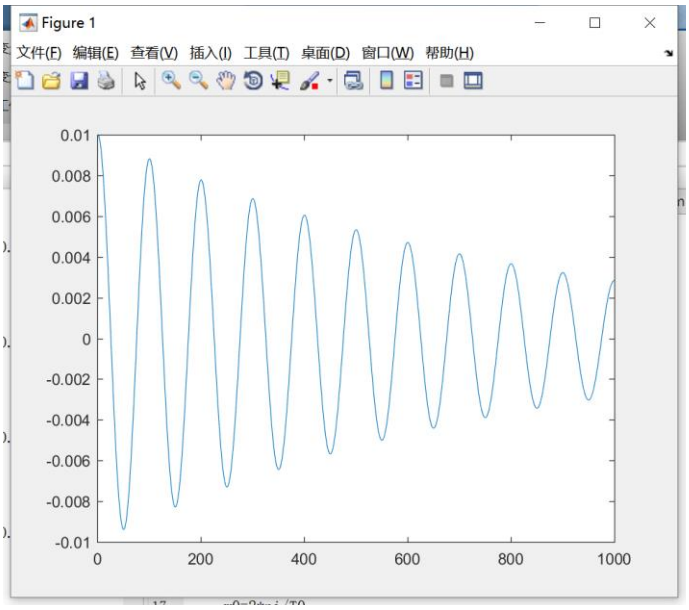
Etude d’ un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté

0, La solution exacte

```
ip=0.02
T0=1
w0=2*pi/T0
x0=0.01
W=w0*(1-ip^2)^0.5
t=linspace(0,10,1000)
x1=exp(-0.02*2*pi*t)
x2=x0*cos(W*t)+ip*2*pi*x0*sin(W*t)/W
x=x1.*x2
plot(x)
```

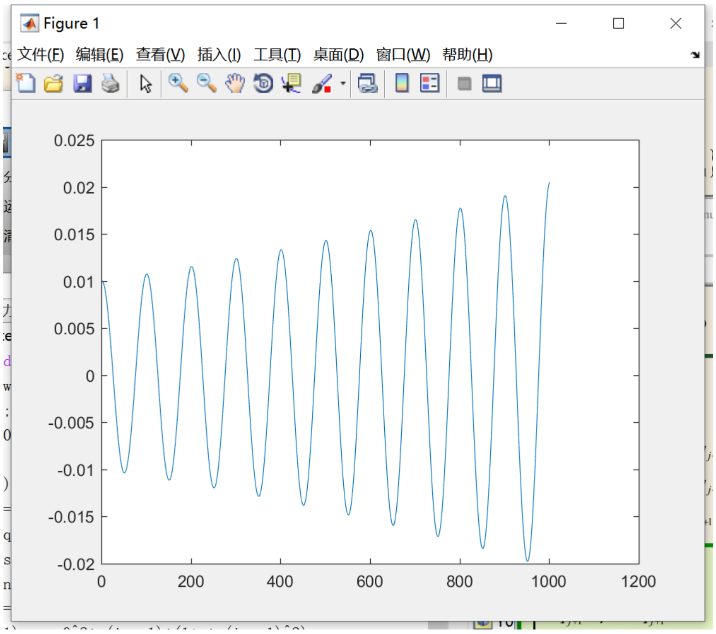


Il converge parce qu’ il amorti.

1.1.a $\frac{2\varepsilon}{\omega_0} \approx 0.0064$, donc je suppose : dt=0.01 et F=0 pour être correspondant au calcule précédant.

