Partie 2

1,1 （1） est $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$, son équation caractéristique est :

$$q^2 + \ \omega_0^2 q = 0$$

donc son racine caractéristique est $\pm w_0 i$ qui est irréel, donc sa solution générale est :

$$q = e^0(C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin w_0 t)$$

Valeurs initiales : t=0, $q_0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1$, donc $C_1 = 1$

$$\dot{q}_0 = C_2 \cos 0 - C_1 \sin 0 = 0, \text{donc } \ C_2 = 0$$

Donc, $q = \cos \omega_0 t$ est bien le résultat.

Sur Matlab, on voir bien le même résultat.

```
>> %Lagrange exacte
syms b q w
w=2*pi;
b='D2q=-(2*pi)^2*q';
 y=dsolve(b,'q(0)=1','Dq(0)=0')

y =

cos(2*pi*t)
```

Mais je ne sais pas comment utiliser To=3s quand je résous cette équation, c' est seulement un constant dans un point.

1.2 On calcule $E^* = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^{2)}$ sur Matlab

```
>> Y=diff(y)
 E=1/2*(Y^2+4*y^2)

Y =

-2*pi*sin(2*pi*t)


E =

2*pi^2*sin(2*pi*t)^2 + 2*cos(2*pi*t)^2
```

Je trouve que 2*pi^2*cos(2*pi*t)^2 + 2*pi^2sin(2*pi*t)^2=2*pi^2, parce que cos(t)^2+sin(t)^2=1, c' est-à-dire que le quantité E^* est conservatif.

2.1 D' après (5), on sait que $q_{j+1} = q_j + \delta t \dot{q}_j$ et $\dot{q_{j+1}} = \dot{q}_j + \delta t \ddot{q}_j$

Et pour (6), le premier est bien $q_{j+1} = q_j + \delta t \dot{q}_j$, mais pour le deuxième, il faut changer la forme par $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$, alors, $\dot{q_{j+1}} = \dot{q}_j + \delta t \ddot{q}_j = \dot{q}_j - \omega_0^2 q_j \delta t$, c' est (6).

2.2 J' utilise la méthode 1 :

```
%Euler explicit
syms yex Y YY y0 Y0 w T E yim yvr YYY
for j=1:10
    y(1)=y0
    Y(1)=Y0
    YY(1)=-w^2*y0
    y(j+1)=y(j)+T*Y(j)
    Y(j+1)=Y(j)+T*YY(j)
    YY(j+1)=-w^2*y(j+1)
```

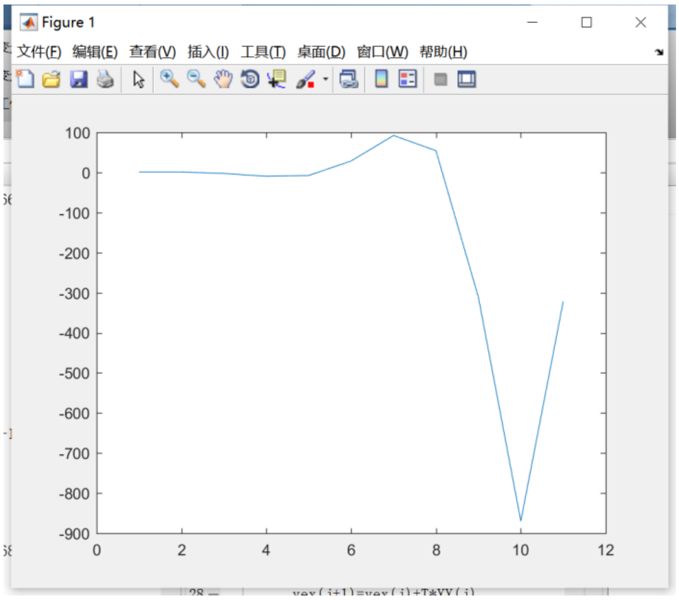
On voit que les derniers résultats sont trop longs.

```
y =

[ y0, y0 + T*Y0, y0 + T*Y0 + T*(- T*y0*w^2 + Y0), y0 + T*Y0 - T*(T*w^2*y0 - Y0 + T*w^2*(y0 + T*Y0)) + T*(- T*y0*w^2 + Y0), y0 + T*Y0 - T*(T*w^2*y0 - Y0 + T*w^2*(y0

Y =

[ Y0, - T*y0*w^2 + Y0, Y0 - T*w^2*y0 - T*w^2*(y0 + T*Y0), Y0 - T*w^2*y0 - T*w^2*(y0 + T*Y0) - T*w^2*(y0 + T*Y0 + T*(- T*y0*w^2 + Y0)), Y0 - T*w^2*y0 - T*w^2*(y0 +

YY =

[ -w^2*y0, -w^2*(y0 + T*Y0), -w^2*(y0 + T*Y0 + T*(- T*y0*w^2 + Y0)), -w^2*(y0 + T*Y0 - T*(T*w^2*y0 - Y0 + T*w^2*(y0 + T*Y0)) + T*(- T*y0*w^2 + Y0)), -w^2*(y0 + T*Y
```

