
Table of Contents

Retrouver l'équation du mouvement du pendule simple avec les équations de Lagrange	1
Oscillateur conservatif linéaire a un degré de liberté	2
1.1	2
1.2	3
2.1	4
2.2	4
2.3	5
2.4	7
2.5	7
3.1	8
3.2	9
3.3	10
3.4	11
3.5	12
4.1	13
4.2	13
4.3	14
4.4	15
5.1	16
5.1.1	16
5.1.2	17
5.1.3	18
5.1.4	19
5.2	20
5.2.1	20
5.2.2	21
5.2.3	22
5.2.4	25

Retrouver l'équation du mouvement du pendule simple avec les équations de Lagrange

```
clear all
A=imread('image_20200312161245.jpg');
imshow(A)
```

Équation de Lagrange

Lagrangien $L = E_c - E_p$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \quad \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_i} = 0 \right)$$

Pendule Simple

$$\begin{cases} E_c = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 \\ E_p = -mgd \cos \theta + Cte \\ SW = 0 \end{cases}$$

$$L = E_c - E_p = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + mgd \cos \theta + cte$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^N Q_i \delta \theta_i = 0 \Rightarrow Q_i = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgd \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I \dot{\theta} \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] = I \ddot{\theta}$$

Selon l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q$$

On obtient l'équation du mouvement

$$I \ddot{\theta} + mgd \sin \theta = 0$$

Oscillateur conservatif linéaire a un degré de liberté

1.1

Déterminez la solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions initiales (4) et programmez cette solution. Cette solution servira de référence pour comparer les solutions obtenues à l'aide des différents schémas d'intégration.

```
clear all
clf;
w0=2*pi;
syms q t pi;
b='D2q=-(2*pi)^2*q';
q=simplify(dsolve(b,'q(0)=1','Dq(0)=0'))
% solution analytique de l'equation(1)
```

```
q =  
cos(2*pi*t)
```

1.2

```
dq = simplify(diff(q,t));  
E =1/2*(dq^2+(2*pi)^2*q^2);  
Eq=simplify(E)  
%la quantité E* associée à cette solution exacte
```

```
Eq =  
2*pi^2
```

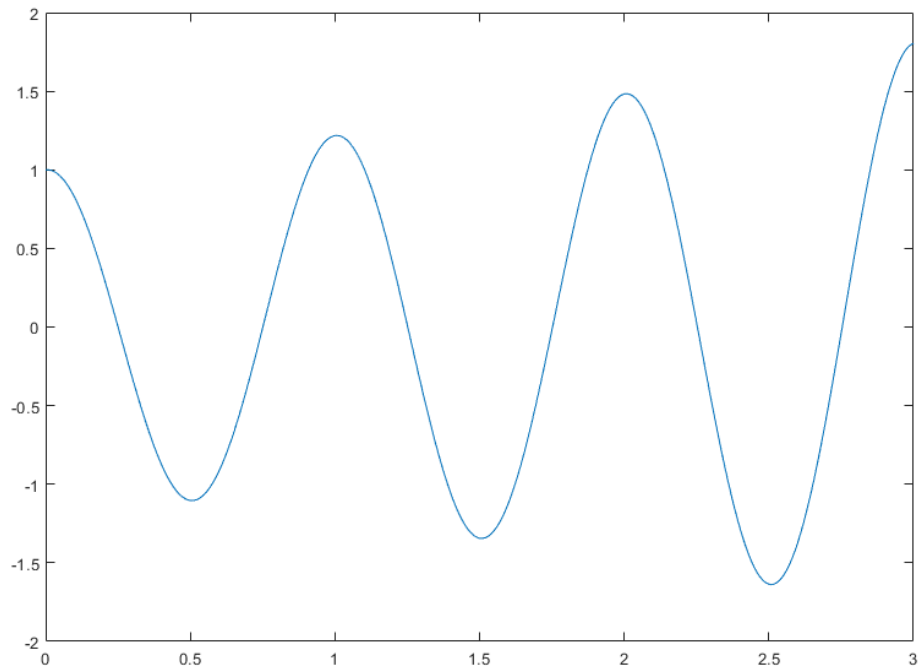
2.1

```
B=imread('image_20200312B.jpg');  
imshow(B)  
% la matrice amplification
```

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j + \Delta t \dot{q}_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} \\ \ddot{q}_j = -\omega_0^2 q_j \end{cases}$$
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} q_j + \Delta t \dot{q}_j \\ \dot{q}_j + \Delta t \ddot{q}_j \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} q_j + \Delta t \dot{q}_j \\ \dot{q}_j - \omega_0^2 \Delta t q_j \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2.2

```
clf;  
% Euler explicite  
T0=3;n=300;dt=T0/n;  
t=0:dt:T0;q0=1;dq0=0;  
A=[1,dt; -w0^2*dt,1];  
U(:,1)=[q0;dq0];  
for j=1:length(t)  
    U(:,j+1)= A*U(:,j);  
end  
U(:,length(t)+1)=[];  
plot(t,U(1,:))
```



2.3

tester differents pas de temps

```

clf;
subplot(2,2,1)
plot(t,U(1,:))
hold on;
ezplot(q,[0,T0,-2,2])
legend('Euler explicite n=300','Solution exacte')

n1=1000;
dt1=T0/n1;t1=0:dt1:T0;
U1(:,1)=[q0;dq0];
A1=[1,dt1; -w0^2*dt1,1];
for j=1:length(t1)
    U1(:,j+1)= A1*U1(:,j);
end
U1(:,length(t1)+1)=[];

subplot(2,2,2)
plot(t1,U1(1,:))
hold on;
ezplot(q,[0,T0,-2,2])
legend('Euler explicite n=1000','Solution exacte')

n2=2000;
dt2=T0/n2;t2=0:dt2:T0;

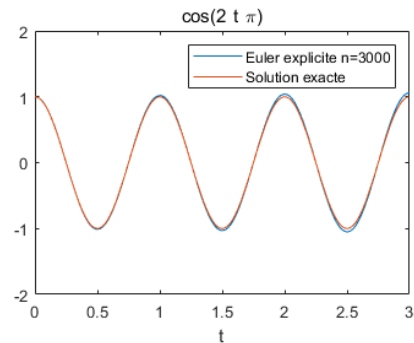
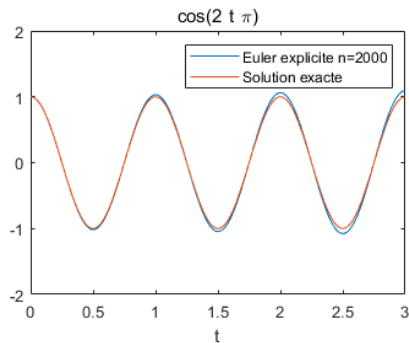
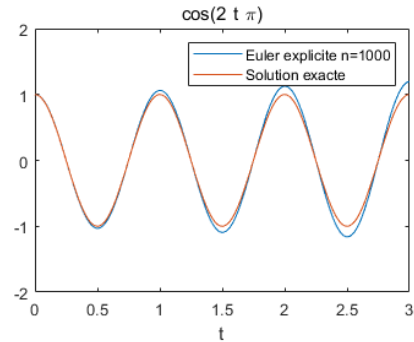
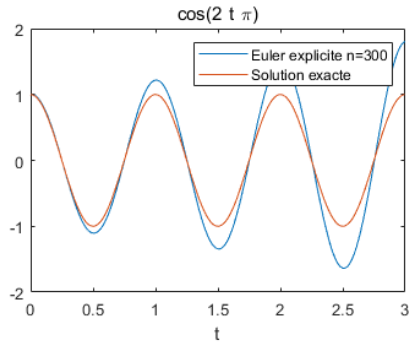
```

```

U2(:,1)=[q0;dq0];
A2=[1,dt2; -w0^2*dt2,1];
for j=1:length(t2)
    U2(:,j+1)= A2*U2(:,j);
end
U2(:,length(t2)+1)=[];
subplot(2,2,3)
plot(t2,U2(1,:))
hold on;
ezplot(q,[0,T0,-2,2])
legend('Euler explicite n=2000','Solution exacte')

n3=3000;
dt3=T0/n3;t3=0:dt3:T0;
U3(:,1)=[q0;dq0];
A3=[1,dt3; -w0^2*dt3,1];
for j=1:length(t3)
    U3(:,j+1)= A3*U3(:,j);
end
U3(:,length(t3)+1)=[];
subplot(2,2,4)
plot(t3,U3(1,:))
hold on;
ezplot(q,[0,T0,-2,2])
legend('Euler explicite n=3000','Solution exacte')

