

Oscillateur non linéaire à un degré de liberté

1.1 Les relations sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\ddot{q}_j &= -\omega_0^2 q_j (1 + a q_j^2) \\ q_{j+1} &= q_j + dt \dot{q}_j + 0.5 dt^2 \ddot{q}_j \\ \ddot{q}_{j+1} &= -\omega_0^2 q_{j+1} (1 + a q_{j+1}^2) \\ q_{j+1} &= \dot{q}_j + 0.5 dt \ddot{q}_j + 0.5 dt \ddot{q}_{j+1}\end{aligned}$$

1.2 Le programme de Matlab est le suivant :

```
dt1 = 0.02;
t1 = (0:dt1:6)';
npl = size(t1,1);
syms q dq t;
a = 0.1;w0= 2*pi;
q(1) = 2;
dq(1) = 0;
ddq(1) = -w0^2*q(1)*(1+a*q(1)^2)
for inc = 2 : npl
    ddq(inc-1) = -w0^2*q(inc-1)*(1+a*q(inc-1)^2)
    q(inc) = q(inc-1) + dt1 * dq(inc-1) + dt1*dt1*0.5*ddq(inc-1)
    ddq(inc) = -w0^2*q(inc)*(1+a*q(inc)^2)
    dq(inc) = dq(inc-1) + 0.5*dt1*ddq(inc)+0.5*dt1*dq(inc-1)
    q=vpa(q,6)
    dq=vpa(dq,6)
    ddq=vpa(ddq,6)
end
```

1.3 Quand $t=0s$, on obtient le résultat directement par le sujet : $q(0)=2$

Pour $t=dt$ et $2dt$, j' établis que la circulation finit à $0.04s$:

```
dt1 = 0.02;
t1 = (0:dt1:0.04)';
```

Le résultat est comme le suivant, dans $[\dots]$, les premiers nombres sont les valeurs de $t=0s$, les deuxièmes sont celles de $t=0.02s$, et les troisièmes sont celles de $t=0.04s$.

```
q =
[ 2.0, 1.97789, 1.93444]
```

Pour $t=T0$, j' établis que la circulation finit à $6s$, le résultat est comme le suivant :

```
>> vpa(q(301), 6)

ans =

0.486062
```

2.1 On cherche à minimiser l' error entre les valeurs estimées et celles exactes.

2.2 L' expression analytique de la correction est le suivant :

$$\begin{aligned}\Delta q_{j+1}^{\ddot{}} &= -\frac{f(q_{j+1}^{\ddot{}} + q_{j+1}^* + q_{j+1}^*)}{\frac{\partial f}{\partial q_{j+1}^*} 0.25 dt^2 + \frac{\partial f}{\partial q_{j+1}^{\ddot{}}}} = -\frac{q_{j+1}^{\ddot{}} + \omega_0^2 q_{j+1}^* (1 + a q_{j+1}^{*2})}{0.25 dt^2 \omega_0^2 (1 + 3 a q_{j+1}^{*2}) + 1} \\ \Delta q_{j+1} &= 0.25 dt^2 \Delta q_{j+1}^{\ddot{}} \\ \Delta \dot{q}_{j+1} &= 0.5 dt \Delta q_{j+1}^{\ddot{}}\end{aligned}$$

2.3 Le programme est le suivant :

```

dt1 = 0.02;
t1 = (0:dt1:6)';
np1 = size(t1,1);
syms q0 dq0 t q1 dq1;
a = 0.1;w0= 2*pi;
q0(1) = 2;
dq0(1) = 0;
ddq0(1) = vpa(-w0^2*q0(1)*(1+a*q0(1)^2))
for inc = 2 : np1
    ddq0(inc)=0;
    dq0(inc)=dq0(inc-1)+dt1*0.5*ddq0(inc-1);
    q0(inc)=q0(inc-1)+dt1*dq0(inc-1)+dt1^2*0.25*ddq0(inc-1);
while abs(ddq0(inc)+w0^2*q0(inc)*(1+a*q0(inc)^2))>0.1
    ddq1(inc)=(-ddq0(inc)-w0^2*q0(inc)*(1+a*q0(inc)^2))/(0.25*dt1^2*w0^2*(1+3*a*q0(inc)^2)+1)
    q1(inc)=0.25*dt1^2*ddq1(inc)
    dq1(inc)=0.5*dt1*ddq1(inc)
    q0(inc)=q0(inc)+q1(inc)
    dq0(inc)=dq0(inc)+dq1(inc)
    ddq0(inc)=ddq0(inc)+ddq1(inc)
end
q0=vpa(q0,5)
dq0=vpa(dq0,5)
ddq0=vpa(ddq0,5)
E(inc)=-w0^2*q0(inc)^2*(1+a*q0(inc)^2)+dq0(inc)^2/2
end

```

2.4 Quand $t=0s$, on obtient le résultat directement par lire le sujet, $q_0=2$.

Pour $t=dt$ et $2dt$, j' établis que la circulation finit à $0.04s$. Le résultat est le suivant, dans $[\dots]$, les premiers nombres sont les valeurs de $t=0s$, les deuxièmes sont celles de $t=0.02s$, et les troisièmes sont celles de $t=0.04s$.

```

q0 =
[ 2.0, 1.9781, 1.9131]

```

Pour $t=0.5s$, j' établis que la circulation finit à $0.5s$, le résultat est le suivant :

```

>> vpa(q0(301),5)

ans =

0.84924

```

3.1 Energie cinétique : $E_c = \frac{m\dot{q}^2}{2}$

Energie potentielle : $E_p = Fq = kq^2(1 + aq^2)$

Energie mécanique : $E = E_c + E_p = kq^2(1 + aq^2) + \frac{m\dot{q}^2}{2}$

Pour calculer, je définie E^* qui est proportionnel à l' énergie mécanique E,

$$E^* = \omega_0^2 q^2 (1 + a q^2) + \frac{\dot{q}^2}{2}$$

3.2 Le programme de NEWMARK implicite est le suivant :

$$E(inc) = w_0^2 q(inc)^2 (1 + a q(inc)^2) + dq(inc)^2 / 2$$

Le programme de NEWMARK explicite est le suivant :

$$E(inc) = w_0^2 q(inc)^2 (1 + a q(inc)^2) + dq(inc)^2 / 2$$

Quand $t=0.02s$, le résultat de NEWMARK implicite est le suivant :

$$E =$$

$$217.32$$

Le résultat de NEWMARK explicite est le suivant :

$$E =$$

$$215.45$$

On trouve qu'ils ont presque la même valeur avec environ 1% différence. C'est-à-dire au premier pas, il commence à apparaître les petites différences sur l'énergie entre les deux types de schémas.