

D5 et D6 Etude d' un double pendule des petits mouvements

1.1 On sait l' équation du mouvement :

$$m a^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + m g a \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = F_0 \sin \omega t \begin{bmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Il peut s' écrire comme le suivant :

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{2g\theta_1}{a} = \frac{F_0 \sin \omega t}{ma}$$

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{g\theta_2}{a} = \frac{F_0 \sin \omega t}{ma\sqrt{2}}$$

D' où on peut résoudre $\ddot{\theta}_1$ et $\ddot{\theta}_2$:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g\theta_2}{a} - \frac{2g\theta_1}{a} + \frac{(2 - \sqrt{2})F_0 \sin \omega t}{2ma}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2g\theta_1}{a} - \frac{2g\theta_2}{a} + \frac{(\sqrt{2} - 1)F_0 \sin \omega t}{ma}$$

Pour $\beta = 0 \gamma = 0.5$, on suppose que $\theta_2 = \varphi$, la matrice d' amplification est comme le suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5dt & 0 & 0 & 0 \\ 2g/a & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5dt \\ 0 & 0 & 1 & g/a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{j+1} \\ \dot{\theta}_{j+1} \\ \theta_{j+1} \\ \dot{\theta}_{j+1} \\ \varphi_{j+1} \\ \dot{\varphi}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0.5dt^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5dt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & dt & 0.5dt^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5dt \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \end{bmatrix} + \frac{F_0 \sin \omega t}{ma} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

En utilisant la solution de $\ddot{\theta}_1$ et $\ddot{\theta}_2$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{gdt}{a} & 1 & -\frac{0.5gdt}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{gdt}{a} & 0 & \frac{gdt}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{j+1} \\ \dot{\theta}_{j+1} \\ \varphi_{j+1} \\ \dot{\varphi}_{j+1} \end{bmatrix} + \frac{F_0 \text{dtsin } \omega t}{ma} \begin{bmatrix} 0 \\ (2 - \sqrt{2})/4 \\ 0 \\ (\sqrt{2} - 1)/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{gdt^2}{a} & dt & \frac{0.5gdt^2}{a} & 0 \\ -\frac{gdt}{a} & 1 & \frac{0.5dtdg}{a} & 0 \\ \frac{gdt^2}{a} & 0 & 1 - \frac{gdt^2}{a} & dt \\ \frac{gdt}{a} & 0 & -\frac{gdt}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \end{bmatrix} + \frac{F_0 \text{dtsin } \omega t}{ma} \begin{bmatrix} \frac{dt(2 - \sqrt{2})}{4} \\ (2 - \sqrt{2})/4 \\ \frac{dt(\sqrt{2} - 1)}{2} \\ (\sqrt{2} - 1)/2 \end{bmatrix}$$

Pour calculer la matrice d' amplification, j' écris le code comme le suivant.

```
clear all; close all; clc; format long e;
syms dt g m a F0 w;
C=[1-(g*dt^2/a), dt, 0.5*g*dt^2/a, 0; -g*dt/a, 1, 0.5*dt*g/a, 0; g*dt^2/a, 0, 1-(g*dt^2/a), dt; g*dt/a, 0, -g*dt/a, 1]
B=[1, 0, 0, 0; g*dt/a, 1, -0.5*g*dt/a, 0; 0, 0, 1, 0; -g*dt/a, 0, g*dt/a, 1]
A=inv(B) * C
```

Le résultat de la matrice d' amplification est le suivant.

```
A =
[
1 - (dt^2*g)/a, dt, (dt^2*g)/(2*a), 0
[ (dt^3*g^2)/(2*a^2) - (dt*g)/a + (dt*g*((g*dt^2)/a - 1))/a, 1 - (dt^2*g)/a, (dt*g)/(2*a) - (dt^3*g^2)/(2*a^2) - (dt*g*((g*dt^2)/a - 1))/(2*a), (dt^2*g)/(2*a)]
[
(dt^2*g)/a, 0, 1 - (dt^2*g)/a, dt]
[
(dt*g)/a - (dt^3*g^2)/a^2 - (dt*g*((g*dt^2)/a - 1))/a, (dt^2*g)/a, (dt^3*g^2)/(2*a^2) - (dt*g)/a + (dt*g*((g*dt^2)/a - 1))/a, 1 - (dt^2*g)/a]
```

