Rendu sur le serveur pédagogique :
Montrer que le schéma explicite avec matrice d'amplification est obtenu à partir du système du premier ordre que l'on discrétise en temps de manière explicite.
Écrire un rapport avec vos lignes de code en Matlab ou Scilab sur l'exercice Oscillateur conservatif a un degré de liberté avec le schéma Euler Explicite.

1. Pour un système du premier ordre :

$$\begin{cases} q^{(1)}(t) = f(q(t), t) \quad a \le t \le b \\ q(a) = q_0 \end{cases}$$

On suppose que la solution q''(t) du système existe sur [a, b], alors pour résolution discrète à des instants donnés $t_0, \cdots t_i, \cdots t_N$, on a

$$q(t_{i+1}) = q(t_i) + (t_{i+1} - t_i) q^{(1)}(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2!} q^{(2)}(\xi)$$

Car $q'(t_i) = f(q(t_i), t_i)$, donc

$$q(t_{i+1}) = q(t_i) + \Delta t f(q(t_i), t_i) + \frac{\Delta t^2}{2!} q^{(2)}(\xi)$$

Quand Δt est assez petit,

$$q(t_{i+1}) \approx q(t_i) + \Delta t f(q(t_i), t_i)$$

En faisant une approximation,

$$\begin{cases} q(t_{i+1}) = q_{i+1} \\ q(t_i) = q_i \end{cases}$$

On obtient,

$$\begin{cases} q_0 = \alpha \\ q_{i+1} = q_i + \Delta t f(q_i, t_i) \end{cases}$$

D'où la méthode Euler Explicite.

Pour l'équation différentielle du second ordre comme ci-dessous,

$$\begin{cases} q^{(2)}(t) = -{\omega_0}^2 q(t) \quad a \le t \le b \\ q(a) = q_0 \\ q^{(1)}(a) = q_{00} \end{cases}$$

On le transforme en un système équation différentielle du premier ordre par $U(t) = \left| \begin{smallmatrix} q(t) \\ q^{(1)}(t) \end{smallmatrix} \right.$

D'après la méthode précédente, on a

$$\begin{cases} q_{i+1} = q_i + \Delta t \times \dot{q}_i \\ \dot{q}_{i+1} = \dot{q}_i + \Delta t \times \ddot{q}_i \\ \ddot{q}_{i+1} = -{\omega_0}^2 q_{i+1} \end{cases}$$

On obtient

$$\left| \begin{matrix} q_{i+1} \\ \dot{q}_{i+1} \end{matrix} \right. = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -{\omega_0}^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{matrix} \right.$$

Donc $U_i = \left| \begin{smallmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{smallmatrix} \right.$ est la solution numérique du système du premier ordre, $\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -{\omega_0}^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice d'amplification.

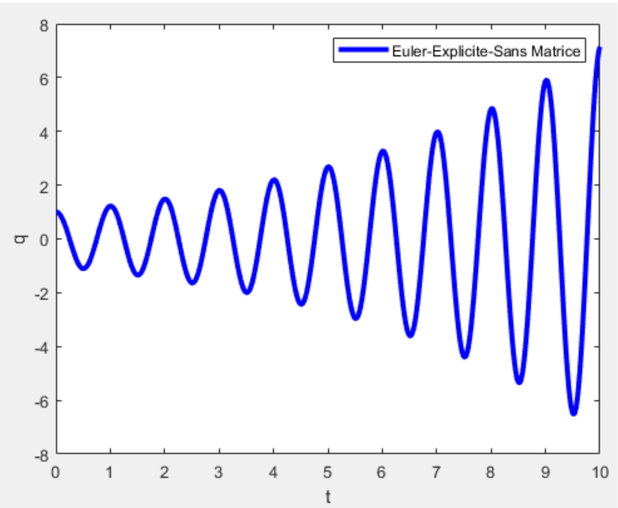
2. Solution numérique de l'exercice Oscillateur conservatif a un degré de liberté

2.1 Euler explicite sans matrice d'amplification

Matlab Code:

```
clear all ; close all ; clc
dt1=0.01; T0=10;
q0=1 ;dq0=0 ;
w0=2*pi; w0c=w0*w0;
t1=(0:dt1:T0)';
np1=size(t1,1);
q1=zeros(np1,1);
dq1=zeros(np1,1);
ddq1=zeros(np1,1);
energ1=zeros(np1,1);
q1(1)=q0;
dq1(1)=dq0;
ddq1(1)=-w0c*q1(1);
for inc=2:np1;
q1(inc)=q1(inc-1)+dt1*dq1(inc-1);
dq1(inc)=dq1(inc-1)+dt1*ddq1(inc-1);
ddq1(inc)=-w0c*q1(inc);
end;
energ1=0.5*(dq1.*dq1+w0c*(q0.^2));
plot(t1,q1,'b-','Linewidth',3);
xlabel('t') ;
ylabel('q') ;
legend('Euler-Explicite-Sans Matrice') ;
```

Sortie Graphique :



2.2 Euler explicite avec matrice d'amplification

Matlab Code:

```
clear all ; close all ; clc
dt1=0.01; T0=10;
```

```
q0=1 ;dq0=0 ;
w0=2*pi; w0c=w0*w0;
q=[q0 ;dq0] ;
t1=(0:dt1:T0)';
np1=size(t1,1);
q1b=zeros(np1,1);
q1b(1)=q0;
A=[1,dt1;-w0c*dt1,1];
for inc=2:np1;
q=A*q;
q1b(inc)=q(1);
dq1b(inc)= q(2);
end;
plot(t1,q1b,'g-','Linewidth',3);
xlabel('t') ;
ylabel('q') ;
legend('Euler-Explicite-Avec Matrice') ;
```

Sortie Graphique :