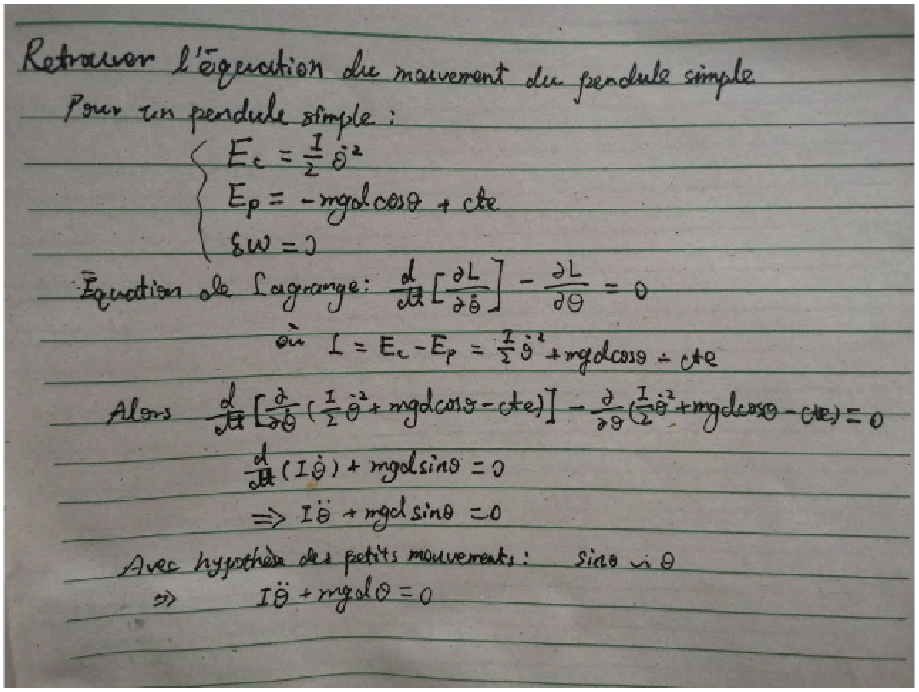
Table of Contents

Retrouver de l'équation du mouvement du pendule simple

```
P1 = imread('Equation du mouvement.jpg');
imshow(P1);
```


Retrouver l'équation du mouvement du pendule simple

Pour un pendule simple :

$$\begin{cases} E_c = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 \\ E_p = -mgd\cos\theta + cte \\ \delta W = 0 \end{cases}$$

Équation de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

où $L = E_c - E_p = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + mgd\cos\theta - cte$

Alors $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + mgd\cos\theta - cte\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + mgd\cos\theta - cte\right) = 0$

$\frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) + mgd\sin\theta = 0$

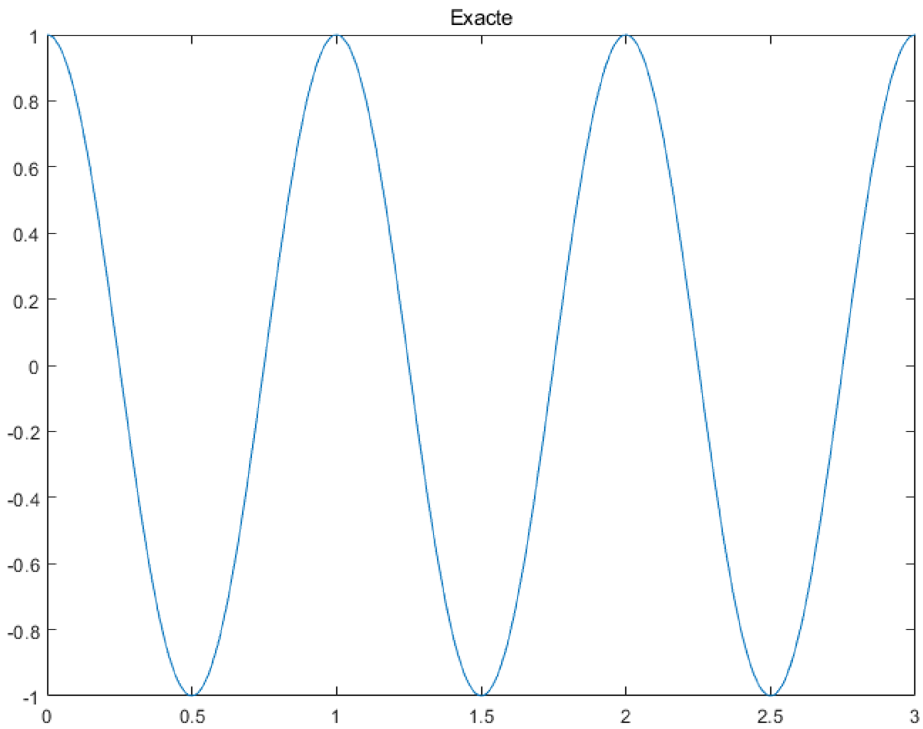
$\Rightarrow I\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0$

Avec hypothèse des petits mouvements : $\sin\theta \approx \theta$

$\Rightarrow \quad I\ddot{\theta} + mgd\theta = 0$

1.1

```
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
q0 = 1;
dq0 = 0;
T0 = 3;
% analytiquement, la forme de q est q = a*cos(w0t)+b*sin(w0t)
% q0 = 1,alors a = 1; dq0 = 0,alors b = 0, donc q = cos (w0t)
t = (0:0.01:T0);
q = cos(w0*t);
plot(t,q);
title('Exacte');
```



1.2

E = 0.5*(dq0c+w0c*q0c)

```
E = w0c/2;
% commentaire: E est une constante
```

2.1

```
P2 = imread('relation 2.1.jpg');
imshow(P2);
```

2.1 Relation d'Euler Explicite :

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t \times \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t \, \dot{q}_j \\ \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t \, \ddot{q}_j \end{cases}$$