```

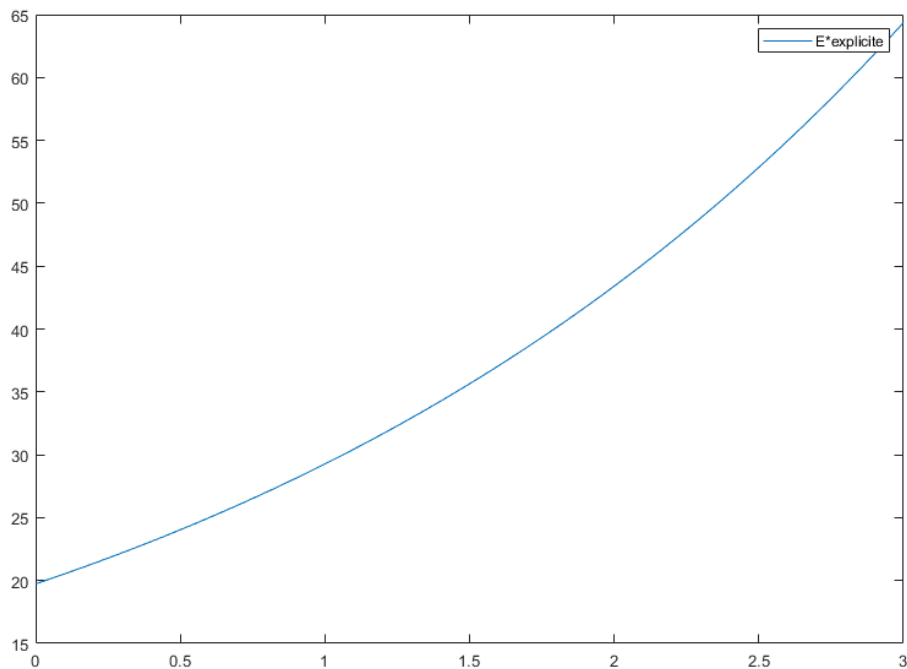


2.4

La quantité E^* associée au schéma d'EULER explicite

```
for j=1:length(t)
    Eexpl(j)=1/2*(U(2,j)*U(2,j)+4*pi*pi*U(1,j)*U(1,j));
end
clf;
plot(t,Eexpl)
legend('E*explicite')

% On peut voir que E*explicite est plus grande que celle calculée à
% partir
% de la solution exacte. Et elle n'est pas une constante.
% Lorsque le dt devient plus petit, ce résultat devient plus près avec
% E*
% calculée à partir de la solution exacte
```



2.5

```
val=eig(A)
val1=eig(A1)
val2=eig(A2)
val3=eig(A3)
% On voit que le schéma d'Euler explicite est toujours instable dans
% ce
% cas.
```

```
val =  
  
    1.0000 + 0.0628i  
    1.0000 - 0.0628i
```

```
val1 =  
  
    1.0000 + 0.0188i  
    1.0000 - 0.0188i
```

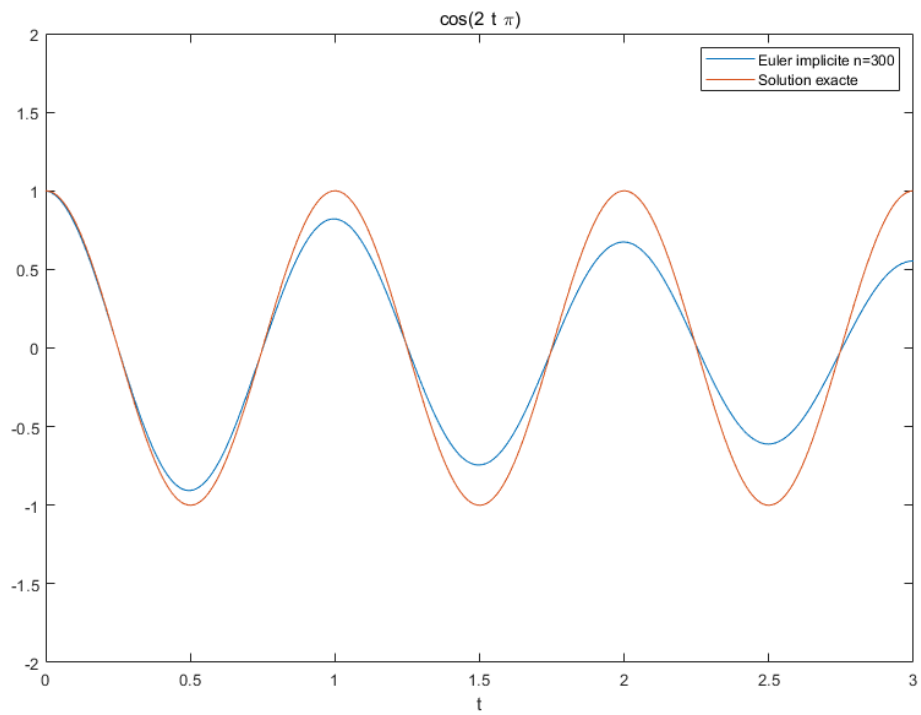
```
val2 =  
  
    1.0000 + 0.0094i  
    1.0000 - 0.0094i
```

```
val3 =  
  
    1.0000 + 0.0063i  
    1.0000 - 0.0063i
```

