Etude d’un double pendule avec l’hypothèse des petits mouvements

Table of Contents

1.1 1
1.2 3
Q1.3 4
Q1.4 4
Q1.5 4
Q1.6 5
Q2.1 6
Q2.2 6
Q2.3 7
Q2.4 7
Q2.5 7
Q2.6 8

1.1

Puisque c'est un double pendule, on va calculer deux matrices d'amplifications

```
syms m;
syms a;
syms g;
syms F0;
syms w;
syms beta;
syms gamma;
syms dt;
syms n;
I = [1, 0; 0, 1];

% On a m * a * a * M1 * d2q + m * g * a * M2 * q = F0 * sin(w * t) *
 M3 avec
M1 = [2, 1; 1, 1];
M2 = [2, 0; 0, 1];
M3 = [a; a / sqrt(2)];
% q = [theta1; theta2] et d2q = [d2theta1; d2theta2]
% Alors, on peut trouver d2q = M4 * q + M5 * sin(w * t) avec
M4 = - inv(M1) * g / a * M2;
M5 = inv(M1) * F0 / m / a / a * M3;
% En utilisant les relation (2) et (3), on a
% M6 * qn1 = M7 * qn + M8 * dqn + M9 avec
M6 = I - dt * dt * beta * M4;
M7 = I + dt * dt * (0.5 - beta) * M4;
```

```
M8 = I * dt;
M9 = dt * dt * (0.5 - beta) * M5 * sin(w * n * dt) + dt * dt * beta *
 M5 * sin(w * (n + 1) * dt);
% Et M10 * qn1 + M11 * dqn1 = M12 * qn + M13 * dqn + M14 avec
M10 = - dt * gamma * M4;
M11 = I;
M12 = dt * (1 - gamma) * M4;
M13 = I;
M14 = dt * (1 - gamma) * M5 * sin(w * n * dt) + dt * gamma * M5 *
 sin(w * (n + 1) * dt);
% Soit U = [q; dq], alors on peut trouver M15 * Un1 = M16 * Un + M17
 avec
M15 = [M6, 0 * I; M10, M11];
M16 = [M7, M8; M12, M13];
M17 = [M9; M14];
% Alors, on a Un1 = A * Un + B avec
A = inv(M15) * M16;
B = inv(M15) * M17;
% Alors on peut recevoir le résultat par matlab:
% A =
% [                                                    (((2*g*(beta
 - 1/2)*dt^2)/a + 1)*(a^2 + 2*beta*g*a*dt^2))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g
 + 2*beta^2*dt^4*g^2) - (2*beta*dt^4*g^2*(beta - 1/2))/(a^2 +
 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2),
              (a*beta*dt^2*g*((2*g*(beta - 1/2)*dt^2)/a + 1))/
(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2) - (dt^2*g*(a^2 +
 2*beta*g*a*dt^2)*(beta - 1/2))/(a*(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g +
 2*beta^2*dt^4*g^2)),                    (dt*(a^2 + 2*beta*g*a*dt^2))/
(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2),
       (a*beta*dt^3*g)/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2)]
% [                                       (2*a*beta*dt^2*g*((2*g*(beta
 - 1/2)*dt^2)/a + 1))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2)
 - (2*dt^2*g*(a^2 + 2*beta*g*a*dt^2)*(beta - 1/2))/(a*(a^2 +
 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2)),
                        (((2*g*(beta - 1/2)*dt^2)/a + 1)*(a^2 +
 2*beta*g*a*dt^2))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2)
 - (2*beta*dt^4*g^2*(beta - 1/2))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g +
 2*beta^2*dt^4*g^2),                              (2*a*beta*dt^3*g)/
(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2),
      (dt*(a^2 + 2*beta*g*a*dt^2))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g +
 2*beta^2*dt^4*g^2)]
% [          (2*dt*g*(gamma - 1))/a - (2*(beta*gamma*dt^3*g^2
 + a*gamma*dt*g)*((2*g*(beta - 1/2)*dt^2)/a + 1))/(a^2 +
 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2) - (2*dt^3*g^2*gamma*(beta
 - 1/2))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2),
 (2*dt^2*g*(beta*gamma*dt^3*g^2 + a*gamma*dt*g)*(beta - 1/2))/