Comme $\ddot{q} + w_0^2 q = 0 \Rightarrow \ddot{q} = -w_0^2 q$

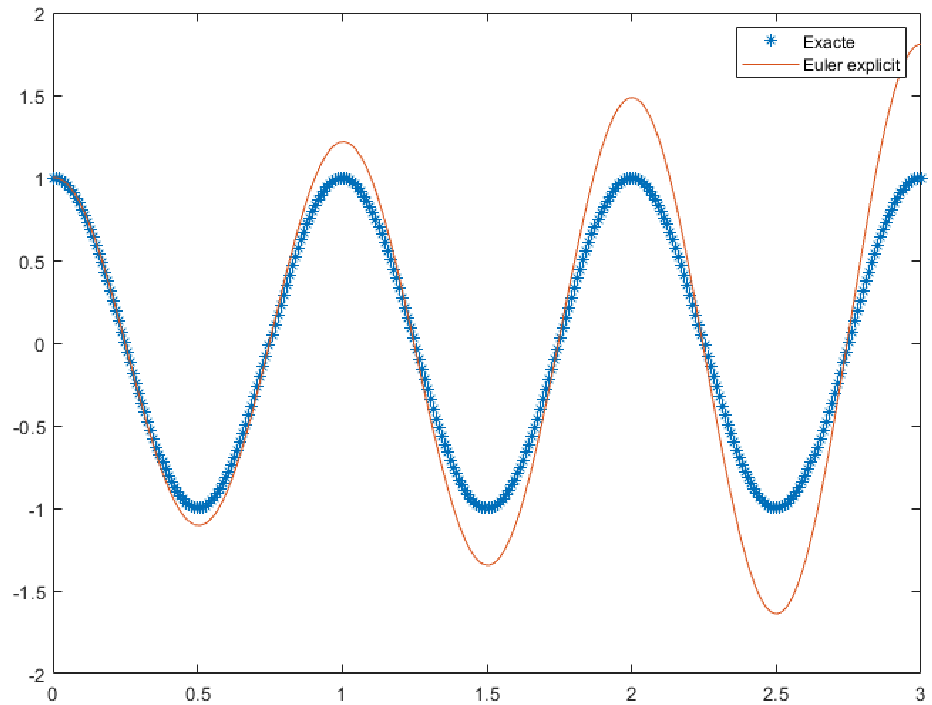
alors $\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t(-w_0^2 q_j)$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t \, \dot{q}_j \\ \dot{q}_{j+1} = -w_0^2 \Delta t \, q_j + \dot{q}_j \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -w_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix}$$

2.2

Euler explicite avec matrice d'amplification

```
dt = 0.01; % ou 0.1, 0.001
A = [1,dt;-w0c*dt,1];
Q = [q0;dq0];
% construir deux tablaux pour q et dq
Q1b = [];
dQ1b = [];
Q1b(1) = q0;
dQ1b(1) = dq0;
n = 1;
E1 = [];
E1(1) = 1/2*(dQ1b(1)^2 + w0c * Q1b(1)^2);
for t = 0:dt:T0
    n = n+1;
    Q = A*Q;
    Q1b(n) = Q(1,1);
    dQ1b(n) = Q(2,1);
    E1(n) = 1/2*(dQ1b(n)^2 + w0c * Q1b(n)^2);
end
t1 = linspace(0,T0,n);
q = cos(w0*t1);
plot(t1,q,'*',t1,Q1b);
legend('Exacte','Euler explicit')
```

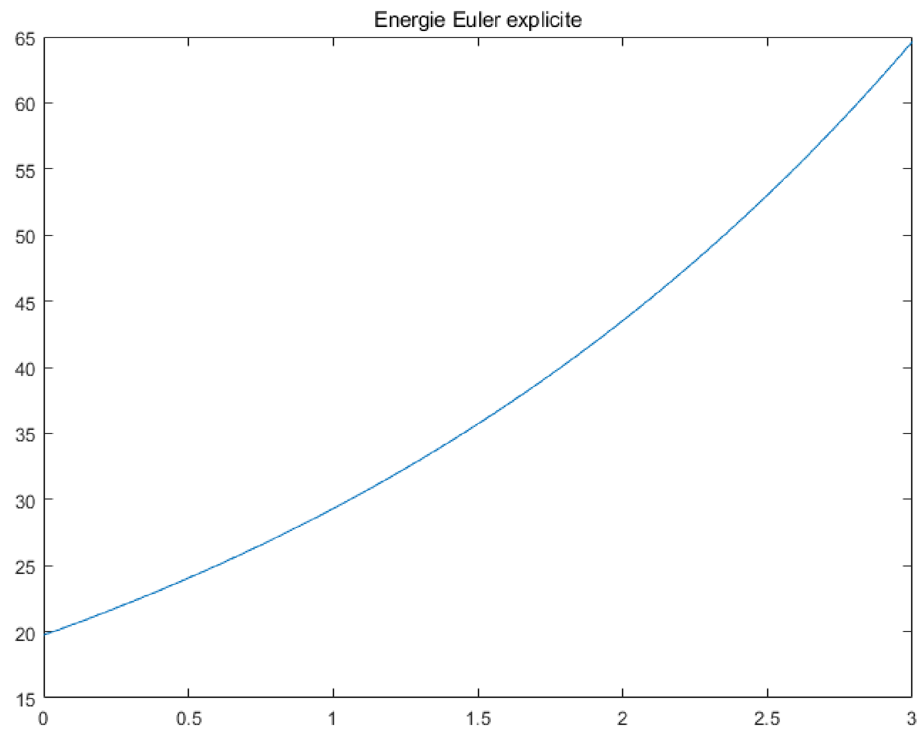


2.3

oui,la solution est divergente sur le schema

2.4

```
plot(t1,E1);
title('Energie Euler explicite')
% Remarque: E augment du temps, et la valeur initial = la valeur
 obtenue de
% de la solution exacte
% E augment moins vite si dt est plus petit
```