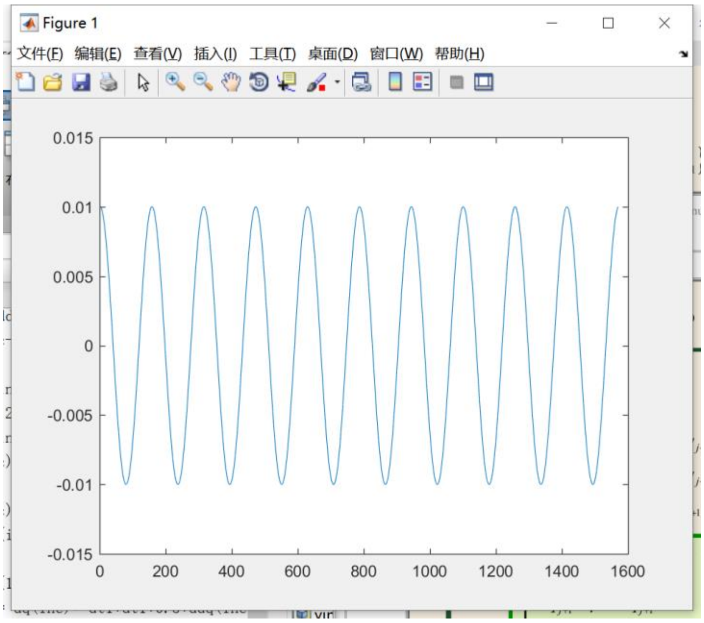
```
syms yex Y YY y0 Y0 w T E yim yvr YYY F h M dt
F=0
M=1
ip=0.02
T0=1
w0=2*pi/T0
dt=3*ip/w0*0.05
for j=1:10/dt
    yex(1)=0.01
    YY(1)=vpa(-w0^2*0.01+F/M-2*ip*w0*Y(1))
    yex(j+1)=vpa(yex(j)+dt*Y(j))
    Y(j+1)=vpa(Y(j)+dt*YY(j))
    YY(j+1)=vpa(-w0^2*yex(j+1)+F/M-2*ip*w0*Y(j+1))
    Y(1)=0
end
```

Le résultat est comme le suivant :



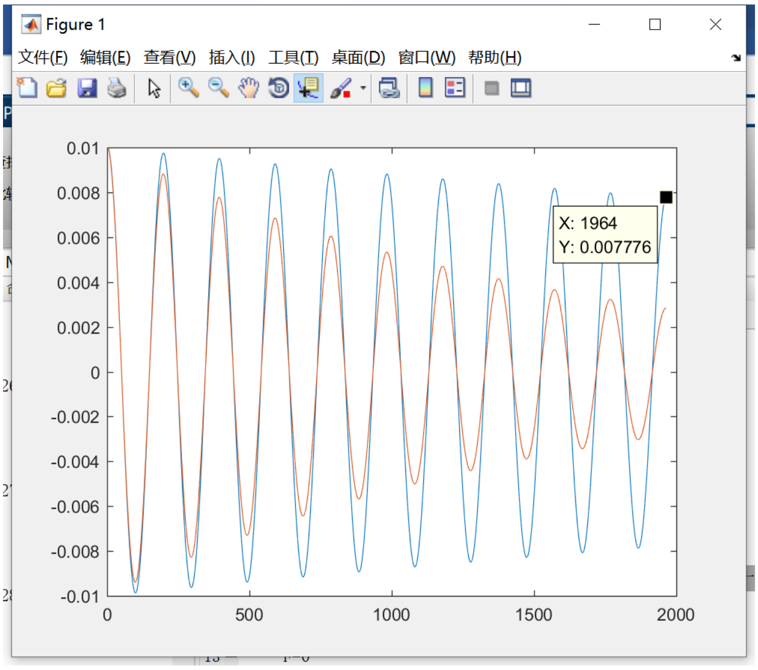
Il diverge et oscille mais de plus en plus grand, à cause que le pas de temps est trop grand. Donc il n' est pas précis.

1.1.b Si on suppose $dt = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$, le résultat est comme le suivant :



C' est comme la fonction f=0.01*cos(w*t). Donc il n' est pas précis.