1.2 Sur Matlab, on détermine numériquement le pas de temps critique.

```

clear all; close all; clc; format long e;
syms dt g m a F0 w;
dt=0.155;
m = 2; a = 0.5; g = 9.81; F0 = 20; w = 2*pi;
C=[1-(g*dt^2/a), dt, 0.5*g*dt^2/a, 0; -g*dt/a, 1, 0.5*dt*g/a, 0; g*dt^2/a, 0, 1-(g*dt^2/a), dt; g*dt/a, 0, -g*dt/a, 1]
B=[1, 0, 0, 0; g*dt/a, 1, -0.5*g*dt/a, 0; 0, 0, 1, 0; -g*dt/a, 0, g*dt/a, 1]
A=inv(B) * C
[z,d]=eig( inv(B) ) * C
mo=abs(d)

```

On trouve que les modules des valeurs caractéristique de A sont égales à 1 quand dt=0.155, parce que les valeurs de tous les nombres de la matrice « mo » sont égales à 1 la premier fois quand je diminue la valeur de dt. Le résultat est comme le suivant :

```

mo =
    1.0000000000000000e+00    0    0    0
         0    1.0000000000000000e+00    0    0
         0    0    1.0000000000000000e+00    0
         0    0    0    1.0000000000000000e+00

```

Donc le pas de temps critique est 0.155.

1.3 Soit $q_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}$, (1) peut s' écrire comme :

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ddot{q}_0 + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q_0 = F_0 \sin wt \Big|_{a/\sqrt{2}}$$

On obtient la relation entre \ddot{q}_0 et q_0 :

$$\ddot{q}_0 = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_0 + \frac{F_0 \sin wt}{ma} \Big|_{\frac{(2-\sqrt{2})/2}{\sqrt{2}-1}}$$

Mais je ne peux pas obtenir la relation entre q_0 et \dot{q}_0 , mais on sait les valeurs de q_0 et \dot{q}_0 , parce que dans le sujet donne :

$$\theta_1(0) = 0 \text{ rad} \quad \theta_2(0) = 0 \text{ rad} \quad \dot{\theta}_1(0) = -1.31519275 \text{ rad.s}^{-1} \quad \dot{\theta}_2(0) = -1.85996342 \text{ rad.s}^{-1}$$

1.4 Soit $q_n = \begin{bmatrix} \theta_n \\ \varphi_n \end{bmatrix}$, le schéma Newmark explicite s' écrire comme :

$$\ddot{q}_n = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_n + \frac{F_0 \sin wt_n}{ma} \Big|_{\frac{(2-\sqrt{2})/2}{\sqrt{2}-1}}$$

$$q_{n+1} = q_n + dt \dot{q}_n + 0.5dt^2 \ddot{q}_n$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_{n+1} + \frac{F_0 \sin wt_{n+1}}{ma} \Big|_{\frac{(2-\sqrt{2})/2}{\sqrt{2}-1}}$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + 0.5dt \ddot{q}_n + 0.5dt \ddot{q}_{n+1}$$