2.5

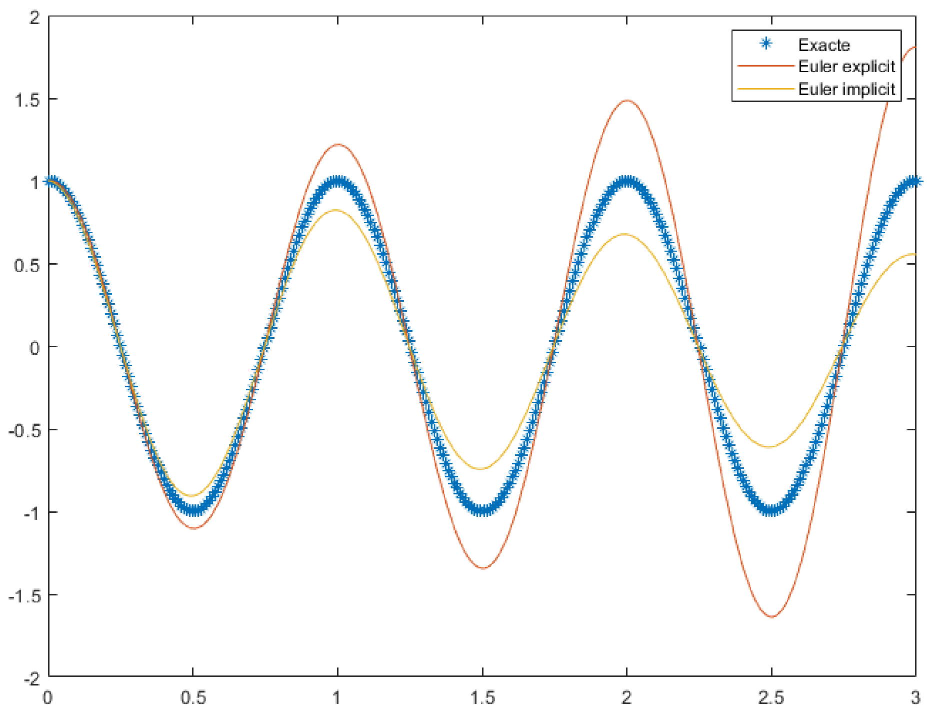
```
[V,D] = eig(A);
% dt = 0.1
%D =
%   1.0000 + 0.6283i   0.0000 + 0.0000i
%   0.0000 + 0.0000i   1.0000 - 0.6283i
% abs(D)=    1.1810         0
%                 0    1.1810
% dt = 0.01
%D =
%   1.0000 + 0.0628i   0.0000 + 0.0000i
%   0.0000 + 0.0000i   1.0000 - 0.0628i
% abs(D)=
%            1.0020         0
%                 0    1.0020
% les valeur absolue de D est toujours plus grande que 1,alors c'est
% instable
```

3.1

Euler implicite avec matrice d'amplification

```
A2 = [1,dt;-w0c*dt,1];
A2 = A2/(1+w0c*dt*dt);
Q2 = [q0;dq0];
```

```
% construir deux tablaux pour q et dq
Q2b = [];
dQ2b = [];
Q2b(1) = q0;
dQ2b(1) = dq0;
n2 = 1;
E2 = [];
E2(1) = 1/2*(dQ2b(1)^2 + w0c * Q2b(1)^2);
for t = 0:dt:T0
    n2 = n2+1;
    Q2 = A2*Q2;
    Q2b(n2) = Q2(1,1);
    dQ2b(n2) = Q2(2,1);
    E2(n2) = 1/2*(dQ2b(n2)^2 + w0c * Q2b(n2)^2);
end
t2 = linspace(0,T0,n2);
q = cos(w0*t2);
plot(t2,q,'*',t2,Q1b,'-',t2,Q2b);
legend('Exacte','Euler explicit','Euler implicit')
```



3.2

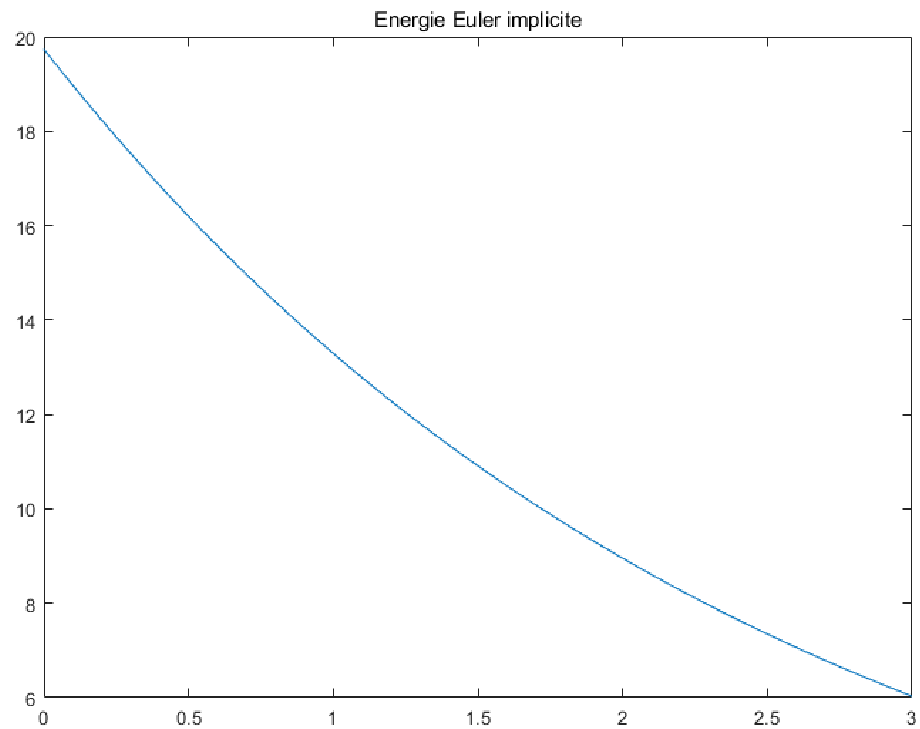
La solution d'Euler explicit diverge, et Euler implicit converge