(a*(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2)) - (dt*g*(gamma
 - 1))/a + (a*dt*g*gamma*((2*g*(beta - 1/2)*dt^2)/a + 1))/(a^2 +
 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2), 1 - (2*dt*(beta*gamma*dt^3*g^2
 + a*gamma*dt*g))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2),
                           (a*dt^2*g*gamma)/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g +
 2*beta^2*dt^4*g^2)]
% [ (4*dt^2*g*(beta*gamma*dt^3*g^2 + a*gamma*dt*g)*(beta
 - 1/2))/(a*(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2))
```

```
 - (2*dt*g*(gamma - 1))/a + (2*a*dt*g*gamma*((2*g*(beta -
 1/2)*dt^2)/a + 1))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2),
      (2*dt*g*(gamma - 1))/a - (2*(beta*gamma*dt^3*g^2 +
 a*gamma*dt*g)*((2*g*(beta - 1/2)*dt^2)/a + 1))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g
 + 2*beta^2*dt^4*g^2) - (2*dt^3*g^2*gamma*(beta - 1/2))/(a^2 +
 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2),
 (2*a*dt^2*g*gamma)/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2), 1 -
 (2*dt*(beta*gamma*dt^3*g^2 + a*gamma*dt*g))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g +
 2*beta^2*dt^4*g^2)]
%
%
% B =
%

      ((a^2 + 2*beta*g*a*dt^2)*(beta*dt^2*sin(dt*w*(n + 1))*(F0/(a*m)
 - (2^(1/2)*F0)/(2*a*m)) - dt^2*sin(dt*n*w)*(F0/(a*m) - (2^(1/2)*F0)/
(2*a*m))*(beta - 1/2)))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2) -
 (a*beta*dt^2*g*(beta*dt^2*sin(dt*w*(n + 1))*(F0/(a*m) - (2^(1/2)*F0)/
(a*m)) - dt^2*sin(dt*n*w)*(F0/(a*m) - (2^(1/2)*F0)/(a*m))*(beta -
 1/2)))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2)
%

         (2*a*beta*dt^2*g*(beta*dt^2*sin(dt*w*(n + 1))*(F0/(a*m) -
 (2^(1/2)*F0)/(2*a*m)) - dt^2*sin(dt*n*w)*(F0/(a*m) - (2^(1/2)*F0)/
(2*a*m))*(beta - 1/2)))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2)
 - ((a^2 + 2*beta*g*a*dt^2)*(beta*dt^2*sin(dt*w*(n + 1))*(F0/(a*m)
 - (2^(1/2)*F0)/(a*m)) - dt^2*sin(dt*n*w)*(F0/(a*m) - (2^(1/2)*F0)/
(a*m))*(beta - 1/2)))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g + 2*beta^2*dt^4*g^2)
%  dt*gamma*sin(dt*w*(n + 1))*(F0/(a*m) - (2^(1/2)*F0)/(2*a*m))
 - (2*(beta*gamma*dt^3*g^2 + a*gamma*dt*g)*(beta*dt^2*sin(dt*w*(n
 + 1))*(F0/(a*m) - (2^(1/2)*F0)/(2*a*m)) - dt^2*sin(dt*n*w)*(F0/
(a*m) - (2^(1/2)*F0)/(2*a*m))*(beta - 1/2)))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g
 + 2*beta^2*dt^4*g^2) - dt*sin(dt*n*w)*(F0/(a*m) - (2^(1/2)*F0)/
(2*a*m))*(gamma - 1) - (a*dt*g*gamma*(beta*dt^2*sin(dt*w*(n +
 1))*(F0/(a*m) - (2^(1/2)*F0)/(a*m)) - dt^2*sin(dt*n*w)*(F0/(a*m)
 - (2^(1/2)*F0)/(a*m))*(beta - 1/2)))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g +
 2*beta^2*dt^4*g^2)
%    (2*(beta*gamma*dt^3*g^2 + a*gamma*dt*g)*(beta*dt^2*sin(dt*w*(n
 + 1))*(F0/(a*m) - (2^(1/2)*F0)/(a*m)) - dt^2*sin(dt*n*w)*(F0/
(a*m) - (2^(1/2)*F0)/(a*m))*(beta - 1/2)))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g
 + 2*beta^2*dt^4*g^2) - dt*gamma*sin(dt*w*(n + 1))*(F0/(a*m) -
 (2^(1/2)*F0)/(a*m)) + dt*sin(dt*n*w)*(F0/(a*m) - (2^(1/2)*F0)/
(a*m))*(gamma - 1) + (2*a*dt*g*gamma*(beta*dt^2*sin(dt*w*(n +
 1))*(F0/(a*m) - (2^(1/2)*F0)/(2*a*m)) - dt^2*sin(dt*n*w)*(F0/(a*m)
 - (2^(1/2)*F0)/(2*a*m))*(beta - 1/2)))/(a^2 + 4*a*beta*dt^2*g +
 2*beta^2*dt^4*g^2)
```