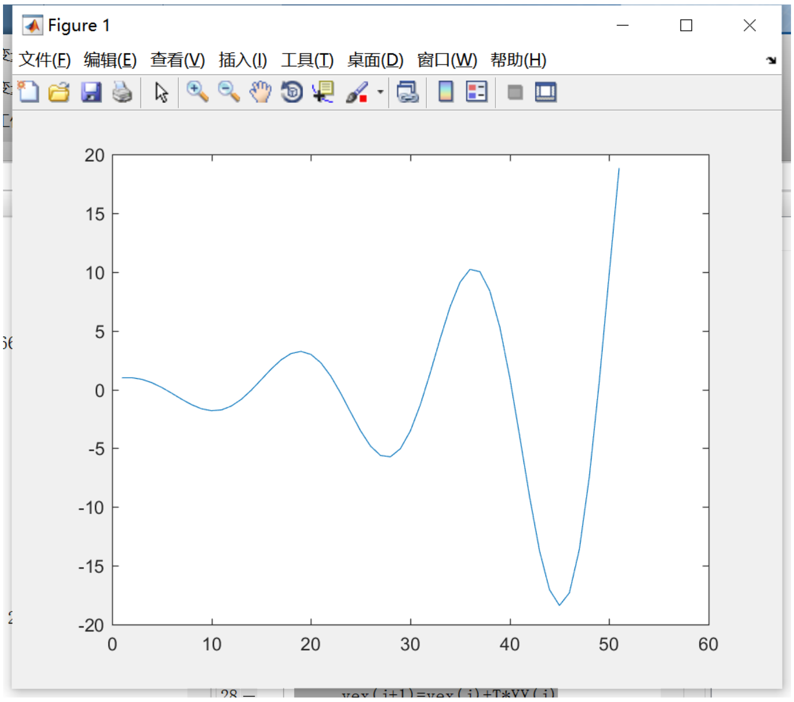
2.3 Ici je suppose que j=1 :10, c’ est-à-dire que je vais diviser To=3s en 10 parties, et T=0.3s

```
%En valeurs
 for j=1:10
     w=2*pi
     yex(1)=1
     YY(1)=0
     YYY(1)=-w^2*1
     T=0.3
     yex(j+1)=yex(j)+T*YY(j)
     YY(j+1)=YY(j)+T*YYY(j)
     YYY(j+1)=-w^2*yex(j+1)
 end
```