3.1

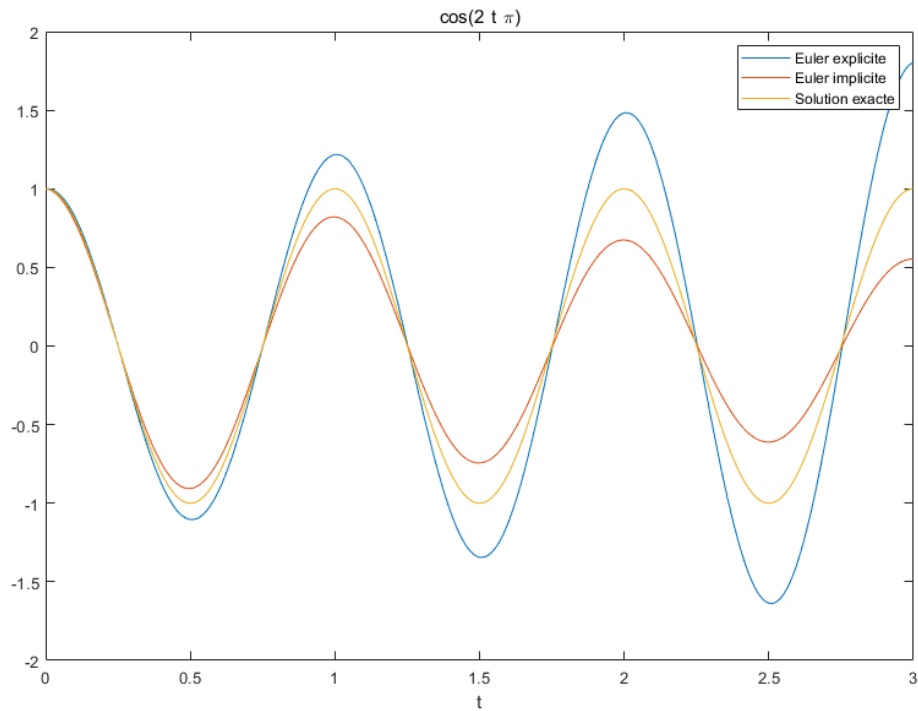
EUIER implicite

```
n=300;dt=T0/n;  
t=0:dt:T0;  
B=[1,-dt; w0^2*dt,1];B=inv(B);  
Uim(:,1)=[q0;dq0];  
for j=1:length(t)  
    Uim(:,j+1)= B*Uim(:,j);  
end  
Uim(:,length(t)+1)=[];  
plot(t,Uim(1,:))  
hold on;  
ezplot(q,[0,T0,-2,2])  
legend('Euler implicite n=300','Solution exacte')
```

3.2

```
clf;  
% on prend dt=0.01s  
plot(t,U(1,:))  
hold on;  
plot(t,Uim(1,:))  
hold on;  
ezplot(q,[0,T0,-2,2])  
legend('Euler explicite','Euler implicite','Solution exacte')
```



3.3

```

clf;
% En testant différents pas de temps, on peut voir que le schéma
% d'intégration d'EULER implicite introduit un amortissement numérique
% et
% plus le pas de temps dt est petit, plus l'atténuation des
% oscillations
% est faible.

plot(t,Uim(1,:))
hold on;

n1=1000;
dtim1=T0/n1;tim1=0:dtim1:T0;
Uim1(:,1)=[q0;dq0];
B1=[1,-dtim1; w0^2*dtim1,1];B1=inv(B1);
for j=1:length(tim1)
    Uim1(:,j+1)= B1*Uim1(:,j);
end
Uim1(:,length(t1)+1)=[];

plot(tim1,Uim1(1,:))
hold on;

n2=2000;
dtim2=T0/n2;tim2=0:dtim2:T0;
Uim2(:,1)=[q0;dq0];

```

```

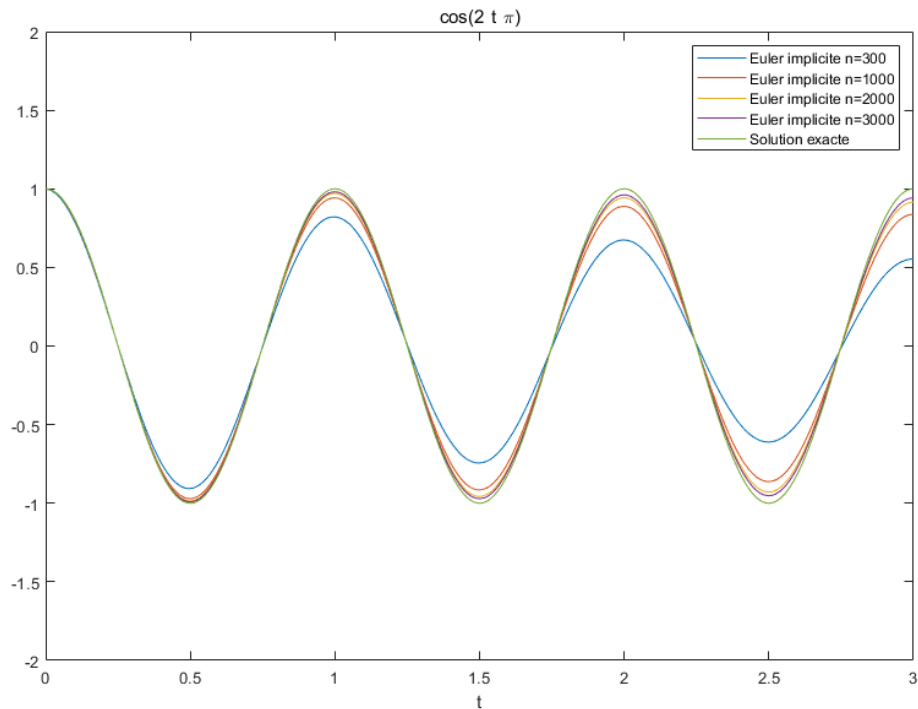
B2=[1,-dtim2; w0^2*dtim2,1];B2=inv(B2);
for j=1:length(t2)
    Uim2(:,j+1)= B2*Uim2(:,j);
end
Uim2(:,length(tim2)+1)=[];

plot(tim2,Uim2(1,:))
hold on;

n3=3000;
dtim3=T0/n3;tim3=0:dtim3:T0;
Uim3(:,1)=[q0;dq0];
B3=[1,-dtim3; w0^2*dtim3,1];B3=inv(B3);
for j=1:length(t3)
    Uim3(:,j+1)= B3*Uim3(:,j);
end
Uim3(:,length(tim3)+1)=[];

plot(tim3,Uim3(1,:))
hold on;
ezplot(q,[0,T0,-2,2])
legend('Euler implicite n=300','Euler implicite n=1000','Euler
    implicite n=2000','Euler implicite n=3000','Solution exacte')

```



3.4

```

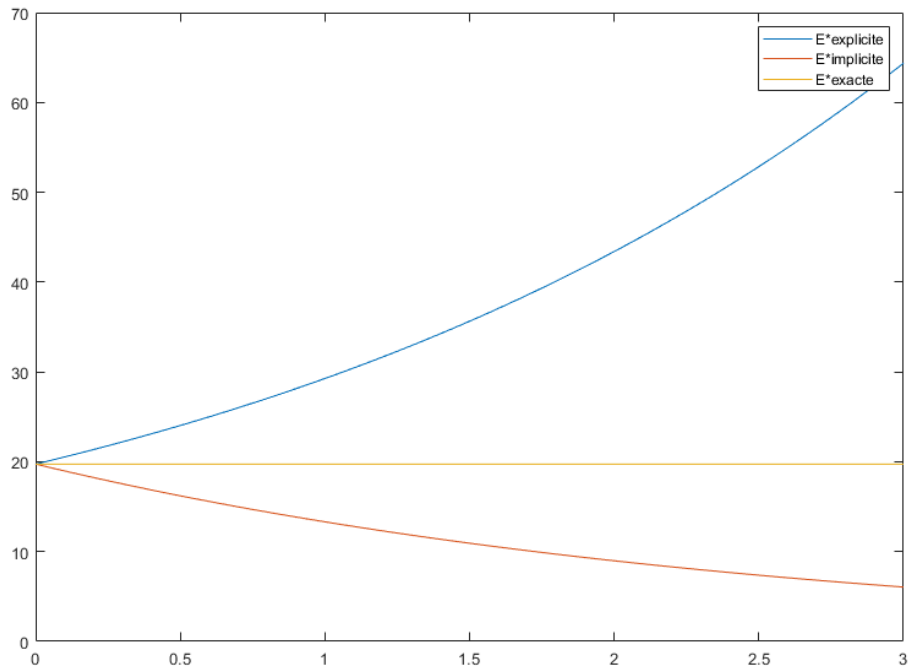
clf;
% La quantité E* associée au schéma d'EULER implicite