1.2

```
m = 2;
a = 0.5;
g = 9.81;
F0 = 20;
```

```
w = 2 * pi;
beta = 0;
gamma = 0.5;

e = [];
for dt = linspace(0, 1, 1001)
    e = [e, max(abs(eig(eval(A))))];
end

dt = linspace(0, 1, 1001);
subplot(1, 1, 1);
plot(dt, e);
title('Le module de valeur propre de différant pas');

% On trouve que quand le pas est inférieure à 0.024, tous les
 modules de valeur propre est presque égale à 1, et quand le pas est
 supérieure à 0.024, les modules de valeur propre supérieure à 1.
```

Q1.3

```
theta1_0 = 0;
theta2_0 = 0;
dtheta1_0 = - 1.31519275;
dtheta2_0 = - 1.85996342;

q0 = [theta1_0; theta2_0];
dq0 = [dtheta1_0; dtheta2_0];
d2q0 = eval(M4) * q0;
```

Q1.4

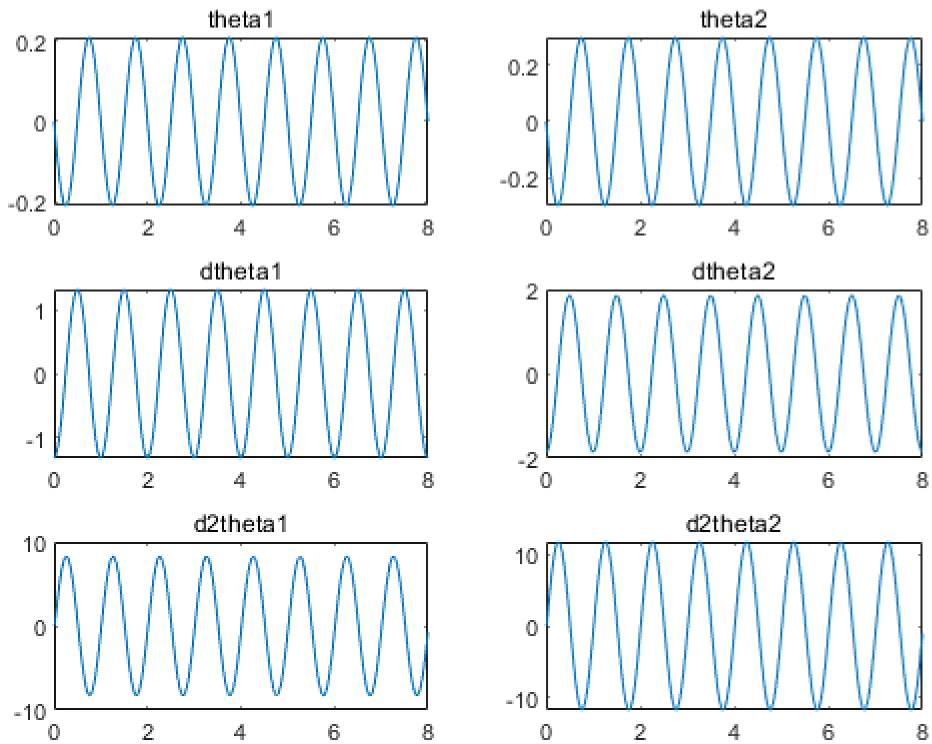
```
% U = [q; dq]
% Un1 = A * Un + B, d2q = M4 * q + M5 * sin(w * t).
% Ce sont les relations.
```