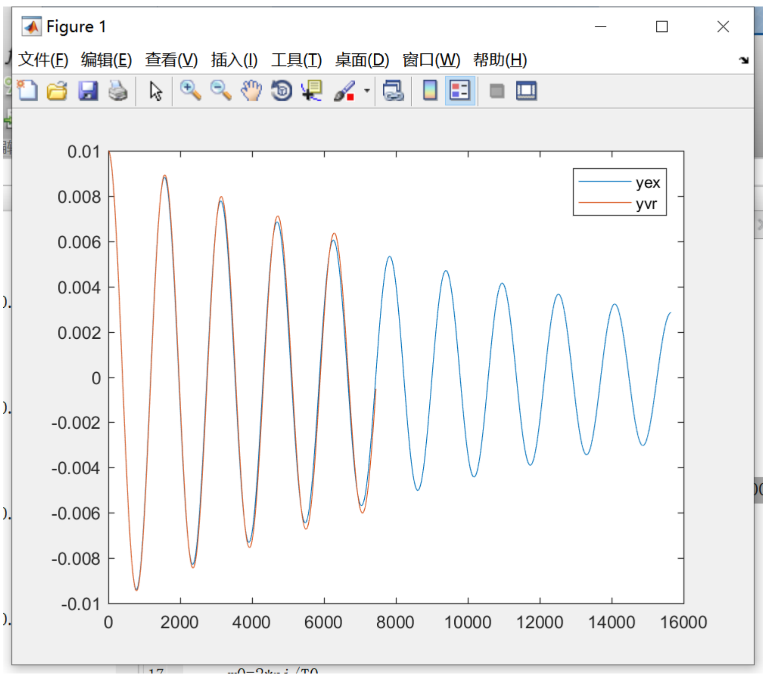
1.1.c Si on suppose $dt = 0.8 * \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$, le résultat est comme le suivant :



Il converge et pour voir sa précision, je le plot dans un même figure avec la valeur exacte. On trouve qu' il y a une grande différence entre eux, donc il n' est pas précis, on doit diminuer encore le pas de temps.

1.1.d C' est la relation entre dt(le pas de temps critique) et $\frac{2\varepsilon}{\omega_0}$ permet d' étudier la précision de la solution.

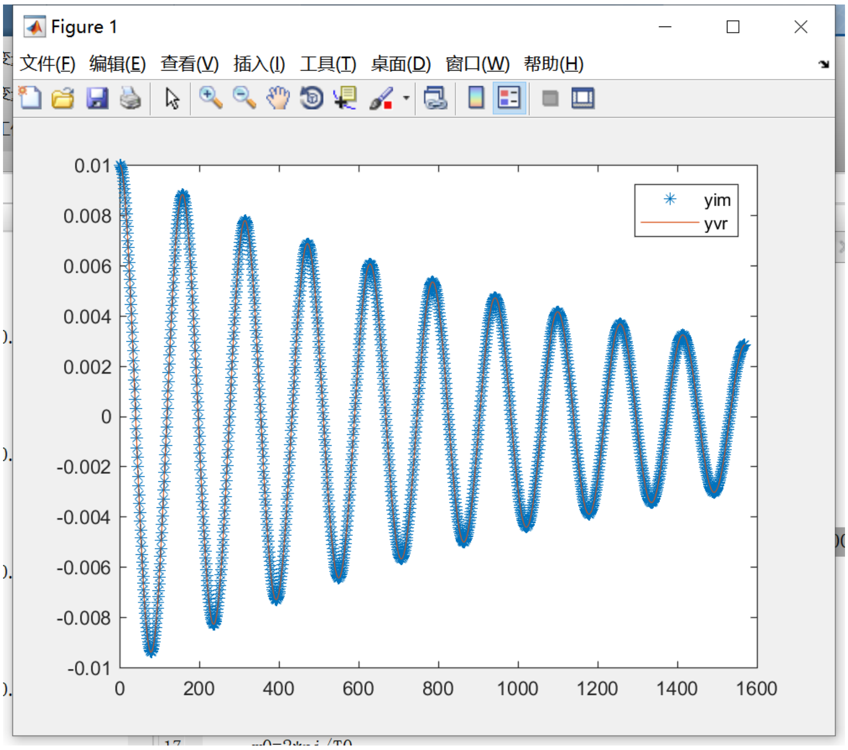
Je pense que la solution présente une précision suffisante quand $\frac{dt}{\frac{2\varepsilon}{\omega_0}} = 0.01$, on peut voir que la différence entre eux est suffisamment petite. Et on voit qu' au dernier pic, |yex-yvr|<0.001, donc je pense que la précision est suffisante.