```

```

for j=1:length(t)
    Eimp(j)=1/2*(Uim(2,j)*Uim(2,j)+4*pi*pi*Uim(1,j)*Uim(1,j));
end
plot(t,Eexpl)
hold on;
plot(t,Eimp)
hold on;
Eexa(1:length(t))=Eq;
plot(t,Eexa)
legend('E*explicite','E*implicite','E*exacte')

```



3.5

```

valim=eig(B)
valim1=eig(B1)
valim2=eig(B2)
valim3=eig(B3)
% On voit que le schema d'Euler implicite est toujours stable dans ce
cas.

```

```
valim =
```

```

    0.9961 + 0.0626i
    0.9961 - 0.0626i

```

```
valim1 =
```

```
0.9996 + 0.0188i
0.9996 - 0.0188i
```

```
valim2 =
```

```
0.9999 + 0.0094i
0.9999 - 0.0094i
```

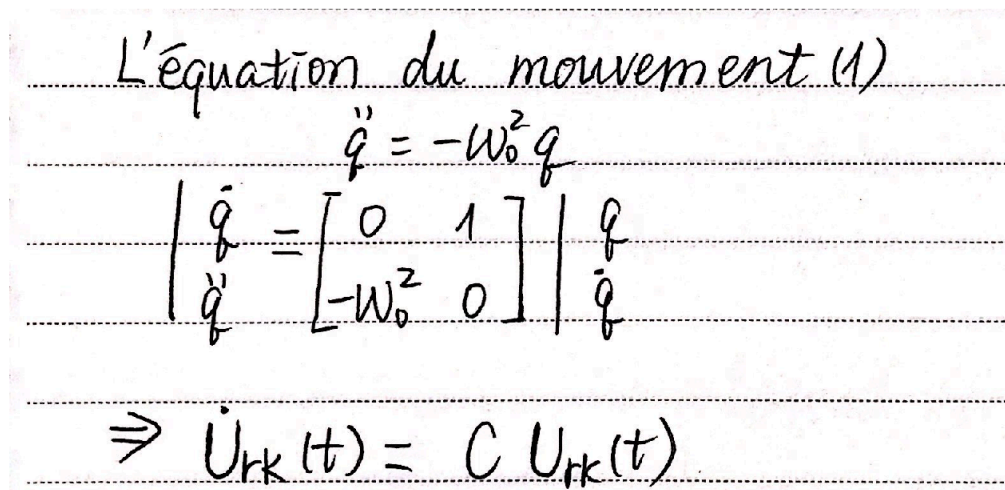
```
valim3 =
```

```
1.0000 + 0.0063i
1.0000 - 0.0063i
```

4.1

4.1 Transformez l'équation du mouvement (1) afin d'obtenir une formulation adaptée aux schémas du premier ordre.

```
clf;
B=imread('image_20200313C.jpg');
imshow(B)
```



L'équation du mouvement (1)

$$\ddot{q} = -\omega_0^2 q$$
$$\begin{cases} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} q \\ \dot{q} \end{cases}$$
$$\Rightarrow U_{rk}(t) = C U_{rk}(t)$$

4.2

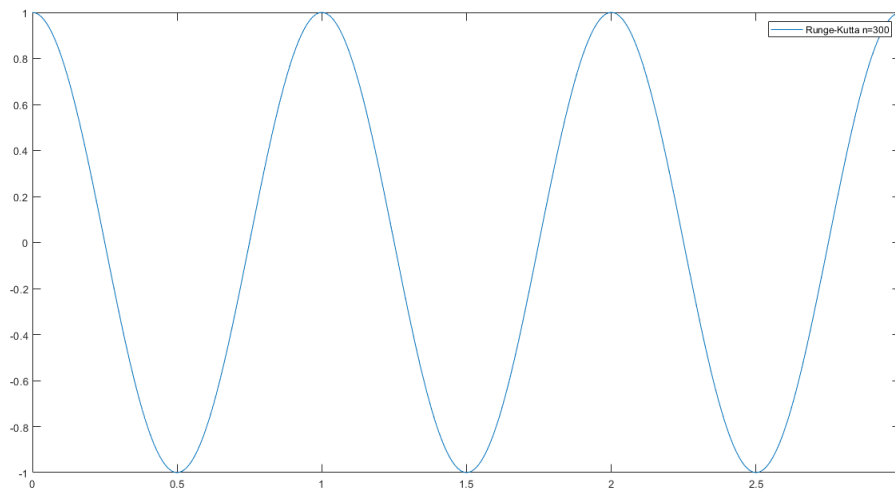
schema de RUNGE KUTTA

```
n=300;dt=T0/n;
t=0:dt:T0;
C=[0,1; -w0^2,0];
```

```

Urk(:,1)=[q0;dq0];
for j=1:length(t)
    k1=C*Urk(:,j);
    k2=C*(Urk(:,j)+1/2*k1*dt);
    k3=C*(Urk(:,j)+1/2*k2*dt);
    k4=C*(Urk(:,j)+k3*dt);
    Urk(:,j+1)= Urk(:,j)+1/6*dt*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end
Urk(:,length(t)+1)=[];
plot(t,Urk(1,:))
legend('Runge-Kutta n=300')

```



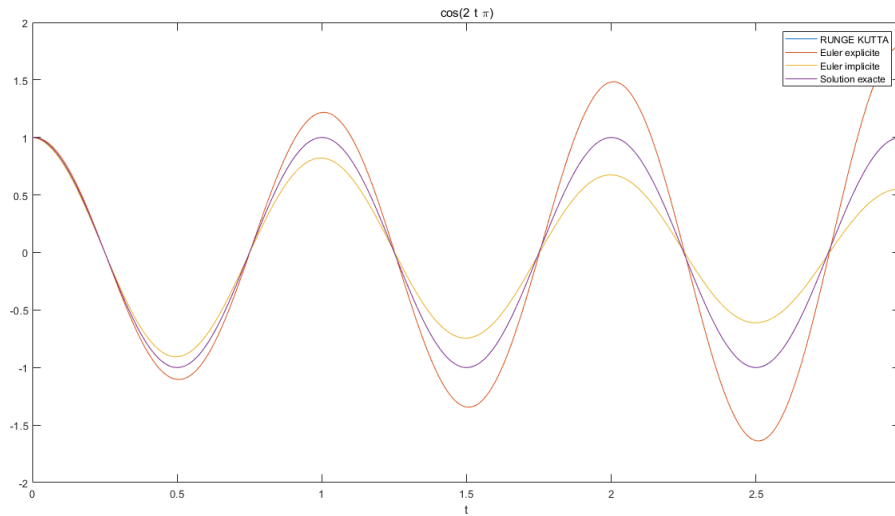
4.3

4.3 Comparez les valeurs de la solution $q(t)$ obtenues avec un schéma de RUNGE KUTTA avec celles calculées précédemment (solution exacte, schéma d'EULER explicite et schéma d'EULER implicite).

```

clf;
plot(t,Urk(1,:))
hold on;
plot(t,U(1,:))
hold on;
plot(t,Uim(1,:))
hold on;
ezplot(q,[0,T0,-2,2])
legend('RUNGE KUTTA','Euler explicite','Euler implicite','Solution
exacte')
% On peut conclure que les valeurs de la solution q(t) obtenues avec
un
% schéma de RUNGE KUTTA sont beaucoup plus mieux que celles avec les
autres
% schémas

