Etude d’ un double pendule des petits mouvements

1.1 On sait l’ équation du mouvement :

$$m\,a^2\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{vmatrix}\ddot\theta_1\\ \ddot\theta_2\end{vmatrix} + m\,g\,a\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{vmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{vmatrix} = F_0\,\sin\omega t\,\begin{vmatrix}a\\ \frac{a}{\sqrt{2}}\end{vmatrix} \tag{1}$$

Il peut s’ écrire comme le suivant :

$$2\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2 + \frac{2g\theta_1}{a} = \frac{F_0\sin wt}{ma}$$

$$\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2 + \frac{g\theta_2}{a} = \frac{F_0\sin wt}{ma\sqrt{2}}$$

D’ où on peut résoudre $\ddot\theta_1$ et $\ddot\theta_2$:

$$\ddot\theta_1 = \frac{g\theta_2}{a} - \frac{2g\theta_1}{a} + \frac{(2-\sqrt{2})F_0\sin wt}{2ma}$$

$$\ddot\theta_2 = \frac{2g\theta_1}{a} - \frac{2g\theta_2}{a} + \frac{(\sqrt{2}-1)F_0\sin wt}{ma}$$

Pour β $=0$ γ $=0.5$, on suppose que $\theta_2 = \varphi$, la matrice d’ amplification est comme le suivant :

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -0.5dt & 0 & 0 & 0\\ 2g/a & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5dt\\ 0 & 0 & 1 & g/a & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\theta_{j+1}\\ \dot\theta_{j+1}\\ \ddot\theta_{j+1}\\ \varphi_{j+1}\\ \dot\varphi_{j+1}\\ \ddot\varphi_{j+1}\end{matrix} = \begin{bmatrix}1 & dt & 0.5dt^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0.5dt & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & dt & 0.5dt^2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5dt\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\theta_j\\ \dot\theta_j\\ \ddot\theta_j\\ \varphi_j\\ \dot\varphi_j\\ \ddot\varphi_j\end{matrix} + \frac{F_0\sin wt}{ma}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ \sqrt{2}/2\end{bmatrix}$$

En utilisant la solution de $\ddot\theta_1$ et $\ddot\theta_2$, on obtient :

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{gdt}{a} & 1 & -\frac{0.5gdt}{a} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\frac{gdt}{a} & 0 & \frac{gdt}{a} & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\theta_{j+1}\\ \dot\theta_{j+1}\\ \varphi_{j+1}\\ \dot\varphi_{j+1}\end{matrix} + \frac{F_0\,\mathrm{dtsin}\,wt}{ma}\begin{bmatrix}0\\ (2-\sqrt{2})/4\\ 0\\ (\sqrt{2}-1)/2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1-\frac{gdt^2}{a} & dt & 0.5dt^2+\frac{0.5gdt^2}{a} & 0\\ -\frac{gdt}{a} & 1 & \frac{0.5dtg}{a} & 0\\ \frac{gdt^2}{a} & 0 & 1-\frac{gdt^2}{a} & dt\\ \frac{gdt}{a} & 0 & -\frac{gdt}{a} & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\theta_j\\ \dot\theta_j\\ \varphi_j\\ \dot\varphi_j\end{matrix} + \frac{F_0\,\mathrm{dtsin}\,wt}{ma}\begin{bmatrix}\frac{dt(2-\sqrt{2})}{4}\\ (2-\sqrt{2})/4\\ \frac{dt(\sqrt{2}-1)}{2}\\ (\sqrt{2}-1)/2\end{bmatrix}$$

1.2 Sur Matlab, on détermine numériquement le pas de temps critique.

```
clear all; close all; clc; format short e;
dt=0.006; th= sym('th','real');fi= sym('fi','real');
m = 2;a = 0.5; g = 9.81; F0 = 20; w= 2*pi;
th(1) = 0; fi(1) = 0;
dth(1) = -1.31519275; dfi(1) = -1.85996342;
C=[1-g*dt^2/a, dt, 0.5*dt^2+0.5*g*dt^2/a, 0;-g*dt/a, 1, 0.5*dt*g/a, 0;g*dt^2/a, 0, 1-g*dt^2/a, dt;g*dt/a, 0, -g*dt/a, 1]
B=[1, 0, 0, 0;g*dt/a, 1, -0.5*g*dt/a, 0;0, 0, 1, 0;-g*dt/a, 0, g*dt/a, 1]
A=inv(B) * C
[z, d]=eig( (inv(B) ) * C)
re = real(d)
im = imag(d)
mo=abs(d)
```