1.2 Pour le temps critique d' Euler implicite, on essaye $dt = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$

```
%Euler implicite
syms yex Y YY y0 Y0 w T E yim yvr YYY F h M dt
ip=0.02
T0=1
w0=2*pi/T0
dt=4*2*ip/w0
yim(1)=0.01
Y(1)=0
YY(1)=vpa(-w0^2*0.01-2*ip*w0*Y(1))
for j=1:10/dt
    yim(j+1)=vpa((yim(j)+dt*Y(j))/(1+w0^2*dt^2))
    Y(j+1)=vpa(Y(j)+dt*YY(j))
    YY(j+1)=vpa(-w0^2*yim(j+1)-2*ip*w0*Y(j+1))
end
```

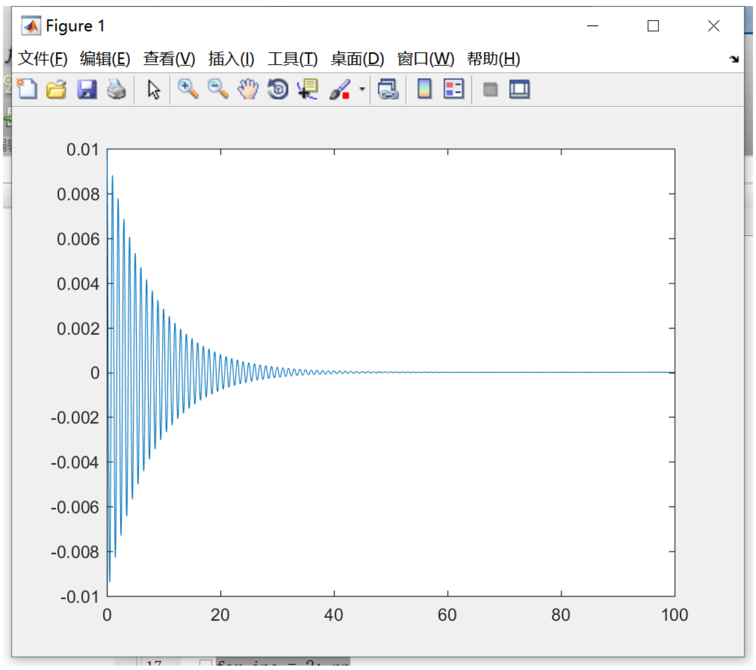
Le résultat est comme le suivant, on trouve que les valeurs d' Euler implicite se superposent bien avec les valeurs exactes, on ne voit pas les différences. Donc $dt = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$ est bien le pas de temps critique



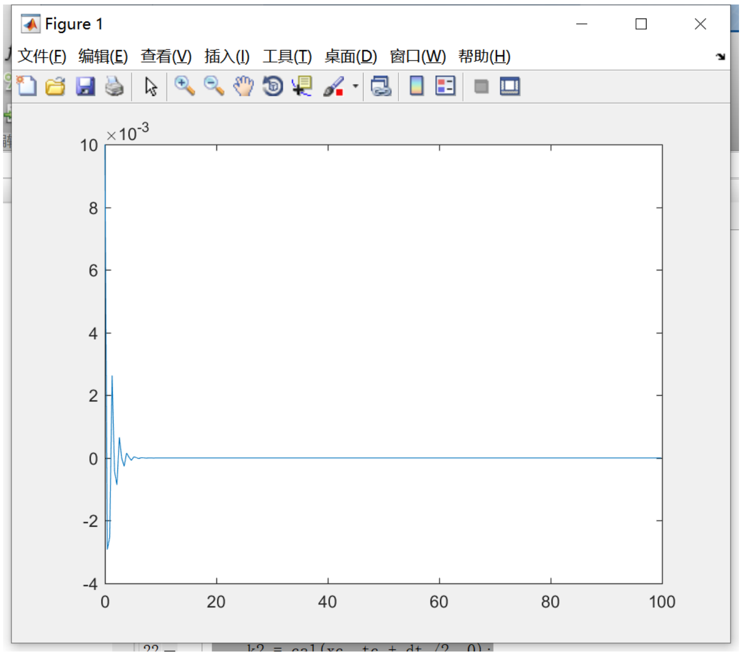
1.3 Runge Kutta

```
dt=h1*2*1.414/w0;
q0 = 1;
dq0 = 0;
ip=0.02
T0=1
w0=2*pi/T0
t = (0: dt: 100)';
np = size(t, 1);
q = zeros(np, 1);
dq = zeros(np, 1);
q(1) = q0;
dq(1) = dq0;
qj = [q0; dq0];
for inc = 2: np
    tc = t(inc-1);
    xc = qj;
    k1 = cal(xc, tc, 0);
    xc = qj + k1 * dt / 2;
    k2 = cal(xc, tc + dt /2, 0);
    xc = qj + k2 * dt / 2;
    k3 = cal(xc, tc + dt / 2, 0);
    xc = qj + k3 * dt;
    k4 = cal(xc, tc + dt, 0);
    k = (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6;
    qj = qj + k* dt;
    q(inc) = qj(1);
    dq(inc) = qj(2);
end
```

