# Etude d’un double pendule avec l’hypothèse des petits mouvements

Romain SY1924123

D’abord on a l’équation du mouvement :

$$m\,a^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{vmatrix} + m\,g\,a \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{vmatrix} = F_0 \sin\omega t \begin{vmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

1.1 D’abord on sait que les valeurs des coefficients β = 0 γ = 0.5, on suppose que on a l’équation est comme le suivant, on suppose $q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$, et on prend [M] = $ma\text{^}2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, [K] = $mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et [F] = $F0\sin\,(wt) \begin{bmatrix} a \\ a/racine(2) \end{bmatrix}$ et on a l’équation au-dessous :

$[M]\ddot{q} + [K]q = [F]$

1) Alors on obtient la matrice d’amplification par MatLab, la programme est comme au-dessous :

```
T0 = 8;
m = 2;
a = 0.5;
g = 9.81;
omega = 2 * pi;
F0 = 20;

syms B C dt
% dt = 0.02;
M = m * a^2 * [2 1; 1 1];
K = m * g * a * [2 0; 0 1];

beta = 0;
gamma = 0.5;

B(1:2, 1:2) = eye(2) + beta * dt^2*inv(M)*K;
B(1:2, 3:4) = 0;
B(3:4, 1:2) = gamma * dt * inv(M) * K;
B(3:4, 3:4) = eye(2);

C(1:2, 1:2) = eye(2) - dt^2*(0.5-beta) * inv(M) * K;
C(1:2, 3:4) = dt * eye(2);
C(3:4, 1:2) = -dt * (1 - gamma) * inv(M) *K;
C(3:4, 3:4) = eye(2);

A = inv(B) * C
```

Et on obtient la matrice d’amplification est

```
A =

[                                                    1 - (981*dt^2)/50,                                                 (981*dt^2)/100,                 dt,                0]
[                                                      (981*dt^2)/50,                                                 1 - (981*dt^2)/50,                  0,               dt]
[ (981*dt*((981*dt^2)/50 - 1))/50 - (981*dt)/50 + (962361*dt^3)/5000, (981*dt)/100 - (981*dt*((981*dt^2)/50 - 1))/100 - (962361*dt^3)/5000, 1 - (981*dt^2)/50,   (981*dt^2)/100]
[ (981*dt)/50 - (981*dt*((981*dt^2)/50 - 1))/50 - (962361*dt^3)/2500,   (981*dt*((981*dt^2)/50 - 1))/50 - (981*dt)/50 + (962361*dt^3)/5000,     (981*dt^2)/50, 1 - (981*dt^2)/50]
```

2) Et puis on va déterminer le pas de temps critique par MatLab. D’abord on peut utiliser les fonctions eig et abs pour obtenir les valeurs propres :

Quand on utilise t = 0.13, on peut obtenir que toute les valeurs sont inferieur a 1, on peut obtenir le pas de temps critique est 0.13.

3) De l’information précédent, on prend $q_n = \begin{bmatrix} \theta_n \\ \varphi_n \end{bmatrix}$,alors on a l’équation suivante :

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ddot{q_0} + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q_0 = F_0 \sin wt \begin{vmatrix} a \\ a/\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$\ddot{q_0} = inv([M])[F] - inv([M])[K]q_0$$

Et on sait aussi que $q_0$ et $\dot{q_0}$ donc on a la relation entre ces trois valeurs.

4) D’après la question précédent et le schéma NEWMARK, on peut obtenir les relations :

$$\ddot{q}_n = \frac{g}{a}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_n + \frac{F_0 \sin wt_n}{ma} \left| \begin{matrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{matrix} \right.$$

$$q_{n+1} = q_n + dt\dot{q}_n + 0.5dt^2\ddot{q}_n$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \frac{g}{a}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_{n+1} + \frac{F_0 \sin wt_{n+1}}{ma} \left| \begin{matrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{matrix} \right.$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + 0.5dt\ddot{q}_n + 0.5dt\ddot{q}_{n+1}$$

5) et 6) Et puis je programme la solution en temps du problème et prend dt=0.02 pour obtenir les valeurs numériques, le programme est au-dessous :

```
q0 = [0; 0];
dq0 = [-1.31519275; -1.85996342];
ddq0 = inv(M) * F0 * sin(omega * 0) * [a; a/sqrt(2)]  - inv(M) * K * q0;

num = T0 / dt;
q = zeros(4, num + 1);
ddq = zeros(2, num + 1);

q(:, 1) = [q0; dq0];
ddq(:, 1) = ddq0;
i = 2;

for t = dt: dt: T0
    F1 = F0 * sin(omega * t) * [a; a/sqrt(2)];
    F2 = F0 * sin(omega * (t-dt)) * [a; a/sqrt(2)];
    q(:, i) = A * q(:, i - 1) + inv(B) * [beta * dt^2*inv(M)*F1 + dt^2*(0.5-beta)*F1; gamma * dt * inv(M) * F2 + dt * (1 - gamma) * F2];
    ddq(:, i) = inv(M)*F1 - inv(M) * K * q(1:2, i);
    i = i + 1;
end
```