1.5 Le programme de Matlab est comme le suivant :

```

dt1 = 0.02;
t1 = (0:dt1:5)';
npl = size(t1,1);
syms th fi dth dfi;
%th = zeros(npl,1);fi = zeros(npl,1);
%dth = zeros(npl,1);dfi = zeros(npl,1);
m = 2;a = 0.5; g = 9.81; F0 = 20; w= 2*pi;
th(1) = 0; fi(1) = 0;t(1)=0
dth(1) = -1.31519275; dfi(1) = -1.85996342;
ddth(1) = g*fi(1)/a-2*g*th(1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(1))/(2*m*a)
ddfi(1) = 2*g*th(1)/a-2*g*fi(1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(1))/(m*a)
for inc = 2 : npl
    t(inc)=t(inc-1)+dt1
    ddth(inc-1) = g*fi(inc-1)/a-2*g*th(inc-1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(inc-1))/(2*m*a)
    ddfi(inc-1) = 2*g*th(inc-1)/a-2*g*fi(inc-1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(inc-1))/(m*a)
    th(inc) = th(inc-1) + dt1 * dth(inc-1)+ dt1*dt1*0.5*ddth(inc-1)
    fi(inc) = fi(inc-1) + dt1 * dfi(inc-1)+ dt1*dt1*0.5*ddfi(inc-1)
    ddth(inc) = g*fi(inc)/a-2*g*th(inc)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(inc))/(2*m*a)
    ddfi(inc) = 2*g*th(inc)/a-2*g*fi(inc)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(inc))/(m*a)
    dth(inc) = dth(inc-1) +0.5*dt1*ddth(inc)+0.5*dt1*dth(inc-1)
    dfi(inc) = dfi(inc-1) +0.5*dt1*ddfi(inc)+0.5*dt1*dfi(inc-1)
    th=vpa(th,3)
    fi=vpa(fi,3)
    dth=vpa(dth,3)
    dfi=vpa(dfi,3)
    ddth=vpa(ddth,3)
    ddfi=vpa(ddfi,3)
end

```

1.6 Quand $t=0s$, on obtient le résultat directement par établir $t(1)=0$ et puis exécuter :

```

m = 2;a = 0.5; g = 9.81; F0 = 20; w= 2*pi;
th(1) = 0; fi(1) = 0;t(1)=0
dth(1) = -1.31519275; dfi(1) = -1.85996342;
ddth(1) = g*fi(1)/a-2*g*th(1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(1))/(2*m*a)
ddfi(1) = 2*g*th(1)/a-2*g*fi(1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(1))/(m*a)

t =

    0

ddth =

    0

ddfi =

    0

```

Pour $t=dt$ et $2dt$, j' établis que la circulation finit à 0.04s :

```

t1 = (0:dt1:0.04)';
npl = size(t1,1);
syms th fi dth dfi;

```

Le résultat est le suivant, dans $[\cdot\cdot]$, les premiers nombres sont les valeurs de $t=0s$, les deuxièmes sont celles de $t=0.02s$, et les troisièmes sont celles de $t=0.04s$.

```

th =
[ 0, -0.0263, -0.0525]

fi =
[ 0, -0.0372, -0.0742]

dth =
[ -1.32, -1.32, -1.31]

dfi =
[ -1.86, -1.86, -1.85]

ddth =
[ 0, 1.04, 2.06]

ddfi =
[ 0, 1.47, 2.91]

```

Pour $\tau=0.5s$, j' établis que la circulation finit à 0.5s, le résultat est le suivant :

```

>> vpa(th(26),3)
ans =
-0.325

>> vpa(fi(26),3)
ans =
-0.46

>> vpa(dth(26),3)
ans =
0.127

>> vpa(df(26),3)
ans =
0.18

>> vpa(ddth(26),3)
ans =
3.74

>> vpa(ddfi(26),3)
ans =
5.29

```

2.1 Pour $\beta = 0.25, \gamma = 0.5$, la matrice d' amplification est comme le suivant :

$$\dot{\theta}_1 = \frac{g\theta_2}{a} - \frac{2g\theta_1}{a} + \frac{(2-\sqrt{2})F_0 \sin wt}{2ma}$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{2g\theta_1}{a} - \frac{2g\theta_2}{a} + \frac{(\sqrt{2}-1)F_0 \sin wt}{ma}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.25dt^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5dt & 0 & 0 & 0 \\ 2g/a & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.25dt^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5dt \\ 0 & 0 & 1 & g/a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{j+1} \\ \dot{\theta}_{j+1} \\ \ddot{\theta}_{j+1} \\ \varphi_{j+1} \\ \dot{\varphi}_{j+1} \\ \ddot{\varphi}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0.25dt^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5dt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & dt & 0.25dt^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5dt \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ \ddot{\theta}_j \\ \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \\ \ddot{\varphi}_j \end{bmatrix} + \frac{F_0 \sin wt}{ma} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