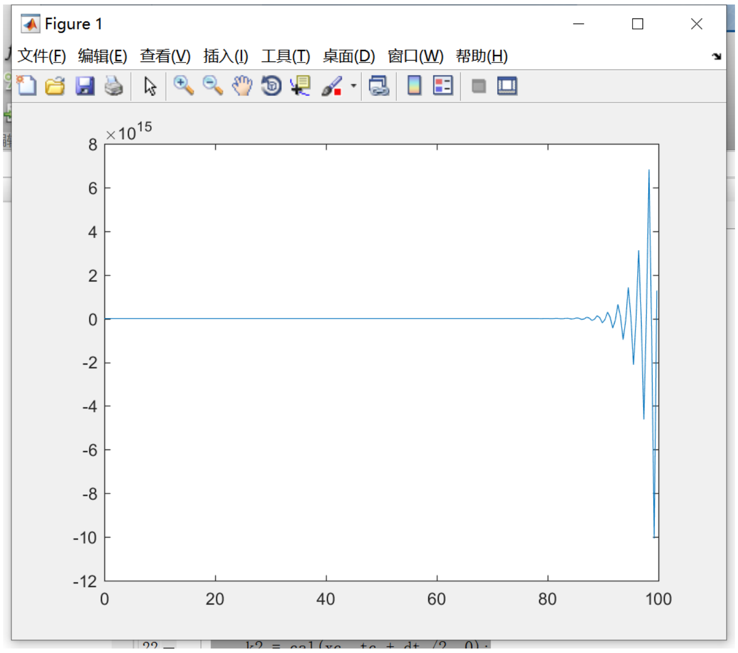
1.3.a Pour h = 0.04, le résultat est comme le suivant, il converge :



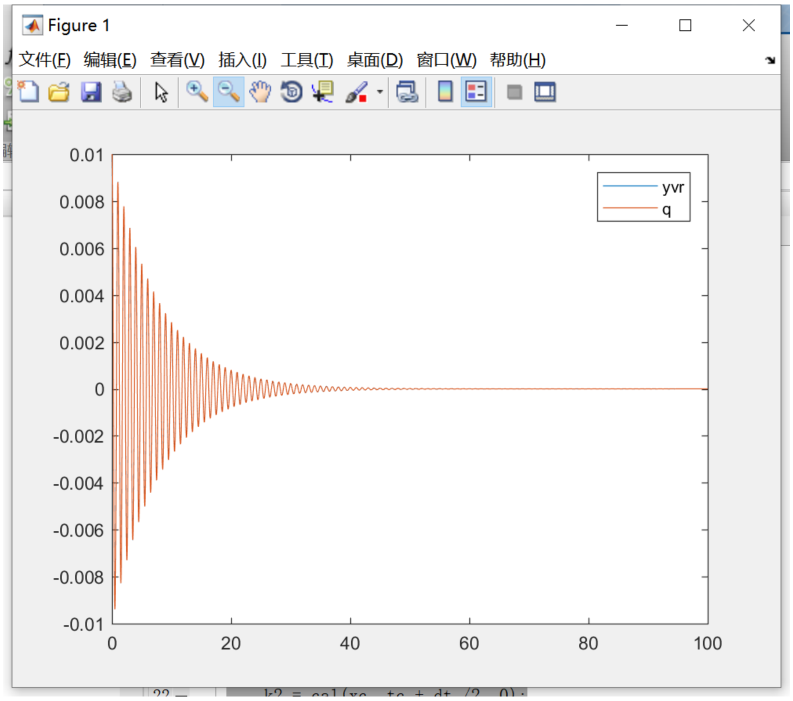
Pour h = 0.96, le résultat est comme le suivant, il converge plus vite qu' avant :