3.3

oui, on peut voir une amortissement, et plus dt est petit, plus l'attenuation est faible

3.4

```
plot(t2,E2);
title('Energie Euler implicite')
% Remarque:E diminue du temps, et la valeur initial = la valeur
 obtenue de
% de la solution exacte
% E diminue moins vite si dt est plus petit
```



3.5

```
[V2,D2] = eig(A2);
% dt = 0.01
% D2 =
%       0.9961 + 0.0626i   0.0000 + 0.0000i
%       0.0000 + 0.0000i   0.9961 - 0.0626i
% abs(D2)=    0.9980         0
%                 0    0.9980
% dt = 0.1
% D2 =
```

```
%   0.7170 + 0.4505i   0.0000 + 0.0000i
%   0.0000 + 0.0000i   0.7170 - 0.4505i
% abs(D2)=
%            0.8467         0
%                 0    0.8467
% les valeur absolue de D est toujours plus petite que 1,alors c'est
% stable, et on voie une amortissement
```

4.1

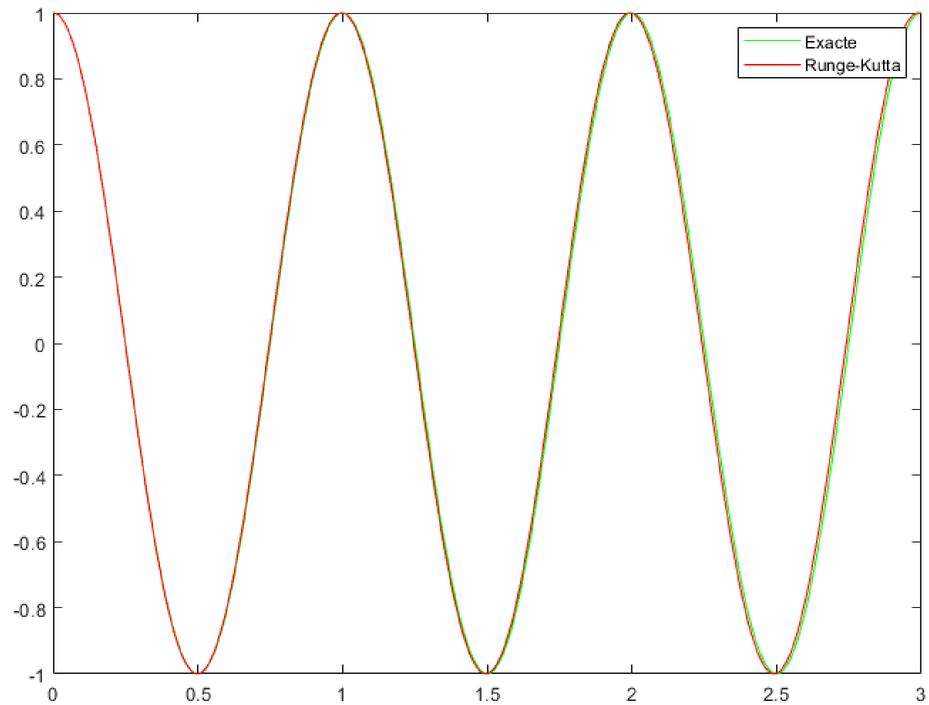
on remplace q par u pour eviter la repetition

```
u = 1;
du = 0;
U = [u;du];% q0 = 1;dq0 = 0
A3 = [0,1;-w0c,0];
dU = A3 * U; % dU = [dq,d2q]
```

4.2

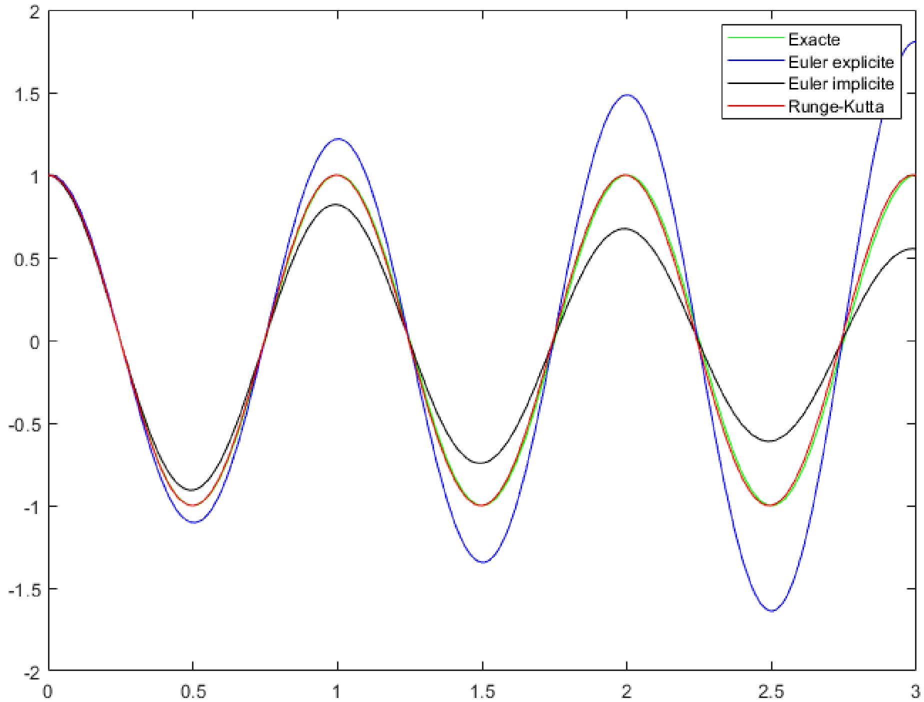
comme j'ai fait en 4.1, je préfère utiliser la méthode avec matrice

```
Q3b = [];
dQ3b = [];
Q3b(1) = q0;
dQ3b(1) = dq0;
n3 = 1;
E3 = [];
E3(1) = 1/2*(dQ3b(1)^2 + w0c * Q3b(1)^2);
for t = 0:dt:T0
    n3 = n3+1;
    k1 = A3 * U;
    k2 = A3 * (U + k1*dt/2);
    k3 = A3 * (U + k2*dt/2);
    k4 = A3 * (U + k3*dt);
    K = (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
    U = U + K * dt;
    Q3b(n3) = U(1,1);
    dQ3b(n3) = U(2,1);
    E3(n3) = 1/2*(dQ3b(n3)^2 + w0c * Q3b(n3)^2);
end
plot(t2,q,'g',t2,Q3b,'r');
legend('Exacte','Runge-Kutta')
% la solution de Runge-Kutta est très proche que la solution exacte
```