On trouve que les modules des valeurs caractéristique de A sont égales à 1 quand dt⩽0.016, parce que les valeurs de tous les nombres de la matrice mo sont plus petits que 1 la premier fois quand je diminue la valeur de dt. Le résultat est comme le suivant :

```
mo =

   9.9995e-01            0            0            0
            0   9.9995e-01            0            0
            0            0   1.0000e+00            0
            0            0            0   1.0000e+00
```

Quand dt=0.017, les valeurs de quelques nombres de la matrice mo sont plus grands que 1. Donc le pas de temps critique est 0.016. Le résultat est comme le suivant :

```
mo =

   9.9995e-01            0            0            0
            0   9.9995e-01            0            0
            0            0   1.0001e+00            0
            0            0            0   1.0001e+00
```

1.3 Soit $q_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}$, (1) peut s' écrire comme :

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ddot{q_0} + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q_0 = F_0 \sin wt \begin{vmatrix} a \\ a/\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

On obtient la relation entre $\ddot{q_0}$ et q_0 :

$$\ddot{q_0} = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_0 + \frac{F_0 \sin wt}{ma} \begin{vmatrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{vmatrix}$$

Mais je ne peux pas obtenir la relation entre q_0 et $\dot{q_0}$, mais on sait les valeurs de q_0 et $\dot{q_0}$, parce que dans le sujet donne :

$\theta_1(0) = 0\,\mathrm{rad} \quad \theta_2(0) = 0\,\mathrm{rad} \quad \dot{\theta}_1(0) = -1.31519275\,\mathrm{rad.s^{-1}} \quad \dot{\theta}_2(0) = -1.85996342\,\mathrm{rad.s^{-1}}$

1.4 Soit $q_n = \begin{bmatrix} \theta_n \\ \varphi_n \end{bmatrix}$, le schéma Newmark explicite s' écrire comme :

$$\ddot{q_n} = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_n + \frac{F_0 \sin wt_n}{ma} \begin{vmatrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{vmatrix}$$

$$q_{n+1} = q_n + dt\dot{q_n} + 0.5dt^2\ddot{q_n}$$

$$\ddot{q_{n+1}} = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_{n+1} + \frac{F_0 \sin wt_{n+1}}{ma} \begin{vmatrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{vmatrix}$$

$$\dot{q_{n+1}} = \dot{q_n} + 0.5dt\ddot{q_n} + 0.5dt\ddot{q_{n+1}}$$

1.5 Le programme de Matlab est comme le suivant :

```
dt1 = 0.02;
t1 = (0:dt1:5)';
np1 = size(t1,1);
syms th fi dth dfi;
%th = zeros(np1,1);fi = zeros(np1,1);
%dth = zeros(np1,1);dfi = zeros(np1,1);
m = 2;a = 0.5; g = 9.81; F0 = 20; w= 2*pi;
th(1) = 0; fi(1) = 0;t(1)=0
dth(1) = -1.31519275; dfi(1) = -1.85996342;
ddth(1) = g*fi(1)/a-2*g*th(1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(1))/(2*m*a)
ddfi(1) = 2*g*th(1)/a-2*g*fi(1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(1))/(m*a)
for inc = 2 : np1
t(inc)=t(inc-1)+dt1
ddth(inc-1) = g*fi(inc-1)/a-2*g*th(inc-1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(inc-1))/(2*m*a)
ddfi(inc-1) = 2*g*th(inc-1)/a-2*g*fi(inc-1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(inc-1))/(m*a)
th(inc) = th(inc-1) + dt1 * dth(inc-1)+ dt1*dt1*0.5*ddth(inc-1)
fi(inc) = fi(inc-1) + dt1 * dfi(inc-1)+ dt1*dt1*0.5*ddfi(inc-1)
ddth(inc) = g*fi(inc)/a-2*g*th(inc)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(inc))/(2*m*a)
ddfi(inc) = 2*g*th(inc)/a-2*g*fi(inc)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(inc))/(m*a)
dth(inc) = dth(inc-1) +0.5*dt1*ddth(inc)+0.5*dt1*dth(inc-1)
dfi(inc) = dfi(inc-1) +0.5*dt1*ddfi(inc)+0.5*dt1*dfii(inc-1)
th=vpa(th,3)
fi=vpa(fi,3)
dth=vpa(dth,3)
dfi=vpa(dfi,3)
ddth=vpa(ddth,3)
ddfi=vpa(ddfi,3)
end
```