```



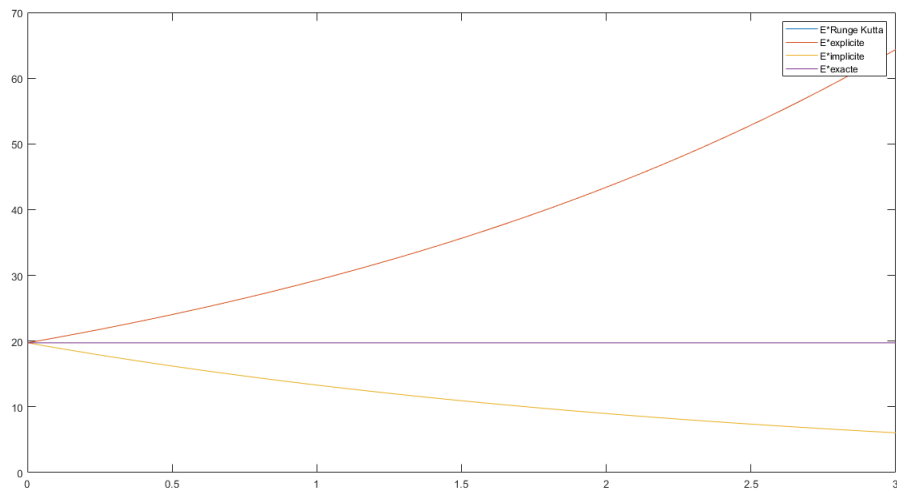
4.4

La quantité E^* associée au schéma de RUNGE KUTTA

```

clf;
for j=1:length(t)
    Erk(j)=1/2*(Urk(2,j)*Urk(2,j)+4*pi*pi*Urk(1,j)*Urk(1,j));
end
plot(t,Erk)
hold on;
plot(t,Eexpl)
hold on;
plot(t,Eimp)
hold on;
plot(t,Eexa)
legend('E*Runge Kutta','E*explicite','E*implicite','E*exacte')
% On peut voir que avec ce schéma, il n'y a pas d'atténuation et il
% converge vers la quantité E* de la solution exacte

```



5.1

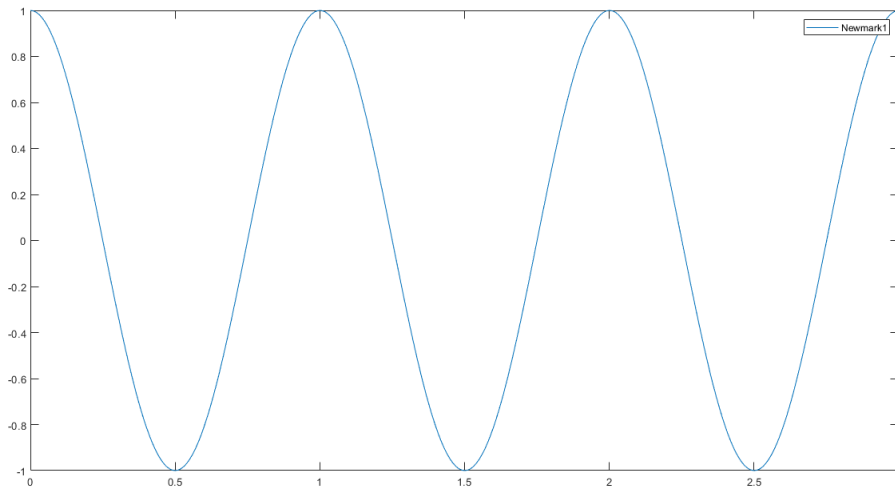
Résolution avec un schéma de NEWMARK $\gamma = 0.5$ $\beta = 0.25$

5.1.1

```

clf;
n=300;dt=T0/n;
t=0:dt:T0;
gamma=0.5;beta=0.25;
Bnewm1=[1+beta*dt*dt*w0*w0,0;gamma*dt*w0*w0,1];
Cnewm1=[1-(0.5-beta)*dt*dt*w0*w0,dt; -(1-gamma)*dt*w0*w0,1];
% La matrice d'amplification
Anewm1=inv(Bnewm1)*Cnewm1;
Unewm1(:,1)=[q0;dq0];
for j=1:length(t)
    Unewm1(:,j+1)=Anewm1*Unewm1(:,j);
end
Unewm1(:,length(t)+1)=[];
plot(t,Unewm1(1,:))
legend('Newmark1')

```

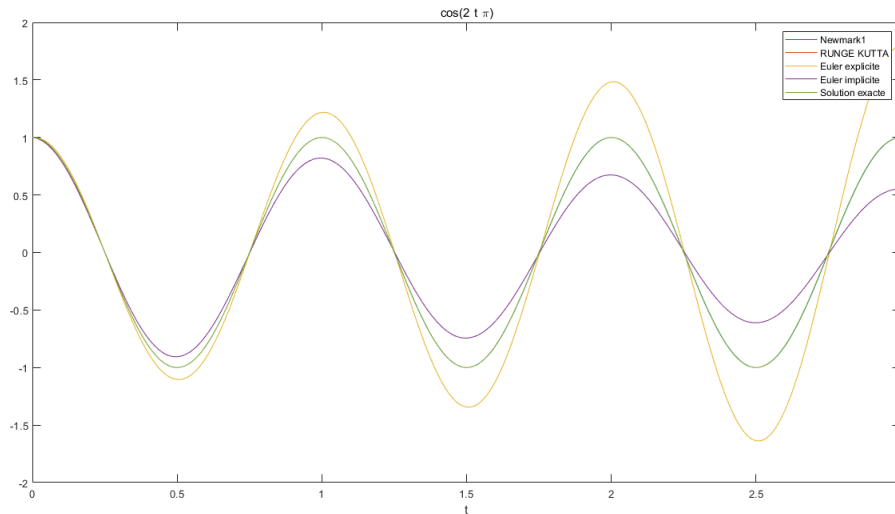
5.1.2

5.1.2 Comparez les cinq solutions (solution exacte, EULER explicite, EULER implicite, RUNGE KUTTA et NEWMARK $\lambda = 0.5$ $\beta = 0.25$) sur l'intervalle de temps $[0, T_0]$.

```

clf;
plot(t,Unewm1(1,:))
hold on;
plot(t,Urk(1,:))
hold on;
plot(t,U(1,:))
hold on;
plot(t,Uim(1,:))
hold on;
ezplot(q,[0,T0,-2,2])
legend('Newmark1','RUNGE KUTTA','Euler explicite','Euler
    implicite','Solution exacte')