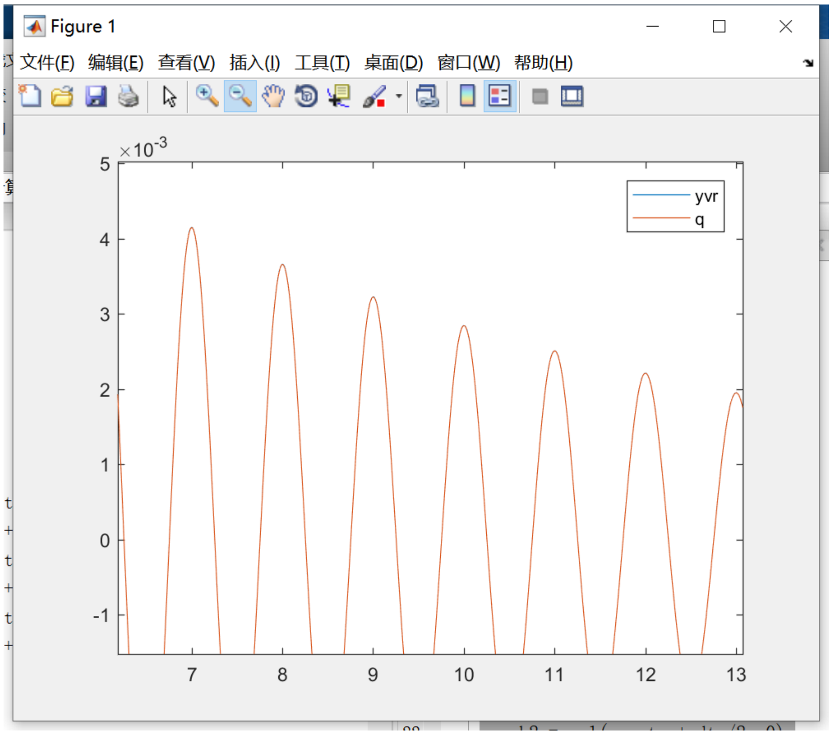
Pour h=1.04, le résultat est comme le suivant, il diverge donc il n’ est pas précis :



Pour voir la précision du cas h=0.04, je le plot dans un même figure avec la valeur exacte. On ne peut pas voir la différence entre eux.

