méthode 1 : sans la matrice d'amplification

```
dt2=0.01;
t2=(0:dt2:T0)';
np2=size(t2,1);
q2=zeros(np2,1);
dq2=zeros(np2,1);
energe2=zeros(np2,1);
q2(1)=q0;
dq2(1)=dq0;
ddq2(1)=-w0c * q2(1);
for i = 2 : np2
    q2(i) = (q2(i-1) + dt2 * dq2(i-1))/(1 + w0c * dt2 * dt2);
    ddqc = -w0c * q2(i);
    dq2(i) = dq2(i-1) + dt2 * ddqc;
end
energe2 = 0.5*(dq2.* dq2 + w0c * (q2.^2));
plot(t2,q2,'b-','Linewidth',3)
% plot(t2,energe2,'b-','Linewidth',3)
```

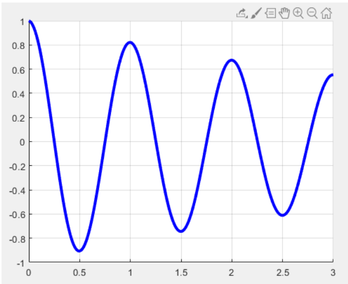
Méthode 2 : avec la matrice d'amplification

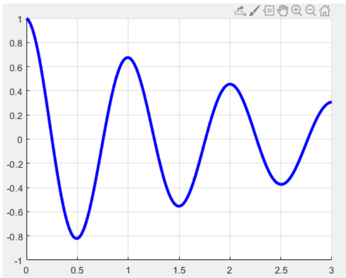
```
energe2b=zeros(np2,1);
q = [q0;dq0];
A = [1 , dt2 ; -w0c * dt2 , 1];
A = A / (1 + w0c * dt2 * dt2);
for inc = 2 : np2
    q = A * q;
    q2b(inc) = q(1);
    dq2b(inc) = q(2);
end;
energe2b = 0.5*(dq2b .* dq2b+ w0c * (q2b .^2));
% plot(t2,q2b,'b-','Linewidth',3)
% plot(t2,qenerge2b,'b-','Linewidth',3)
```

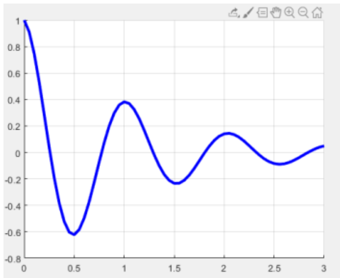
3.2 Comparez les valeurs de q fournies par les trois solutions (solution exacte, EULER explicite et EULER implicite) sur l'intervalle [0s , T0] .



3.3 En testant différents pas de temps, mettez en évidence que le schéma d'intégration d'EULER implicite introduit un amortissement numérique.



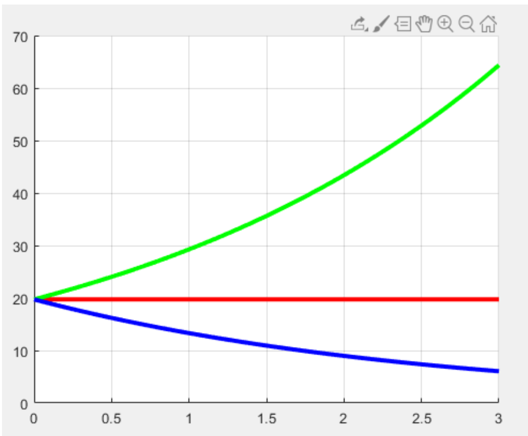




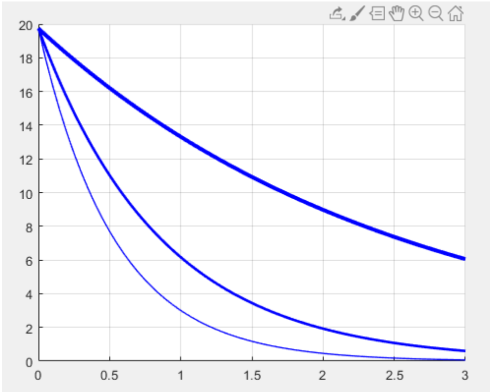
dt=0.01s dt=0.02s dt=0.05s

3.4 Calculez la quantit´e E★ associée au schéma d'EULER implicite et comparez les valeurs obtenues avec celles calculées précédemment à l'aide de la solution exacte et d'un schéma d'EULER explicite. Que met-on en évidence ? Comment évolue ce résultat lorsqu'on fait varier

Δt ?