```



5.1.3

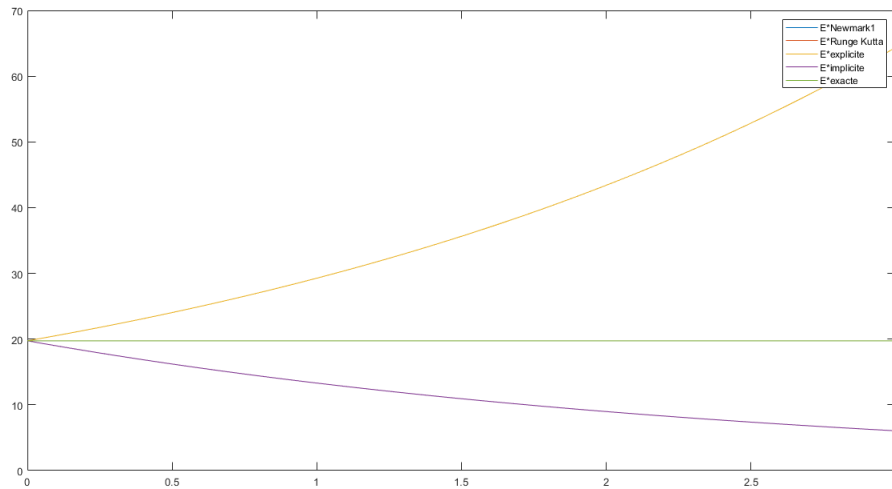
La quantité E^* associée au NEWMARK $\gamma = 0.5$ $\beta = 0.25$

```

for j=1:length(t)

    Enewm1(j)=1/2*(Unewm1(2,j)*Unewm1(2,j)+4*pi*pi*Unewm1(1,j)*Unewm1(1,j));
end
clf;
plot(t,Enewm1)
hold on;
plot(t,Erk)
hold on;
plot(t,Eexpl)
hold on;
plot(t,Eimp)
hold on;
plot(t,Eexa)
legend('E*Newmark1','E*Runge
    Kutta','E*explicite','E*implicite','E*exacte')
% On peut voir que avec le schema de NEWMARK  $\gamma=0.5$   $\beta=0.25$ , il
n'y a
% pas d'atténuation et il converge vers la quantité  $E^*$  de la solution
% exacte comme le schema de RUNGE KUTTA.

```



5.1.4

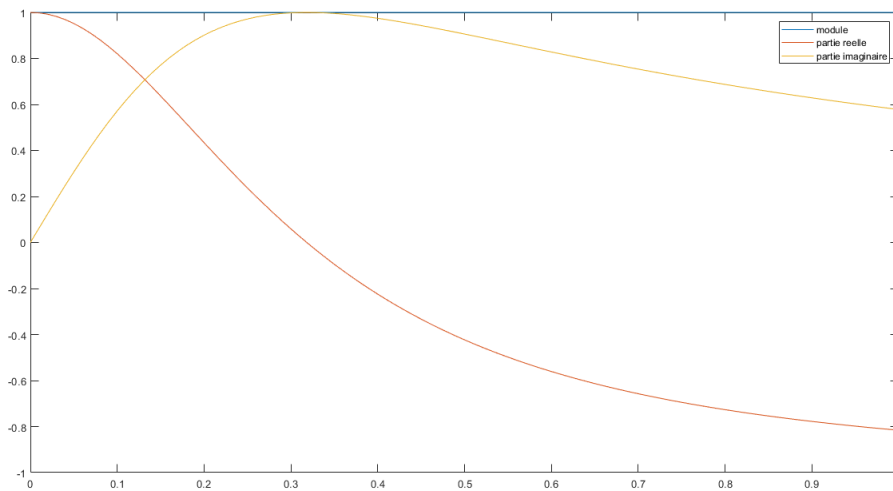
5.1.4 Calculez les valeurs propres de la matrice d'amplification pour des valeurs de dt comprises entre 0s et 1s .

```

dt514=0:0.01:1;
for j=1:length(dt514)

    Bnewm514{1,j}=[1+beta1*dt514(j)*dt514(j)*w0*w0,0;gama1*dt514(j)*w0*w0,1];
    Cnewm514{1,j}=[1-(0.5-beta1)*dt514(j)*dt514(j)*w0*w0,dt514(j); -
(1-gama1)*dt514(j)*w0*w0,1];
    Anewm514{1,j}=inv(Bnewm514{1,j})*Cnewm514{1,j};
    %les valeurs propres de la matrice d'amplification pour different
    dt
    VPA514(:,j)=eig(Anewm514{1,j});
    %le module des valeurs propres
    moduleVP(j)=sqrt(real(VPA514(1,j))^2+imag(VPA514(1,j))^2);
end
clf;
plot(dt514,moduleVP)
hold on;
plot(dt514,real(VPA514(1,:)))
hold on;
plot(dt514,imag(VPA514(1,:)))
legend('module','partie reelle','partie imaginaire')
% On peut conclure que plus le pas de temps dt est petit, plus la
partie reelle
% de la valeur propre est petite.Et il existe un point dont la partie
% reelle est nulle.

```



5.2

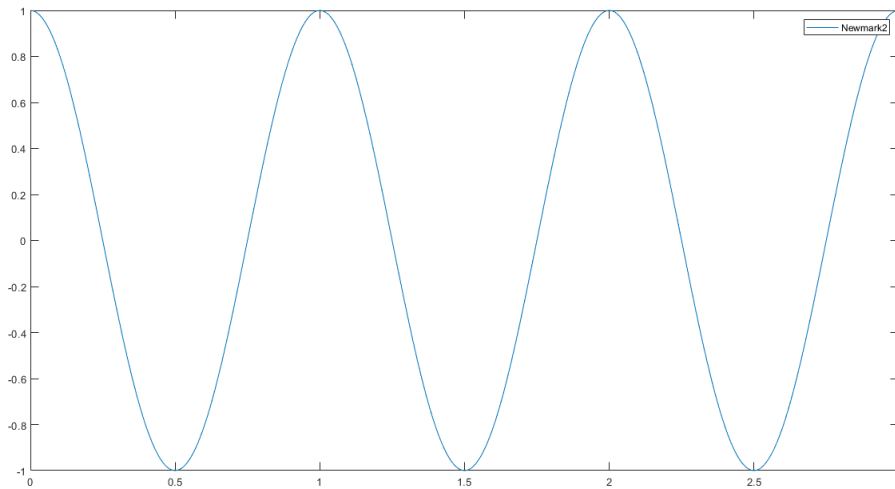
5.2 Résolution avec un schéma de NEWMARK $\gamma = 0.5$ $\beta = 0$