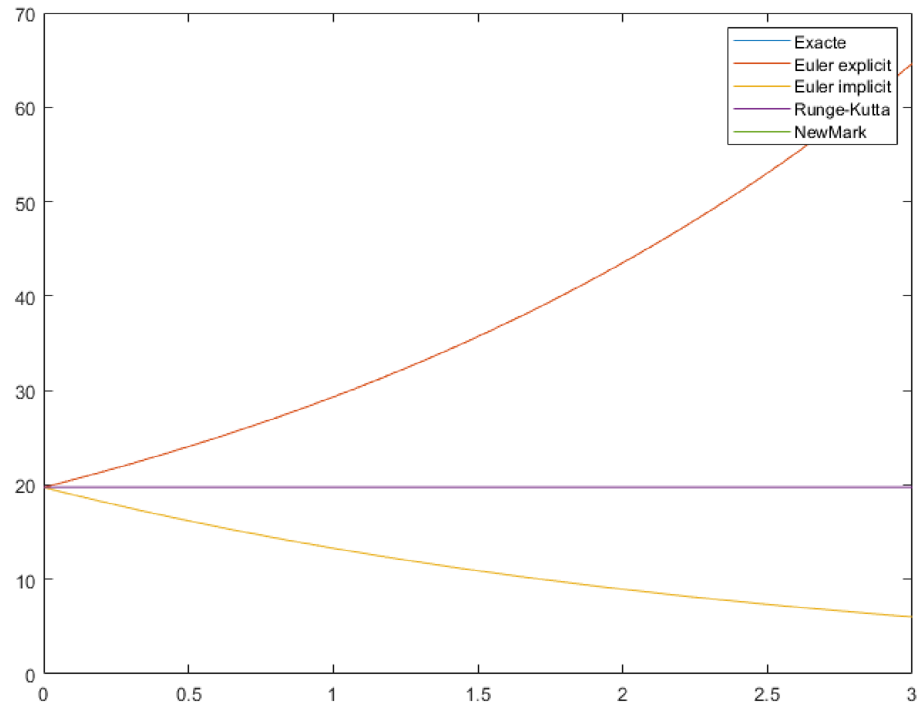
4.3

```
plot(t2,q,'g',t2,Q1b,'b',t2,Q2b,'k',t2,Q3b,'r');
legend('Exacte','Euler explicite','Euler implicite','Runge-Kutta')
% Remarque: Runge-Kutta est plus proche que la solution exacte,Euler
% explicite est divergente,et implicite est convergente
```



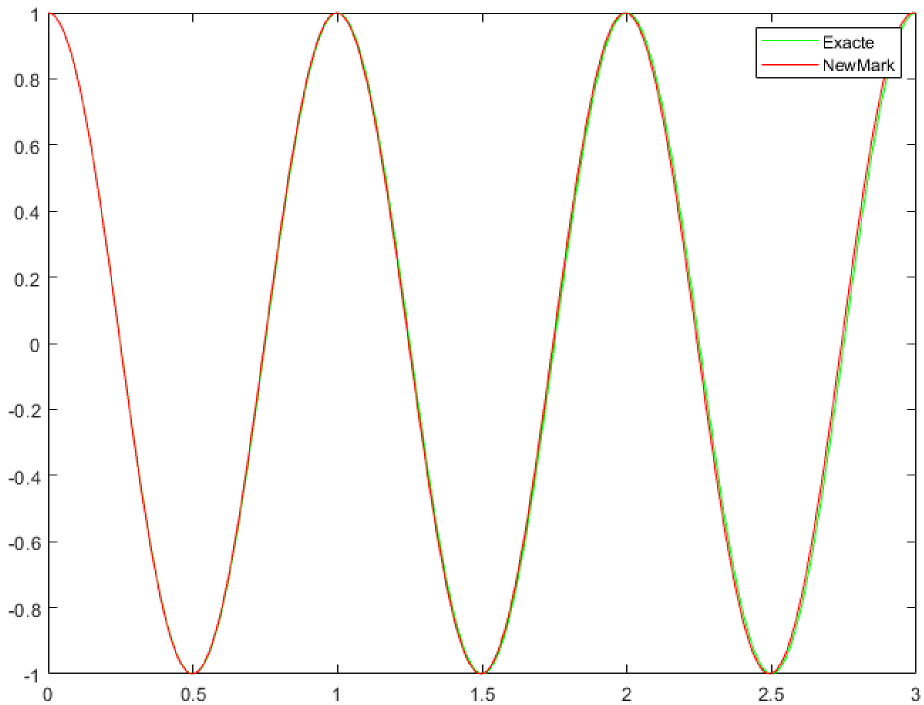
4.4

```
plot(t2,E,t2,E1,t2,E2,t2,E3);
legend('Exacte','Euler explicit','Euler implicit','Runge-
Kutta','NewMark')
% Remarque: l'energie Runge-Kutta est très stable#est proche que la
% solution exacte
```