1.6 Quand t=0s, on obtient le résultat directement par établir t(1)=0 et puis exécuter :

```
m = 2;a = 0.5; g = 9.81; F0 = 20; w= 2*pi;
th(1) = 0; fi(1) = 0;t(1)=0
dth(1) = -1.31519275; dfi(1) = -1.85996342;
ddth(1) = g*fi(1)/a-2*g*th(1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(1))/(2*m*a)
ddfi(1) = 2*g*th(1)/a-2*g*fi(1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(1))/(m*a)

t =

     0


ddth =

     0


ddfi =

     0
```

Pour t=dt et 2dt, j' établis que la circulation finit à 0.04s :

```
t1 = (0:dt1:0.04)';
np1 = size(t1,1);
syms th fi dth dfi;
```

Le résultat est le suivant, dans [···], les premiers nombres sont les valeurs de t=0s, les deuxièmes sont celles de t=0.02s, et les troisièmes sont celles de t=0.04s.

```
th =

[ 0, -0.0263, -0.0525

fi =

[ 0, -0.0372, -0.0742

dth =

[ -1.32, -1.32, -1.31

dfi =

[ -1.86, -1.86, -1.85

ddth =

[ 0, 1.04, 2.06]

ddfi =

[ 0, 1.47, 2.91]
```

Pour t=0.5s, j' établis que la circulation finit à 0.5s, le résultat est le suivant :

```
>> vpa(th(26),3)

ans =

-0.325

>> vpa(fi(26),3)

ans =

-0.46

>> vpa(dth(26),3)

ans =

0.127

>> vpa(dfi(26),3)

ans =

0.18

>> vpa(ddth(26),3)

ans =

3.74

>> vpa(ddfi(26),3)

ans =

5.29
```

2.1 Pour β = 0.25, γ = 0.5, la matrice d’ amplification est comme le suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.25dt^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5dt & 0 & 0 & 0 \\ 2g/a & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.25dt^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5dt \\ 0 & 0 & 1 & g/a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{j+1} \\ \dot{\theta}_{j+1} \\ \ddot{\theta}_{j+1} \\ \varphi_{j+1} \\ \dot{\varphi}_{j+1} \\ \ddot{\varphi}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0.25dt^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5dt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & dt & 0.25dt^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5dt \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ \ddot{\theta}_j \\ \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \\ \ddot{\varphi}_j \end{bmatrix} + \frac{F_0 \sin wt}{ma} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

En utilisant la solution de $\ddot{\theta}_1$ et $\ddot{\theta}_2$, on obtient :

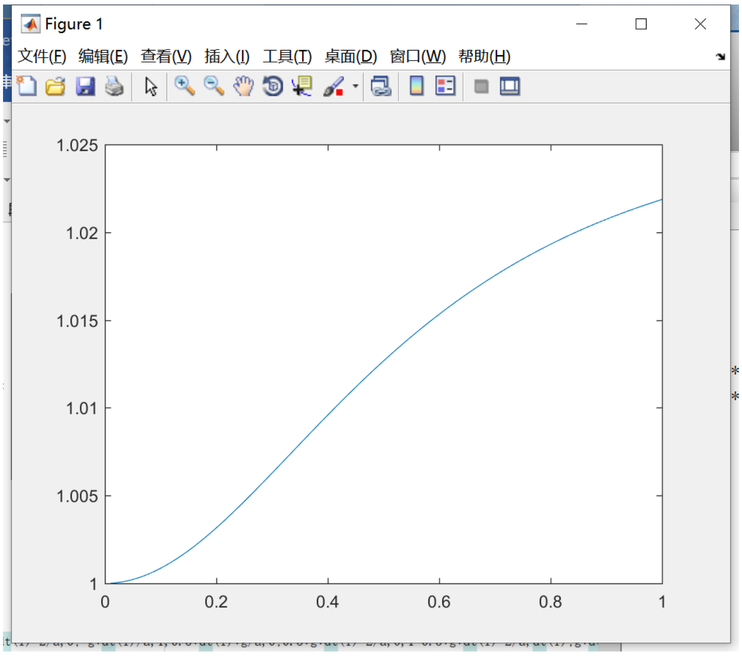
$$\begin{bmatrix} 1+0.5dt^2g/a & 0 & -0.25dt^2g/a & 0 \\ \frac{gdt}{a} & 1 & -\frac{0.5gdt}{a} & 0 \\ -0.5dt^2g/a & 0 & 1+0.5dt^2g/a & 0 \\ -\frac{gdt}{a} & 0 & \frac{gdt}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{j+1} \\ \dot{\theta}_{j+1} \\ \varphi_{j+1} \\ \dot{\varphi}_{j+1} \end{bmatrix} + \frac{F_0 dt \sin wt}{ma} \begin{bmatrix} (\sqrt{2}-2)dt/8 \\ (\sqrt{2}-2)/4 \\ (1-\sqrt{2})dt/4 \\ (\sqrt{2}-2)/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\frac{0.5gdt^2}{a} & dt & 0.25dt^2+\frac{0.25gdt^2}{a} & 0 \\ -\frac{gdt}{a} & 1 & \frac{0.5dtg}{a} & 0 \\ \frac{0.5gdt^2}{a} & 0 & 1-\frac{0.5gdt^2}{a} & dt \\ \frac{gdt}{a} & 0 & -\frac{gdt}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \end{bmatrix} + \frac{F_0 \sin wt}{ma} \begin{bmatrix} \frac{dt^2(2-\sqrt{2})}{8} \\ (2-\sqrt{2})/4 \\ \frac{dt^2(\sqrt{2}-1)}{8} \\ (\sqrt{2}-1)/4 \end{bmatrix}$$