En utilisant la solution de $\ddot{\theta}_1$ et $\ddot{\theta}_2$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 + 0.5dt^2g/a & 0 & -0.25dt^2g/a & 0 \\ \frac{gdt}{a} & 1 & -\frac{0.5gdt}{a} & 0 \\ -0.5dt^2g/a & 0 & 1 + 0.5dt^2g/a & 0 \\ -\frac{gdt}{a} & 0 & \frac{gdt}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{j+1} \\ \dot{\theta}_{j+1} \\ \varphi_{j+1} \\ \dot{\varphi}_{j+1} \end{bmatrix} + \frac{F_0 dt \sin wt}{ma} \begin{bmatrix} (\sqrt{2}-2)dt/8 \\ (\sqrt{2}-2)/4 \\ (1-\sqrt{2})dt/4 \\ (\sqrt{2}-2)/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{0.5gdt^2}{a} & dt & 0.25dt^2 + \frac{0.25gdt^2}{a} & 0 \\ -\frac{gdt}{a} & 1 & \frac{0.5dtg}{a} & 0 \\ \frac{0.5gdt^2}{a} & 0 & 1 - \frac{0.5gdt^2}{a} & dt \\ \frac{gdt}{a} & 0 & -\frac{gdt}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \end{bmatrix} + \frac{F_0 \sin wt}{ma} \begin{bmatrix} \frac{dt^2(2-\sqrt{2})}{8} \\ (2-\sqrt{2})/4 \\ \frac{dt^2(\sqrt{2}-1)}{8} \\ (\sqrt{2}-1)/4 \end{bmatrix}$$

Pour calculer la matrice d' amplification, j' écris le code comme le suivant.

```

syms dt A B C z d r e i m m o
m = 2; a = 0.5; g = 9.81; F0 = 20; w = 2*pi;
C=vpa([1-0.5*g*dt^2/a, dt, 0.25*dt^2+0.25*g*dt^2/a, 0;-g*dt/a, 1, 0.5*dt*g/a, 0;0.5*g*dt^2/a, 0, 1-0.5*g*dt^2/a, dt;g*dt/a, 0, -g*dt/a, 1])
B=vpa([1-0.5*dt^2*g/a, 0, -0.25*dt^2*g/a, 0;g*dt/a, 1, -0.5*g*dt/a, 0;-0.5*dt^2*g/a, 0, 1+0.5*dt^2*g/a, 0;-g*dt/a, 0, g*dt/a, 1])
A=inv(B) * C
A=vpa(A, 3)