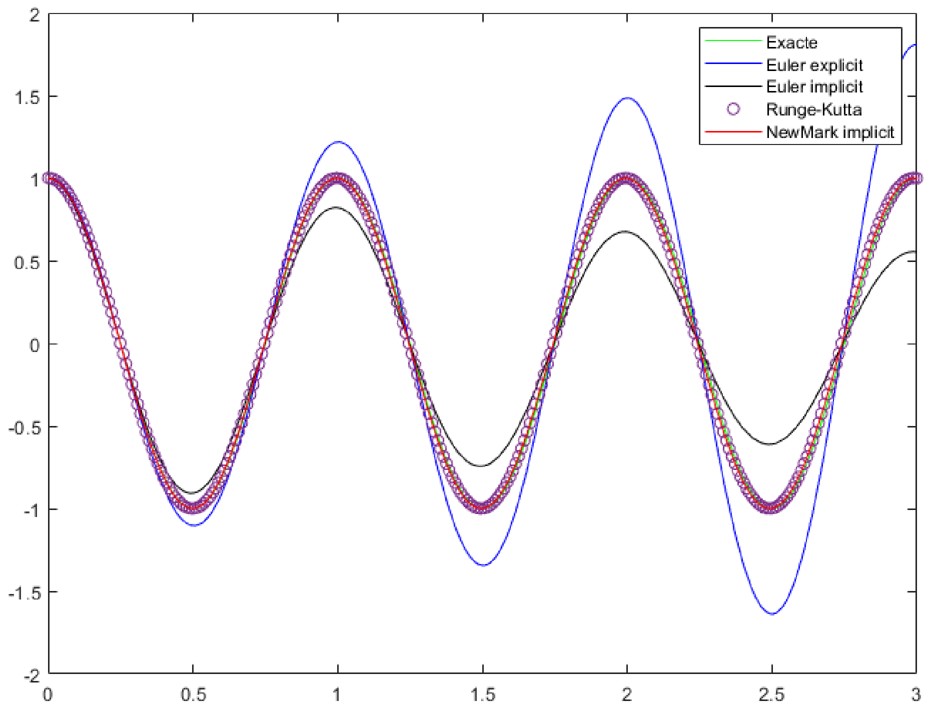
5.1.1

```
gamma = 0.5;
beta = 0.25;
% Avec matrice d'amplification
B = [1 + beta*dt^2*w0c,0;gamma*dt*w0c,1];
C = [1-(0.5-beta)*dt^2*w0c,dt;-(1-gamma)*dt*w0c,1];
A4 = inv(B)*C;
Q4b = [];
dQ4b = [];
Q4b(1) = q0;
dQ4b(1) = dq0;
Q4 = [q0;dq0];
n4 = 1;
E4 = [];
E4(1) = 1/2*(dQ4b(1)^2 + w0c * Q4b(1)^2);
for t = 0:dt:T0
    n4 = n4 + 1;
    Q4 = A4 * Q4;
    Q4b(n4) = Q4(1,1);
    dQ4b(n4) = Q4(2,1);
    E4(n4) = 1/2*(dQ4b(n4)^2 + w0c * Q4b(n4)^2);
end
t4 = linspace(0,T0,n4);
plot(t4,q,'g',t4,Q4b,'r');
legend('Exacte','NewMark')
```



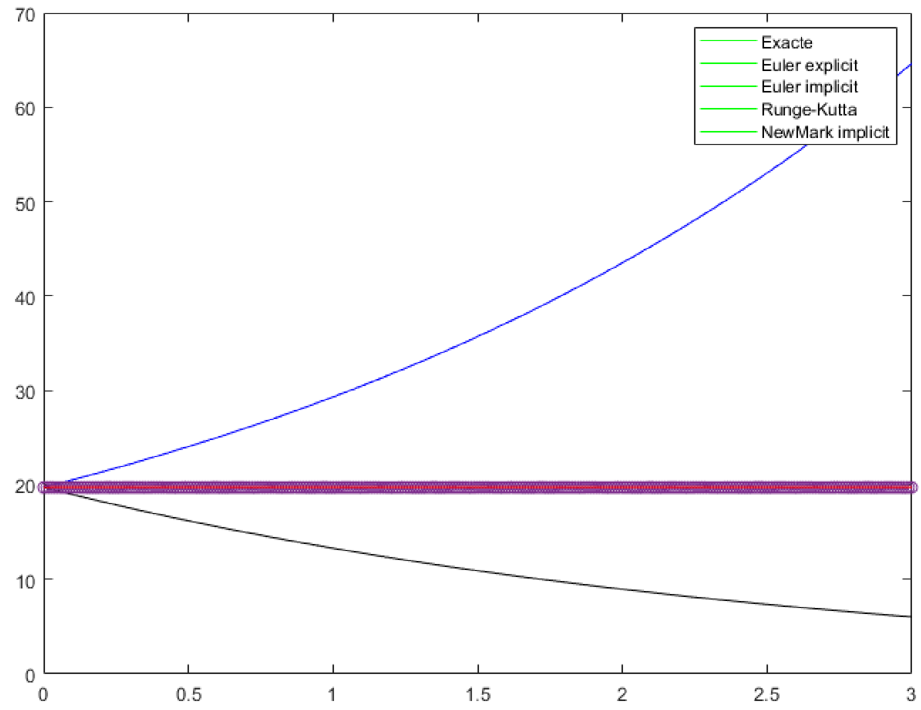
5.1.2

```
plot(t4,q,'g',t4,Q1b,'b',t4,Q2b,'k',t4,Q3b,'O',t4,Q4b,'r');
legend('Exacte','Euler explicit','Euler implicit','Runge-
Kutta','NewMark implicit')
% Remarque: New Mark et Runge-Kutta est plus proche que la solution
 exacte,Euler
% explicite est divergente,et implicite est convergente
```