On peut obtenir les valeurs quand t=0, dt, 2*dt, 0.5, ils sont au-dessous :

| | | | |
|---|---|---|---|
| q(0) | q(dt) | q(2*dt) | q(0.5) |
| ans = | ans = | ans = | ans = |
| 0 | -2.6053e-02 | -5.1741e-02 | 6.8248e-02 |
| 0 | -3.7022e-02 | -7.3697e-02 | 1.8208e-02 |
| dq(0) | dq(dt) | dq(2*dt) | dq(0.5) |
| ans = | ans = | ans = | ans = |
| -1.3152e+00 | -1.3122e+00 | -1.2836e+00 | 1.3982e+00 |
| -1.8600e+00 | -1.8557e+00 | -1.8235e+00 | 2.3080e+00 |
| ddq(0) | ddq(dt) | ddq(2*dt) | ddq(0.5) |
| ans = | ans = | ans = | ans = |
| 0 | 1.0301e+00 | 2.0412e+00 | -2.3208e+00 |
| 0 | 1.4687e+00 | 2.9218e+00 | 1.9636e+00 |

1.1 Et puis on utilise un schema de NEWMARK implicite, et on sait que maintemant β = 0.25 γ = 0.5, d’abord on va écrire la matrice d’amplification :

1) De même façon, d’abord on va calculer la matrice B et la matrice C pour obtenir la matrice d’amplification, la programme est comme au-dessous:

```
T0 = 8;
m = 2;
a = 0.5;
g = 9.81;
omega = 2 * pi;
F0 = 20;

syms B C dt
% dt = 0.02;
M = m * a^2 * [2 1; 1 1];
K = m * g * a * [2 0; 0 1];

beta = 0.25;
gamma = 0.5;

B(1:2, 1:2) = eye(2) + beta * dt^2*inv(M)*K;
B(1:2, 3:4) = 0;
B(3:4, 1:2) = gamma * dt * inv(M) * K;
B(3:4, 3:4) = eye(2);

C(1:2, 1:2) = eye(2) - dt^2*(0.5-beta) * inv(M) * K;
C(1:2, 3:4) = dt * eye(2);
C(3:4, 1:2) = -dt * (1 - gamma) * inv(M) *K;
C(3:4, 3:4) = eye(2);

A = vpa(inv(B) * C)
```

Et le résultat est au-dessous :

A =

[ (962361.0*dt^4)/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0) - (200.0*(9.81*dt^2 - 1.0)*(981.0*dt^2 + 100.0))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0), (981.0*dt^2*(981.0*dt^2 + 100.0))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0) - (98100.0*dt^2*(9.81*dt^2 - 1.0))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0), (200.0*dt*(981.0*dt^2 + 100.0))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0), (98100.0*dt^3)/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0)]

[ (1962.0*dt^2*(981.0*dt^2 + 100.0))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0) - (196200.0*dt^2*(9.81*dt^2 - 1.0))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0), (962361.0*dt^4)/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0) - (200.0*(9.81*dt^2 - 1.0)*(981.0*dt^2 + 100.0))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0), (196200.0*dt^3)/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0), (200.0*dt*(981.0*dt^2 + 100.0))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0)]

[ (1924722.0*dt^3)/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0) - 19.62*dt + (1962.0*(9.81*dt^2 - 1.0)*(981.0*dt^3 + 200.0*dt))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0), 9.81*dt - (9623.61*dt^2*(981.0*dt^3 + 200.0*dt))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0) - (196200.0*dt*(9.81*dt^2 - 1.0))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0), 1.0 - (1962.0*dt*(981.0*dt^3 + 200.0*dt))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0), (196200.0*dt^2)/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0)]

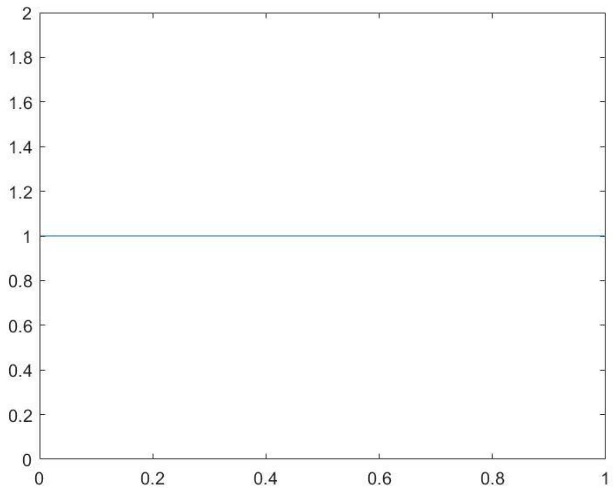
[ 19.62*dt - (19247.22*dt^2*(981.0*dt^3 + 200.0*dt))/(962361.0*dt^4 +