Q1.5

```
T0 = 8;
dt = 0.02;
U = [q0; dq0];
q = [q0];
dq = [dq0];
d2q = [d2q0];
for n = 0 : (T0 / dt - 1)
U = eval(A) * U + eval(B);
q = [q, U(1:2)];
dq = [dq, U(3:4)];
d2q = [d2q, eval(M4 * U(1:2) + M5 * sin(w * n * dt))];
end

t = (0 : (T0 / dt)) * dt;
```

```
subplot(3, 2, 1);
plot(t, q(1, :));
title('theta1');
subplot(3, 2, 3);
plot(t, dq(1, :));
title('dtheta1');
subplot(3, 2, 5);
plot(t, d2q(1, :));
title('d2theta1');
subplot(3, 2, 2);
plot(t, q(2, :));
title('theta2');
subplot(3, 2, 4);
plot(t, dq(2, :));
title('dtheta2');
subplot(3, 2, 6);
plot(t, d2q(2, :));
title('d2theta2');
```



Q1.6

```
q(:, 1 : 3); % ce sont les valeurs de q à 0s , dt , 2dt.
q(:, 0.5 / dt + 1); %c'est le valeur de q à 0.5s.
% Ce sont
% 0   -0.0263   -0.0522   -0.299e-3
% 0   -0.0372   -0.0738   -0.423e-3
```

```
dq(:, 1 : 3); % ce sont les valeurs de dq à 0s , dt , 2dt.
dq(:, 0.5 / dt + 1); %c'est le valeur de dq à 0.5s.
% Ce sont
% -1.32   -1.30   -1.27   1.31
% -1.86   -1.85   -1.80   1.86
d2q(:, 1 : 3); % ce sont les valeurs de d2q à 0s , dt , 2dt.
d2q(:, 0.5 / dt + 1); %c'est le valeur de d2q à 0.5s.
% Ce sont
% 0    0.302    1.33   0.737
% 0    0.428    1.89   1.04
```