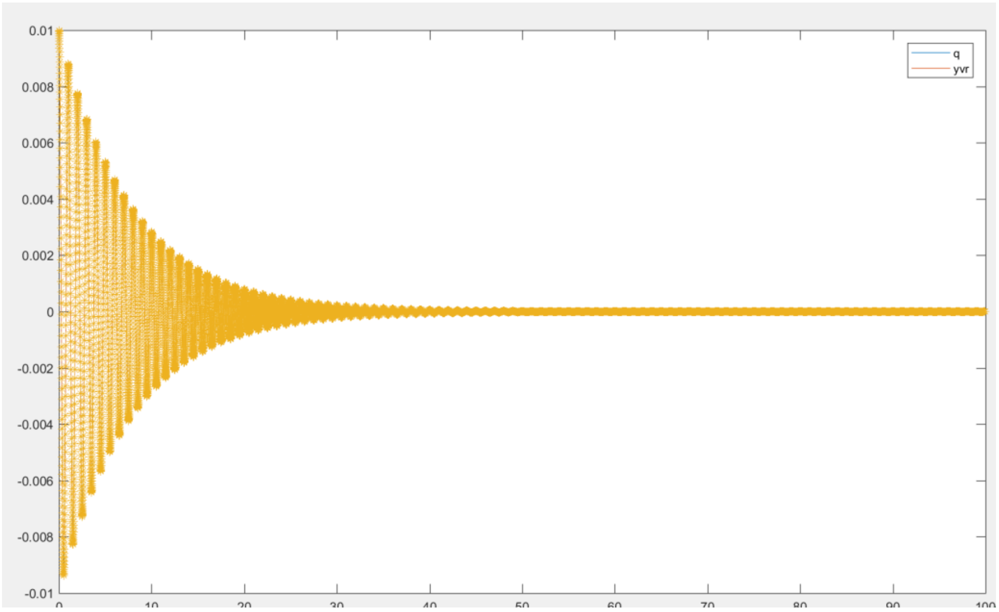


Quand on agrandit la figure, on trouve qu' il n' y a pas de différence entre eux.



Donc je pense que le résultat est suffisamment précis quand h=0.04, mais quand h=0,96, il diminue trop vite donc pas assez précis, et pour h=1.04, il diverge.

1.3.b Pour déterminer le pas de temps critique, j' essaye avec $dt = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$. Le résultat est comme le suivant, on trouve que les valeurs de Runge Kutta se superposent bien avec les valeurs exactes, on ne voit pas les différences. Donc $dt = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$ est bien le pas de temps critique



Code de Matlab

```
%Euler explicit
 ip=0.02
 T0=1
 w0=2*pi/T0
 x0=0.01
 W=w0*(1-ip^2)^0.5
 t=linspace(0,100,10000)
 x1=exp(-0.02*2*pi*t)
 x2=x0*cos(W*t)+ip*2*pi*x0*sin(W*t)/W
 yvr=x1.*x2
 plot(t,yvr)
 syms yex Y YY y0 Y0 w T E yim yvr YYY F h M dt
 F=0
 M=1
 ip=0.02
 T0=1
 w0=2*pi/T0
 dt=3*ip/w0*0.05
 for j=1:10/dt
     yex(1)=0.01
     YY(1)=vpa(-w0^2*0.01+F/M-2*ip*0.01*Y(1))
```

```
        yex(j+1)=vpa(yex(j)+dt*Y(j))
        Y(j+1)=vpa(Y(j)+dt*YY(j))
        YY(j+1)=vpa(-w0^2*yex(j+1)+F/M-2*ip*w0*Y(j+1))
        Y(1)=0
 end
 plot(yex)

 %Euler implicite
 syms yex Y YY y0 Y0 w T E yim yvr YYY F h M dt
 ip=0.02
 T0=1
 w0=2*pi/T0
 dt=4*2*ip/w0
 yim(1)=0.01
 Y(1)=0
 YY(1)=vpa(-w0^2*0.01-2*ip*0.01*Y(1))
for j=1:10/dt
        yim(j+1)=vpa((yim(j)+dt*Y(j))/(1+w0^2*dt^2))
        Y(j+1)=vpa(Y(j)+dt*YY(j))
        YY(j+1)=vpa(-w0^2*yim(j+1)-2*ip*w0*Y(j+1))
end

 %Runge Kutta
h1=0.04;
h2=0.96;
h3=1.04;
T0=1;
w0=2*pi/T0;
dt=2*0.02/w0;
q0 = 0.01;
dq0 = 0;
ip=0.02
t = (0: dt: 100)';
np = size(t, 1);
q = zeros(np, 1);
dq = zeros(np, 1);
q(1) = q0;
dq(1) = dq0;
qj = [q0; dq0];
for inc = 2: np
      tc = t(inc-1);
      xc = qj;
      k1 = cal(xc, tc, 0);
      xc = qj + k1 * dt / 2;
```

```
        k2 = cal(xc, tc + dt /2, 0);
        xc = qj + k2 * dt / 2;
        k3 = cal(xc, tc + dt / 2, 0);
        xc = qj + k3 * dt;
        k4 = cal(xc, tc + dt, 0);
        k = (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6;
        qj = qj + k* dt;
        q(inc) = qj(1);
        dq(inc) = qj(2);
end
plot(t,q)

function [ duc ] = cal( uc )
T0=1;
ip=0.02;
w0=2*pi/T0;
duc = zeros(2,1);
duc(1) = uc(2);
duc(2) = -w0^2 * uc(1)-2*ip*w0 *uc(2);
end
```