2.2 Pour dessiner un allure, je programme comme le suivant :

```
syms dt A B C z d re im mo
m = 2;a = 0.5; g = 9.81; F0 = 20; w= 2*pi;
dt(1)=0.01
for i=2:100
dt(i)=dt(i-1)+0.01
C=vpa([1-0.5*g*dt(i)^2/a, dt(i), 0.25*dt(i)^2+0.25*g*dt(i)^2/a, 0;-g*dt(i)/a, 1, 0.5*dt(i)*g/a, 0;0.5*g*dt(i)^2/a, 0, 1-0.5*g*dt(i)^2/a, dt(i);g*dt(i)/a, 0, -g*dt(i)/a, 1]
B=vpa([1+0.5*dt(i)^2*g/a, 0, -0.25*dt(i)^2*g/a, 0;g*dt(i)/a, 1, -0.5*g*dt(i)/a, 0;-0.5*dt(i)^2*g/a, 0, 1+0.5*dt(i)^2*g/a, 0;-g*dt(i)/a, 0, g*dt(i)/a, 1])
[z,d]=eig( (inv(B) ) * C)
mo=abs(d)
ma(i)=max(max(mo))
end
plot(dt,ma)
```

L’ allure est le suivant :



Donc on conclure que pour toutes les pas de temps entre 0 et 1s, la plus grande valeur propre de cette matrice est plus grande que 1, et elle augmente quand le pas de temps augmente.

2.3 Comme la question 1.3, soit $q_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}$, (1) peut s’ écrire comme :

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ddot{q}_0 + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q_0 = F_0 \sin wt \begin{vmatrix} a \\ a/\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

On obtient la relation entre $\ddot{q}_0$ et q_0 :

$$\ddot{q}_0 = \frac{g}{a}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_0 + \frac{F_0 \sin wt}{ma} \left| \begin{matrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{matrix} \right.$$

Mais je ne peux pas obtenir la relation entre q_0 et $\dot{q}_0$, mais on sait les valeurs de q_0 et $\dot{q}_0$, parce que dans le sujet donne :

$\theta_1(0) = 0\,\text{rad} \quad \theta_2(0) = 0\,\text{rad} \quad \dot{\theta}_1(0) = -1.31519275\,\text{rad.s}^{-1} \quad \dot{\theta}_2(0) = -1.85996342\,\text{rad.s}^{-1}$

2.4 Soit $q_n = \begin{bmatrix} \theta_n \\ \varphi_n \end{bmatrix}$, le schéma Newmark implicite s' écrire comme :

$$\ddot{q_n} = \frac{g}{a}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_n + \frac{F_0 \sin wt_n}{ma} \left| \begin{matrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{matrix} \right.$$

$$q_{n+1} = q_n + dt\dot{q_n} + 0.25dt^2\ddot{q_n} + 0.25dt^2\ddot{q}_{n+1}$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \frac{g}{a}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_{n+1} + \frac{F_0 \sin wt_{n+1}}{ma} \left| \begin{matrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{matrix} \right.$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q_n} + 0.5dt\ddot{q_n} + 0.5dt\ddot{q}_{n+1}$$