5.1.3

```
plot(t4,E,'g',t4,E1,'b',t4,E2,'k',t4,E3,'O',t4,E4,'r');
legend('Exacte','Euler explicit','Euler implicit','Runge-
Kutta','NewMark implicit')
% Remarque: l'energie New mark et Runge-Kutta est très stable#est
 proche que la
% solution exacte
```



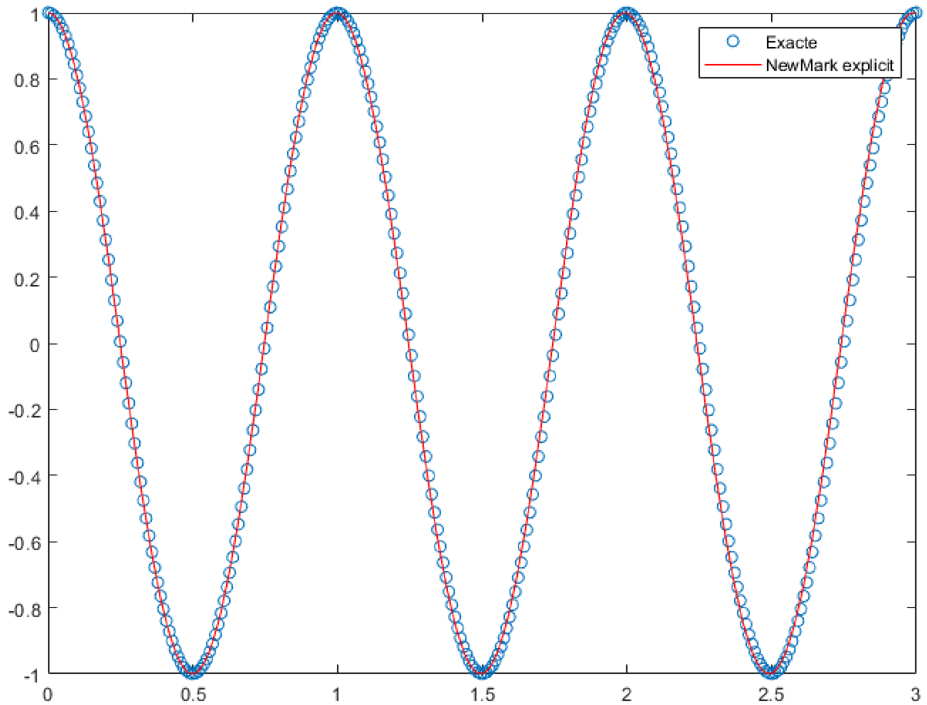
5.1.4

```
[V4,D4] = eig(A4);
D4
abs(D4)
% dt = 0.01
% D4 =
%       0.9980 + 0.0628i   0.0000 + 0.0000i
%       0.0000 + 0.0000i   0.9980 - 0.0628i
% abs(D4)=    1         0
%             0         1
% dt = 0.1
% D4 =
%     0.7866 + 0.6174i   0.0000 + 0.0000i
%     0.0000 + 0.0000i   0.7866 - 0.6174i
% abs(D4)=
%            1         0
%            0         1
% dt= 0.001
% D4 =
%      1.0000 + 0.0063i   0.0000 + 0.0000i
%      0.0000 + 0.0000i   1.0000 - 0.0063i
% abs(D4) =
%            1         0
%            0         1
% Remarque : les valeurs absolues sont toujours egaux à 1#alors c'est
```

```
% toujours stable


D4 =

   0.9980 + 0.0628i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.9980 - 0.0628i


ans =

     1     0
     0     1
```

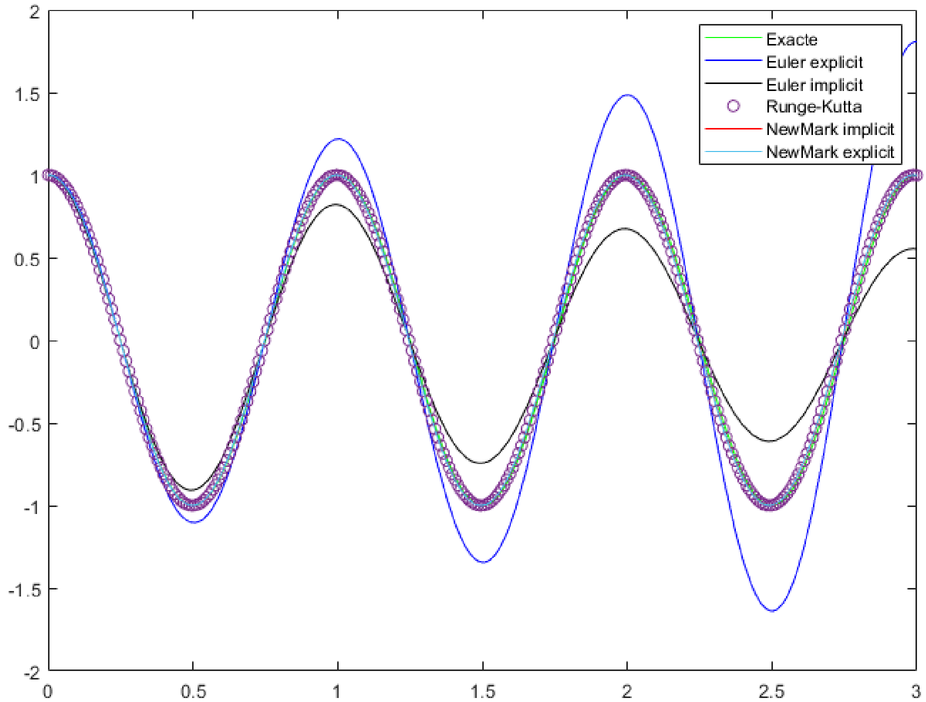
5.2.1

```
gamma2 = 0.5;
beta2 = 0;
% Avec matrice d'amplification
B2 = [1 + beta2*dt^2*w0c,0;gamma2*dt*w0c,1];
C2 = [1-(0.5-beta2)*dt^2*w0c,dt;-(1-gamma2)*dt*w0c,1];
A5 = inv(B2)*C2;
Q5b = [];
dQ5b = [];
Q5b(1) = q0;
dQ5b(1) = dq0;
Q5 = [q0;dq0];
n5 = 1;
E5 = [];
E5(1) = 1/2*(dQ5b(1)^2 + w0c * Q5b(1)^2);
for t = 0:dt:T0
    n5 = n5 + 1;
    Q5 = A5 * Q5;
    Q5b(n5) = Q5(1,1);
    dQ5b(n5) = Q5(2,1);
    E5(n5) = 1/2*(dQ5b(n5)^2 + w0c * Q5b(n5)^2);
end
t5 = linspace(0,T0,n5);
plot(t5,q,'o',t5,Q5b,'r');
legend('Exacte','NewMark explicit')
```