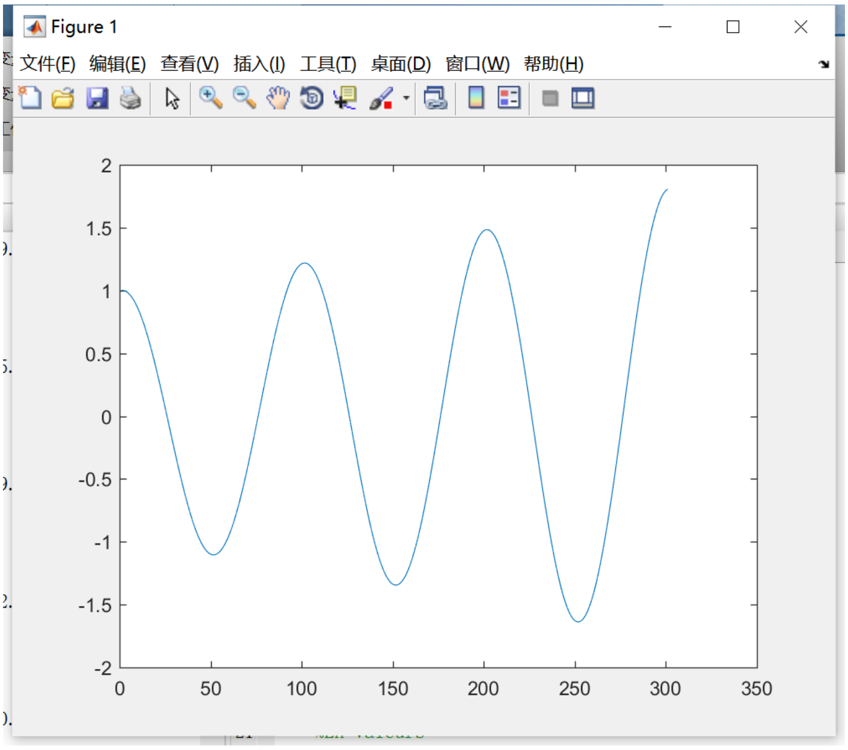
On trouve qu’ il est par hasard et il diverge au final.



Si je suppose que j=1 :50, T=0.06s, il oscille de plus en plus grand, et il diverge au final.



Si je suppose que j=1 :300, T=0.01s. On voit qu' il oscille de plus en plus grand, et il diverge plus lentement qu' avant.



2.4 On ajoute ci-dessous après le code.

```
E=1/2*(Y(j+1)^2+2^2*pi^2*y(j+1)^2)
```

Et on obtient ce tableau ci-dessous :

T	E explicite
0.3	7.56e+07
0.006	1.52e+04
0.03	648.07
0.01	64.37
0.003	28.15

Donc je trouve que E diminue rapidement, mais on ne peut pas voir sa tendance.

2.5 On trouve que ses valeurs propres sont deux complexes conjugués, son module est $\sqrt{1+(6.28T)^2} > 1$, parce que T>0, donc ce schéma est inconditionnellement divergent.

```
>> a=[1 T;-2^2*pi^2*T 1]
[x, y] =eig(a)

a =

[                                   1,  T]
[ -(2778046668940015*T)/70368744177664,  1]


x =

[ 70368744177664/(2778046668940015*T) + (70368744177664*((2778046668940015^(1/2)*T*1i)/838
[


y =

[ 1 - (2778046668940015^(1/2)*T*1i)/8388608,                                          0]
[                                         0, (2778046668940015^(1/2)*T*1i)/8388608 + 1]

>> vpa(y)

ans =

[ 1.0 - T*6.283185307179586277494736737083 8i,                                          0]
[                                          0, 1.0 + T*6.2831853071795862774947367370838i]
```

Code de Matlab

```
%Lagrange exacte
syms b q w
w=2*pi
b='D2q=-(2*pi)^2*q'
  y=dsolve(b,'q(0)=1','Dq(0)=0')
  Y=diff(y)
  E=1/2*(Y^2+2^2*pi^2*y^2)

  %Euler explicit
  syms yex Y YY y0 Y0 w T E yim yvr YYY
  for j=1:10
        yex(1)=y0
        Y(1)=Y0
        YY(1)=-w^2*y0
        yex(j+1)=yex(j)+T*Y(j)
        Y(j+1)=Y(j)+T*YY(j)
        YY(j+1)=-w^2*yex(j+1)
  end
E=1/2*(Y(j+1)^2+2^2*pi^2*yex(j+1)^2)

%En valeurs
  for j=1:300
        T=0.01
        yex(1)=1
        Y(1)=0
        w=2*pi
        YY(1)=-w^2*1
        yex(j+1)=yex(j)+T*Y(j)
        Y(j+1)=Y(j)+T*YY(j)
        YY(j+1)=-w^2*yex(j+1)
  end
  E=1/2*(YY(j+1)^2+2^2*pi^2*yex(j+1)^2)
vpa(E,4)
  a=[1 T;-2^2*pi^2*T 1]
[x,y] =eig(a)
```