On trouve d'après l'image que l'energe obtenue par un schéma d'EULER implicite dimimue quand le temps passe. C'est l'inversion à l'un que l'on obtenue quand c'est explicite.



Quand on fait une augmentation pour dt, nous avons observé une augmentation du taux de réduction d'énergie.

3.5 En déterminant numériquement les valeurs propres de la matrice d’amplification en fonction du pas de temps Δt , mettez en évidence le caractère inconditionnellement stable du schéma d’EULER implicite.

```
close all;
clc;
dt1= sym('dt1','real');
w0= sym('w0','real');
A = [1 ,-dt1 ,0 ; 0 ,1 ,-dt1; w0 * w0, 0 , 1];
B = [1 ,0 ,0 ; 0 ,1, 0; 0, 0 ,0];
C= A\B;
% Vecteurs et valeurs propres
[z,d] = eig(C)
simplify(d)
mo=abs(d)
% Si le module <1 alors le schéma est inconditionnellement stable
eval(mo)
```

On voit bien que le module est inférieure à 1, d’où le aractère inconditionnellement stable du schéma d’EULER implicite.

4.1 Transformez l’équation du mouvement (1) afin d’obtenir une formulation adaptée aux schémas du premier ordre :

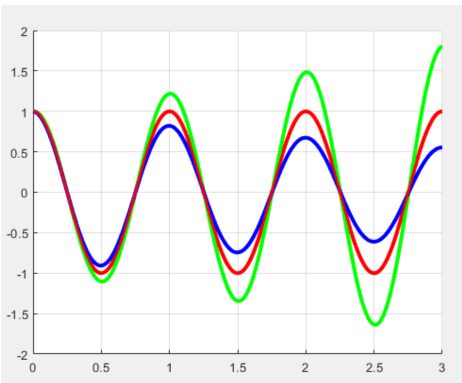
En posant $\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = \dot{q} \end{cases}$ alors on obtient :

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

4.2 Programmez la résolution de l'équation du mouvement que vous avez obtenue à la question 4.1 à l'aide d'un schéma de RUNGE KUTTA.

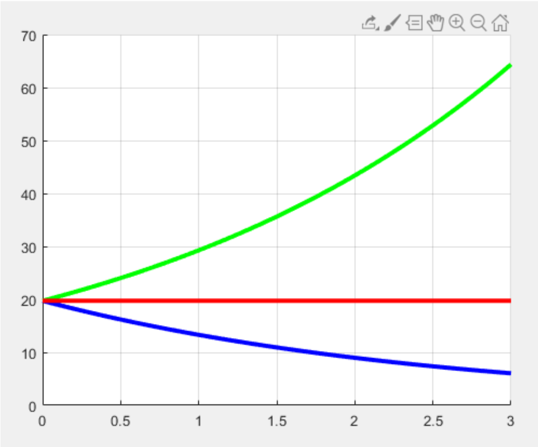
```
dt3 = 0.01;
t3 = (0:dt3:T0)';
np3 = size(t3,1);
q3 = zeros(np3,1);
dq3 = zeros(np3,1);
energ3 = zeros(np3,1);
q3(1) = q0;
dq3(1) = dq0;
qj = [q0 ; dq0];
C = [0 1; -w0c 0];
for inc = 2 : np3
    k1 = C*qj;
    k2 = C*(qj+k1*dt3/2);
    k3 = C*(qj+k2*dt3/2);
    k4 = C*(qj+k3*dt3);
    K = (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
    qj = qj + K * dt3;
    q3(inc) = qj(1);
    dq3(inc) = qj(2);
end
energ3 = 0.5*(dq3 .* dq3 + w0c * (q3.^2));
plot(t3,q3, '-r','Linewidth',2)
% plot(t3,energ3,'r-','Linewidth',3)
```

4.3 Comparez les valeurs de la solution q(t) obtenues avec un schéma de RUNGE KUTTA avec celles calculées précédemment (solution exacte, schéma d'EULER explicite et schéma d'EULER implicite) :



On trouve que la solution de schéma de RUNGE KUTTA est presque la même avec la solution exacte.

4.4 On calcule la quantité E* associée au schéma de RUNGE KUTTA et comparez les valeurs obtenues avec celles calculées à l'aide de la solution exacte, d'un schéma d'EULER explicite et d'un schéma d'EULER implicite :



On trouve que la solution du schéma de RUNGE KUTTA a presque la même de quantité avec la solution exacte