5.2.1

```

clf;
n=300;dt=T0/n;
t=0:dt:T0;
gama2=0.5;beta2=0;
Bnewm2=[1+beta2*dt*dt*w0*w0,0;gama2*dt*w0*w0,1];
Cnewm2=[1-(0.5-beta2)*dt*dt*w0*w0,dt; -(1-gama2)*dt*w0*w0,1];
% La matrice d'amplification
Anewm2=inv(Bnewm2)*Cnewm2;
Unewm2(:,1)=[q0;dq0];
for j=1:length(t)
    Unewm2(:,j+1)=Anewm2*Unewm2(:,j);
end
Unewm2(:,length(t)+1)=[];
plot(t,Unewm2(1,:))
legend('Newmark2')

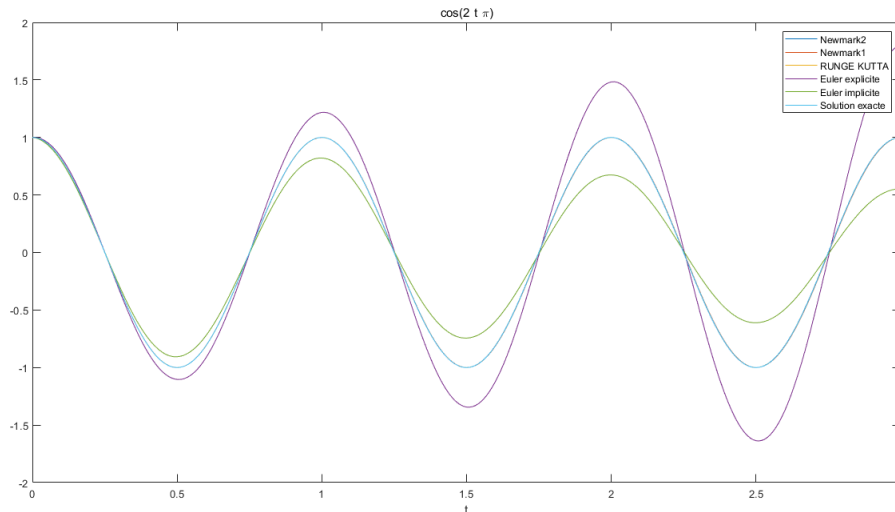
```



5.2.2

comparer avec les autres schemas

```
clf;
plot(t,Unewm2(1,:))
hold on;
plot(t,Unewm1(1,:))
hold on;
plot(t,Urk(1,:))
hold on;
plot(t,U(1,:))
hold on;
plot(t,Uim(1,:))
hold on;
ezplot(q,[0,T0,-2,2])
legend('Newmark2','Newmark1','RUNGE KUTTA','Euler explicite','Euler
implicite','Solution exacte')
% On peut voir que les solutions a partie des schemas de NEWMARK et
RUNGE-KUTTA beaucoup plus pres avec la solution
% exacte que les autres schemas
```



5.2.3

```

dt=0.2

clf;
dt1=0.2;
t1=0:dt1:T0;
    gama1=0.5;beta1=0.25;
    Bnewm1=[1+beta1*dt1*dt1*w0*w0,0;gama1*dt1*w0*w0,1];
    Cnewm1=[1-(0.5-beta1)*dt1*dt1*w0*w0,dt1; -(1-gama1)*dt1*w0*w0,1];
    % La matrice d'amplification
    Anewm1=inv(Bnewm1)*Cnewm1;
    Unewm15231(:,1)=[q0;dq0];
    for j=1:length(t1)
        Unewm15231(:,j+1)=Anewm1*Unewm15231(:,j);
    end
    Unewm15231(:,length(t1)+1)=[];

    gama2=0.5;beta2=0;
    Bnewm2=[1+beta2*dt1*dt1*w0*w0,0;gama2*dt1*w0*w0,1];
    Cnewm2=[1-(0.5-beta2)*dt1*dt1*w0*w0,dt1; -(1-gama2)*dt1*w0*w0,1];
    % La matrice d'amplification
    Anewm2=inv(Bnewm2)*Cnewm2;
    Unewm25231(:,1)=[q0;dq0];
    for j=1:length(t1)
        Unewm25231(:,j+1)=Anewm2*Unewm25231(:,j);
    end
    Unewm25231(:,length(t1)+1)=[];

figure(1)
plot(t1,Unewm15231(1,:))
hold on;
plot(t1,Unewm25231(1,:))
hold on;
ezplot(q,[0,T0,-2,2])

```

```

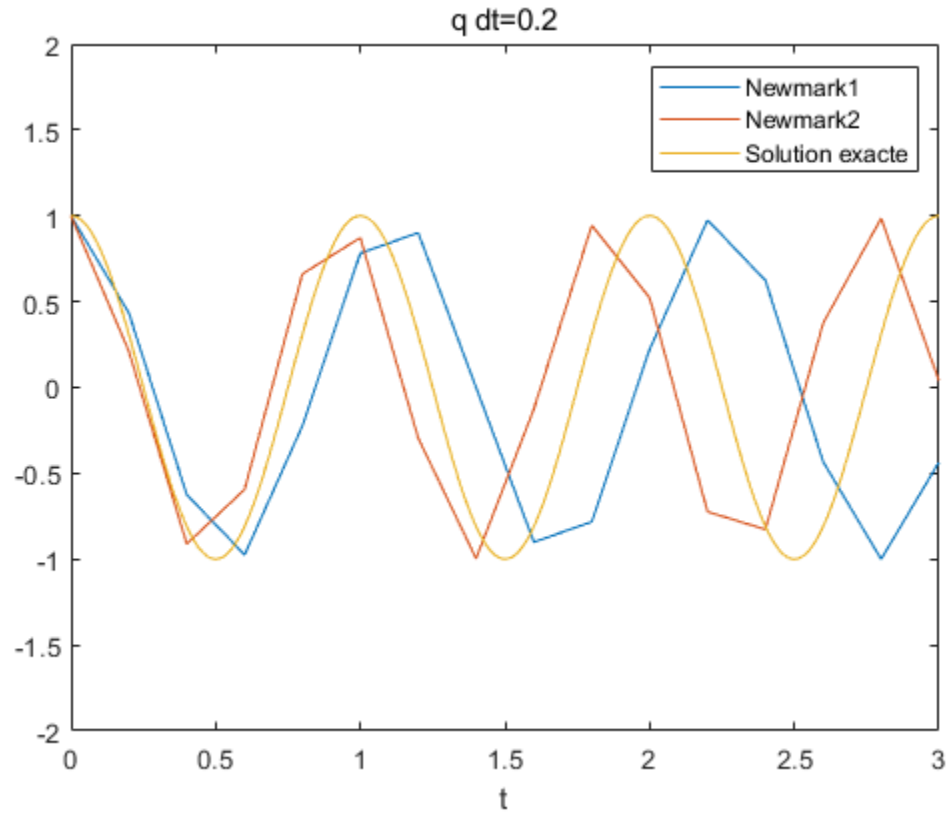
legend('Newmark1','Newmark2','Solution exacte')
title('q dt=0.2')

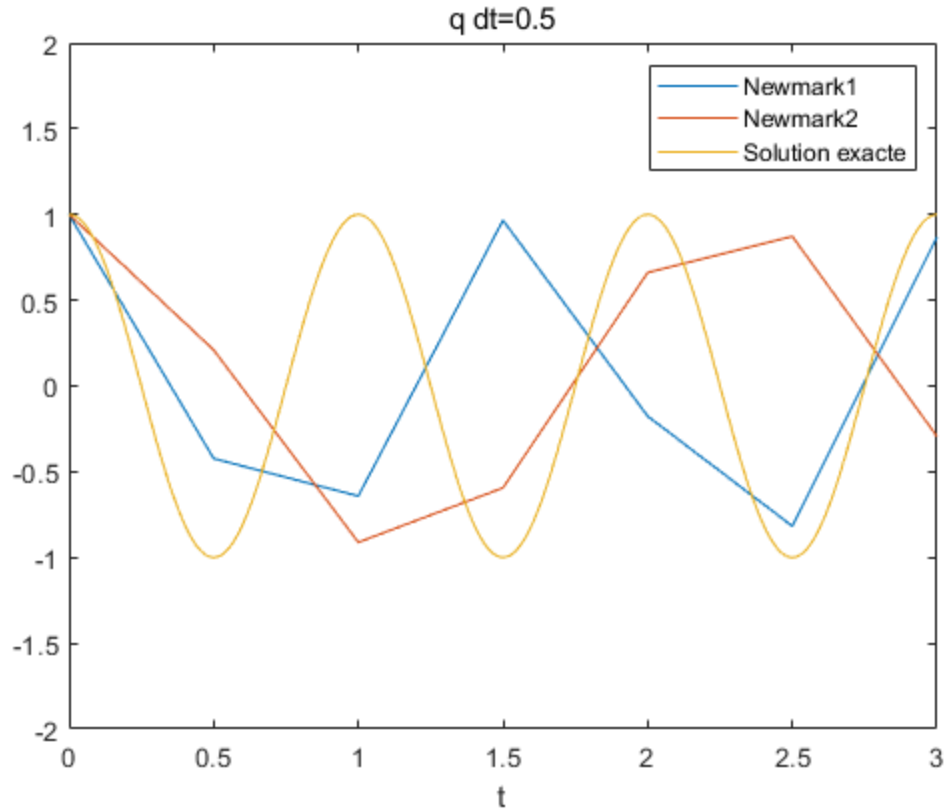
% dt=0.5
dt2=0.5;
t2=0:dt2:T0;
    gama1=0.5;beta1=0.25;
    Bnewm1=[1+beta1*dt2*dt2*w0*w0,0;gama1*dt2*w0*w0,1];
    Cnewm1=[1-(0.5-beta1)*dt2*dt2*w0*w0,dt2; -(1-gama1)*dt2*w0*w0,1];
    % La matrice d'amplification
    Anewm1=inv(Bnewm1)*Cnewm1;
    Unewm15232(:,1)=[q0;dq0];
    for j=1:length(t2)
        Unewm15232(:,j+1)=Anewm1*Unewm15232(:,j);
    end
    Unewm15232(:,length(t2)+1)=[];

    gama2=0.5;beta2=0;
    Bnewm25=[1+beta2*dt2*dt2*w0*w0,0;gama2*dt2*w0*w0,1];
    Cnewm2=[1-(0.5-beta2)*dt2*dt2*w0*w0,dt2; -(1-gama2)*dt2*w0*w0,1];
    % La matrice d'amplification
    Unewm25232(:,1)=[q0;dq0];
    for j=1:length(t2)
        Unewm25232(:,j+1)=Anewm2*Unewm25232(:,j);
    end
    Unewm25232(:,length(t2)+1)=[];
figure(2)
plot(t2,Unewm15232(1,:))
hold on;
plot(t2,Unewm25232(1,:))
hold on;
ezplot(q,[0,T0,-2,2])
legend('Newmark1','Newmark2','Solution exacte')
title('q dt=0.5')

% On peut voir que si le pas de temps est tres grand, les solutions ne
% sont pas bien comparee avec la solution exacte.