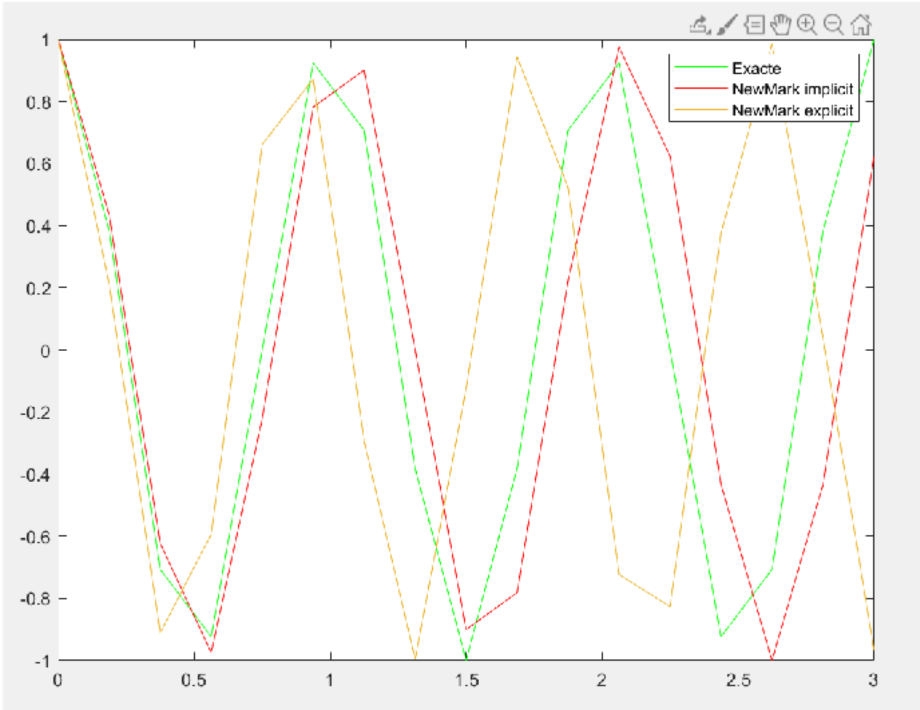
5.2.2

```
plot(t5,q,'g',t5,Q1b,'b',t5,Q2b,'k',t5,Q3b,'O',t5,Q4b,'r',t5,Q5b,'-');
legend('Exacte','Euler explicit','Euler implicit','Runge-
Kutta','NewMark implicit','NewMark explicit')
% Remarque : je ne vois pas bq differences entre Newmark implicit et
% explicit
```

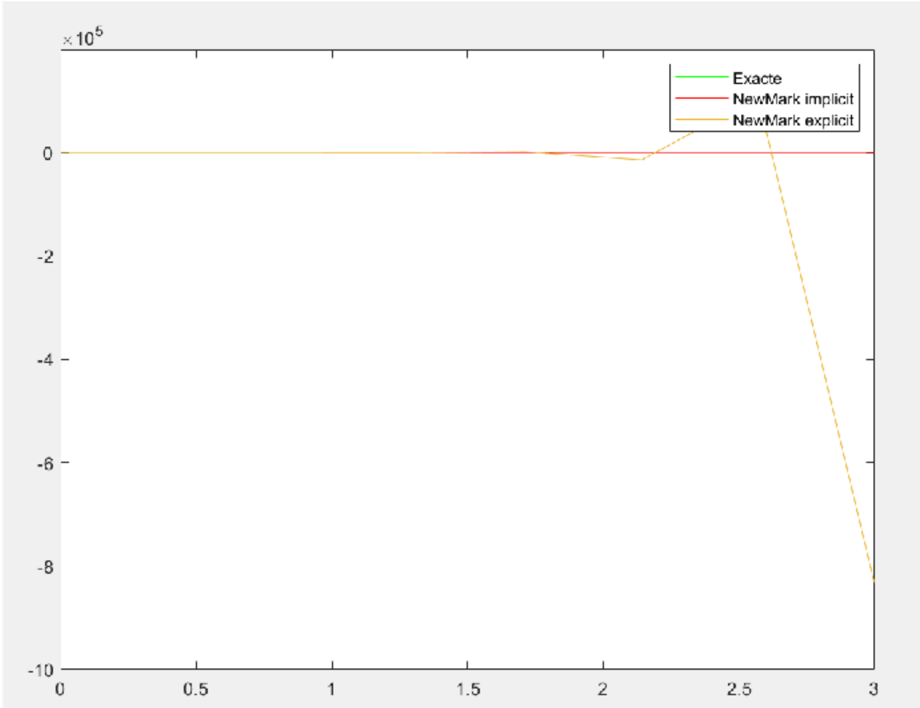


5.2.3

```
P3 = imread('dt=0.2.png');
imshow(P3);
```




```
P4 = imread('dt=0.5.jpg');
imshow(P4);
```



5.2.4

Published with MATLAB® R2019b