392400.0*dt^2 + 20000.0) - (392400.0*dt*(9.81*dt^2 - 1.0))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0),      (1924722.0*dt^3)/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0) - 19.62*dt + (1962.0*(9.81*dt^2 - 1.0)*(981.0*dt^3 + 200.0*dt))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0), (392400.0*dt^2)/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0), 1.0 - (1962.0*dt*(981.0*dt^3 + 200.0*dt))/(962361.0*dt^4 + 392400.0*dt^2 + 20000.0)]

2) Et on va allure le figure de l'evolution de la plus grande valeur propre de cette matrice :

```
max_vp = [];
i = 1;
[z, d] = eig(A);
dt2 = 0: 0.01:1;
for dt1 = dt2
    d1 = abs(subs(d, dt, dt1));
    max_vp(i) = max([d1(1,1), d1(2,2), d1(3,3), d1(4,4)]);
    i = i + 1;
end
plot(dt2, max_vp)
```

Le figure est au-dessous, on peut voir qu'il y a pas beaucoup de changement quand le pas de temps cimprises entre 0s et 1s et ils sont presque equal 1 :




3) C'est la meme que 1.3,
$\ddot{q_0} = inv([M])[F] - inv([M])[K]q_0$

4) Soit $q_n = \begin{bmatrix}\theta_n \\ \varphi_n\end{bmatrix}$, le schéma Newmark implicite s'écrire comme :

$$\ddot{q_n} = \frac{g}{a}\begin{bmatrix}-2 & 1 \\ 2 & -2\end{bmatrix} q_n + \frac{F_0 \sin wt_n}{ma}\begin{vmatrix}(2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1\end{vmatrix}$$

$$q_{n+1} = q_n + dt\dot{q_n} + 0.25dt^2\ddot{q_n} + 0.25dt^2\ddot{q_{n+1}}$$

$$\ddot{q_{n+1}} = \frac{g}{a}\begin{bmatrix}-2 & 1 \\ 2 & -2\end{bmatrix} q_{n+1} + \frac{F_0 \sin wt_{n+1}}{ma}\begin{vmatrix}(2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1\end{vmatrix}$$

$$q_{\dot{n+1}} = \dot{q}_n + 0.5dt\ddot{q}_n + 0.5dtq_{\ddot{n+1}}$$

5) et 6) De même, on a la programme comme au-dessous :

```
q0 = [0; 0];
dq0 = [-1.31519275; -1.85996342];
ddq0 = inv(M) * F0 * sin(omega * 0) * [a; a/sqrt(2)]  - inv(M) * K * q0;

num = T0 / dt;
q = zeros(4, num + 1);
ddq = zeros(2, num + 1);

q(:, 1) = [q0; dq0];
ddq(:, 1) = ddq0;
i = 2;

for t = dt: dt: T0
    F1 = F0 * sin(omega * t) * [a; a/sqrt(2)];
    F2 = F0 * sin(omega * (t-dt)) * [a; a/sqrt(2)];
    q(:, i) = A * q(:, i - 1) + inv(B) * [beta * dt^2*inv(M)*F1 + dt^2*(0.5-beta)*F1; gamma * dt * inv(M) * F2 + dt * (1 - gamma) * F2];
    ddq(:, i) = inv(M)*F1 - inv(M) * K * q(1:2, i);
    i = i + 1;
end
```

Et les résulats est au-dessous :

| | | | |
|---|---|---|---|
| q(0) | q(dt) | q(2*dt) | q(0.5) |
| ans = | ans = | ans = | ans = |
| 0<br>0 | -2.6075e-02<br>-3.6964e-02 | -5.1836e-02<br>-7.3568e-02 | 6.7938e-02<br>1.3633e-02 |
| dq(0) | dq(dt) | dq(2*dt) | dq(0.5) |
| ans = | ans = | ans = | ans = |
| -1.3152e+00<br>-1.8600e+00 | -1.3122e+00<br>-1.8557e+00 | -1.2835e+00<br>-1.8236e+00 | 1.4235e+00<br>2.2889e+00 |
| ddq(0) | ddq(dt) | ddq(2*dt) | ddq(0.5) |
| ans = | ans = | ans = | ans = |
| 0<br>0 | 1.0321e+00<br>1.4656e+00 | 2.0474e+00<br>2.9130e+00 | -2.3984e+00<br>2.1309e+00 |