```





5.2.4

```

dt524=0:0.0001:1;
for j=1:length(dt524)

    Bnewm524{1,j}=[1+beta2*dt524(j)*dt524(j)*w0*w0,0;gama2*dt524(j)*w0*w0,1];
    Cnewm524{1,j}=[1-(0.5-beta2)*dt524(j)*dt524(j)*w0*w0,dt524(j); -
(1-gama2)*dt524(j)*w0*w0,1];
    Anewm524{1,j}=inv(Bnewm524{1,j})*Cnewm524{1,j};
    %les valeurs propres de la matrice d'amplification pour different
    dt
    VPA524(:,j)=eig(Anewm524{1,j});
    %le module des valeurs propres
    moduleVP2(j)=sqrt(real(VPA524(1,j))^2+imag(VPA524(1,j))^2);
end
close all
plot(dt524,moduleVP2)
hold on;
plot(dt524,real(VPA524(1,:)))
hold on;
plot(dt524,imag(VPA524(1,:)))
legend('module','partie reelle','partie imaginaire')

syms dt5240 w0
Bnewm5240=[1+beta2*dt5240*dt5240*w0*w0,0;gama2*dt5240*w0*w0,1];

```

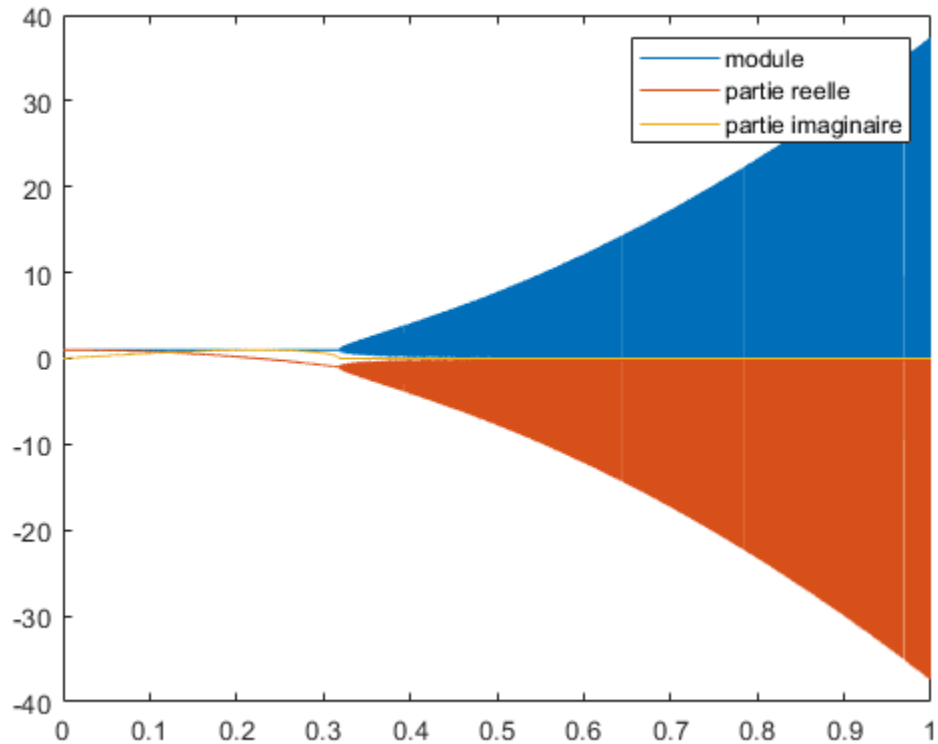
```

Cnewm5240=[1-(0.5-beta2)*dt5240*dt5240*w0*w0,dt5240; -(1-
gama2)*dt5240*w0*w0,1];
Anewm5240=inv(Bnewm5240)*Cnewm5240;
%les valeurs propres de la matrice d'amplification
VPA5240=eig(Anewm5240)

% le pas de temps de critique est 1/pi
% donc alpha=1

```

VPA5240 =

$$\begin{aligned}
 &1 - (dt5240*w0*((dt5240*w0 - 2)*(dt5240*w0 + 2))^{(1/2)})/2 - \\
 &(dt5240^2*w0^2)/2 \\
 &(dt5240*w0*((dt5240*w0 - 2)*(dt5240*w0 + 2))^{(1/2)})/2 - \\
 &(dt5240^2*w0^2)/2 + 1
 \end{aligned}$$


Published with MATLAB® R2019a