2.5 J' utilise Matlab pour obtenir la relation entre les vecteurs d' état du système aux instants t_n et t_{n+1}

```
syms thinc fiinc dthinc dfiinc ddthinc ddfiinc thin fiin dthin dfiin ddthin ddfiin tinc;
[thinc,fiinc]=solve('thinc = thin + dtl * dthin+ dtl*dtl*0.25*ddthin+dtl*dtl*0.25*( g*fiinc/a-2*g*thinc/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*tinc)/(2*m*a))','fiinc =
```

Après, je programme ce résultat dans le code comme le suivant :

```
dt1 = 0.02;t1 = (0:dt1:1)';
np1 = size(t1,1);
m = 2;a = 0.5; g = 9.81; F0 = 20; w= 2*pi;
syms th fi dth dfi;
th(1) = 0; fi(1) = 0;t(1)=0
dth(1) = -1.31519275; dfi(1) = -1.85996342;
ddth(1) = g*fi(1)/a-2*g*th(1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(1))/(2*m*a)
ddfi(1) = 2*g*th(1)/a-2*g*fi(1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(1))/(m*a)
for inc = 2 : np1
t(inc)=t(inc-1)+dt1
ddth(inc-1) = g*fi(inc-1)/a-2*g*th(inc-1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(inc-1))/(2*m*a)
ddfi(inc-1) = 2*g*th(inc-1)/a-2*g*fi(inc-1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(inc-1))/(m*a)
th(inc)=(2.0e-33*(4.0e33*a^2*m*th(inc-1) + 4.0e33*a^2*dt1*dth(inc-1)*m + 29289321881345247559915563789515 5.0*F0*a*dt1^2*sin(t(inc)*w) + 250
fi(inc)=(1.0e-33*(8.0e33*a^2*fi(inc-1)*m + 8.0e33*a^2*dfi(inc-1)*dt1*m + 828427124746190097603377448419400.0*F0*a*dt1^2*sin(t(inc)*w) + 707
%th(inc) = th(inc-1) + dt1 * dth(inc-1)+ dt1*dt1*0.25*ddth(inc-1)+dt1*dt1*0.25*ddth(inc)
%fi(inc) = fi(inc-1) + dt1 * dfi(inc-1)+ dt1*dt1*0.25*ddfi(inc-1)+dt1*dt1*0.25*ddfi(inc)
ddth(inc) = g*fi(inc)/a-2*g*th(inc)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(inc))/(2*m*a)
ddfi(inc) = 2*g*th(inc)/a-2*g*fi(inc)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(inc))/(m*a)
dth(inc) = dth(inc-1) +0.5*dt1*ddth(inc)+0.5*dt1*dth(inc-1)
dfi(inc) = dfi(inc-1) +0.5*dt1*ddfi(inc)+0.5*dt1*dfi(inc-1)
th=vpa(th,3)
fi=vpa(fi,3)
dth=vpa(dth,3)
dfi=vpa(dfi,3)
ddth=vpa(ddth,3)
ddfi=vpa(ddfi,3)
end
```

2.6 Comme la question 1.6, quand t=0s, on obtient le résultat directement par établir t(1)=0 et puis exécuter :

```
m = 2;a = 0.5; g = 9.81; F0 = 20; w= 2*pi;
th(1) = 0; fi(1) = 0;t(1)=0
dth(1) = -1.31519275; dfi(1) = -1.85996342;
ddth(1) = g*fi(1)/a-2*g*th(1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(1))/(2*m*a)
ddfi(1) = 2*g*th(1)/a-2*g*fi(1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(1))/(m*a)

t =

     0


ddth =

     0


ddfi =

     0
```

Pour t=dt et 2dt, j' établis que la circulation finit à 0.04s. Le résultat est le suivant, dans [···], les premiers nombres sont les valeurs de t=0s, les deuxièmes sont celles de t=0.02s, et les troisièmes sont celles de t=0.04s.

```
th =

[ 0, -0.0262, -0.0523]


fi =

[ 0, -0.0371, -0.0739]


dth =

[ -1.32, -1.32, -1.31]


dfi =

[ -1.86, -1.86, -1.85]
```

Pour t=0.5s, j' établis que la circulation finit à 0.5s, le résultat est le suivant :

```
>> vpa(th(26),3)

ans =

-0.325

>> vpa(fi(26),3)

ans =

-0.46

>> vpa(dth(26),3)

ans =

0.126

>> vpa(dfi(26),3)

ans =

0.178
```