Q2.1

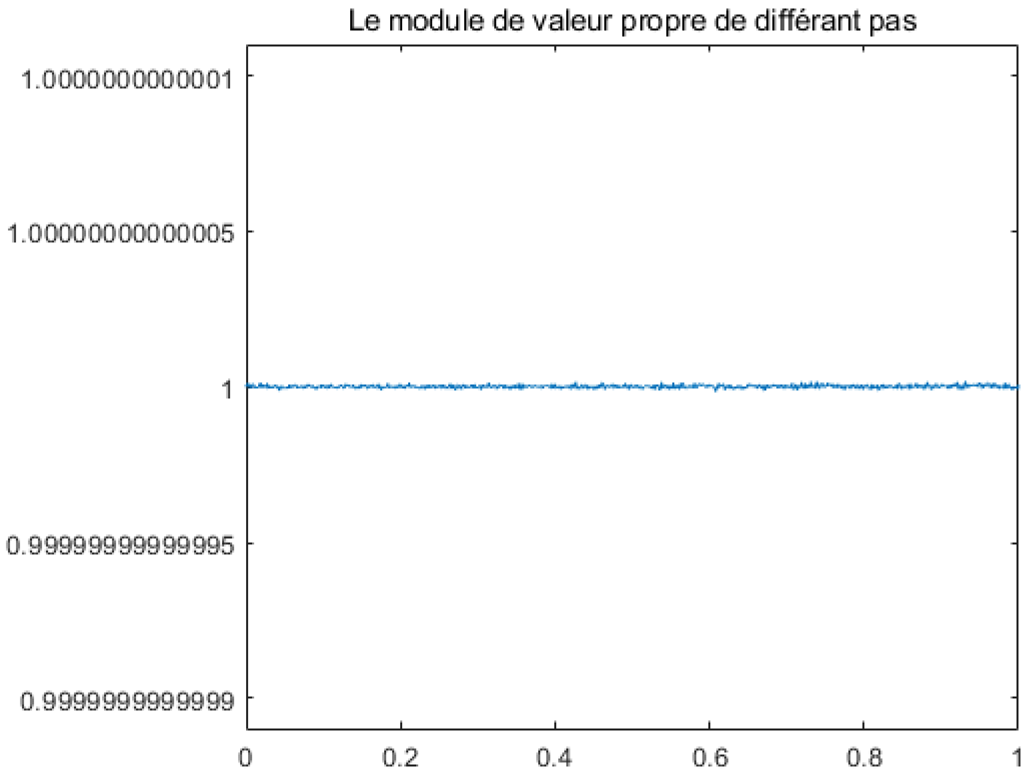
```
% En utilisant le résultat de Q1.1, c'est la même matrice.
% Puisqu'elle est trop grande, je ne remonte pas.
```

Q2.2

```
beta = 0.25;
e = [];
for dt = linspace(0, 1, 1001)
e = [e, max(abs(eig(eval(A))))];
end

dt = linspace(0, 1, 1001);
subplot(1, 1, 1);
plot(dt, e);
title('Le module de valeur propre de différant pas');

% Le module de valeur propre est toujours presque égale à 1.
```



Q2.3

```
% U = [q; dq]
% Un1 = A * Un + B, d2q = M4 * q + M5 * sin(w * t).
% Ce sont les mêmes relations que Q1.4, mais beta change.
```

Q2.4

```
% Un1 = A * Un + B
% Je ne comprend pas ce que Q2.3 et Q2.4 veulent.
% A mon avis, c'est la même chose.
```

Q2.5

```
T0 = 8;
dt = 0.02;
U = [q0; dq0];
q = [q0];
dq = [dq0];
d2q = [d2q0];
for n = 0 : (T0 / dt - 1)
U = eval(A) * U + eval(B);
q = [q, U(1:2)];
dq = [dq, U(3:4)];
```

```
d2q = [d2q, eval(M4 * U(1:2) + M5 * sin(w * n * dt))];
end

t = (0 : (T0 / dt)) * dt;
subplot(3, 2, 1);
plot(t, q(1, :));
title('theta1');
subplot(3, 2, 3);
plot(t, dq(1, :));
title('dtheta1');
subplot(3, 2, 5);
plot(t, d2q(1, :));
title('d2theta1');
subplot(3, 2, 2);
plot(t, q(2, :));
title('theta2');
subplot(3, 2, 4);
plot(t, dq(2, :));
title('dtheta2');
subplot(3, 2, 6);
plot(t, d2q(2, :));
title('d2theta2');
```

Q2.6

```
q(:, 1 : 3); % ce sont les valeurs de q à 0s , dt , 2dt.
q(:, 0.5 / dt + 1); %c'est le valeur de q à 0.5s.
% Ce sont
% 0   -0.0262   -0.0520   -0.0009
% 0   -0.0371   -0.0735   -0.0013
dq(:, 1 : 3); % ce sont les valeurs de dq à 0s , dt , 2dt.
dq(:, 0.5 / dt + 1); %c'est le valeur de dq à 0.5s.
% Ce sont
% -1.32   -1.30   -1.27   1.31
% -1.86   -1.85   -1.80   1.86
```

Published with MATLAB® R2019b