```

Le résultat de la matrice d' amplification est le suivant. La première figure est la première colonne, la deuxième figure est la deuxième colonne, etc.

```

A =
[
(9.62e5*dt^4)/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4) - (200.0*(9.81*dt^2 - 1.0)*(981.0*dt^2 + 100.0))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4),
(1.92e6*dt^3)/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4) - 19.6*dt + (1966.0*(9.81*dt^2 - 1.0)*(981.0*dt^3 + 200.0*dt))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4),
(1966.0*dt^2*(981.0*dt^2 + 100.0))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4) - (1.96e5*dt^2*(9.81*dt^2 - 1.0))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4),
19.6*dt - (1.92e4*dt^2*(981.0*dt^3 + 200.0*dt))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4) - (3.92e5*dt*(9.81*dt^2 - 1.0))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4),

(200.0*dt*(981.0*dt^2 + 100.0))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4),
1.0 - (1966.0*dt*(981.0*dt^3 + 200.0*dt))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4),
(1.96e5*dt^3)/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4),
(3.92e5*dt^2)/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4),

(1033.0*dt^2*(981.0*dt^2 + 100.0))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4) - (9.81e4*dt^2*(9.81*dt^2 - 1.0))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4),
9.81*dt - (1.01e4*dt^2*(981.0*dt^3 + 200.0*dt))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4) - (1.96e5*dt*(9.81*dt^2 - 1.0))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4),
(1.01e6*dt^4)/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4) - (200.0*(9.81*dt^2 - 1.0)*(981.0*dt^2 + 100.0))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4),
(2.02e6*dt^3)/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4) - 19.6*dt + (1966.0*(9.81*dt^2 - 1.0)*(981.0*dt^3 + 200.0*dt))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4),

(9.81e4*dt^3)/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4)]
(1.96e5*dt^2)/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4)]
(200.0*dt*(981.0*dt^2 + 100.0))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4)]
1.0 - (1966.0*dt*(981.0*dt^3 + 200.0*dt))/(9.62e5*dt^4 + 3.92e5*dt^2 + 2.0e4)]

```

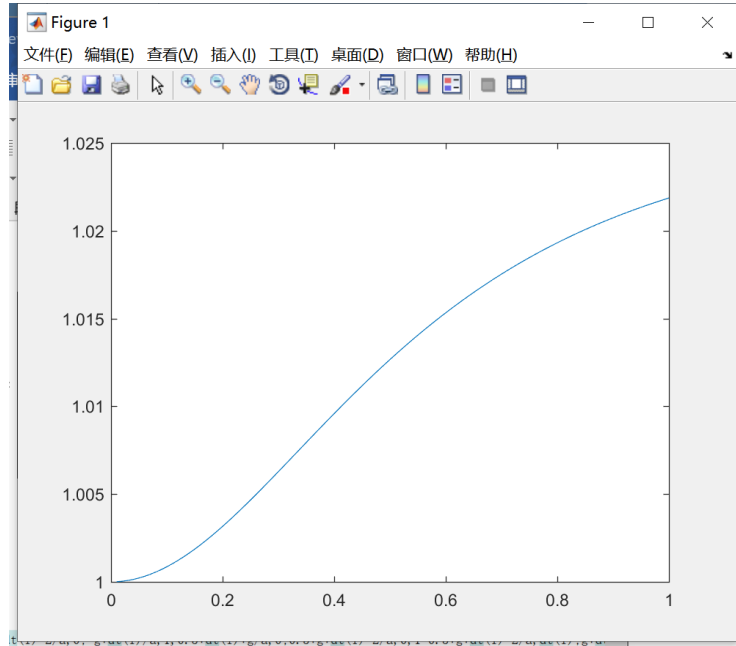
2.2 Pour dessiner une allure, je programme comme le suivant :

```

syms dt A B C z d re im mo
m = 2; a = 0.5; g = 9.81; F0 = 20; w = 2*pi;
dt(1)=0.01
for i=2:100
    dt(i)=dt(i-1)+0.01
    C=vpa([1-0.5*g*dt(i)^2/a, dt(i), 0.25*dt(i)^2+0.25*g*dt(i)^2/a, 0; -g*dt(i)/a, 1, 0.5*dt(i)*g/a, 0; 0.5*g*dt(i)^2/a, 0, 1-0.5*g*dt(i)^2/a, dt(i); g*dt(i)/a, 0, -g*dt(i)/a, 1])
    B=vpa([1+0.5*g*dt(i)^2/a, 0, -0.25*dt(i)^2*g/a, 0; g*dt(i)/a, 1, -0.5*g*dt(i)/a, 0; -0.5*dt(i)^2*g/a, 0, 1+0.5*g*dt(i)^2/a, 0; -g*dt(i)/a, 0, g*dt(i)/a, 1])
    [z, d]=eig( (inv(B) ) * C)
    mo=abs(d)
    ma(i)=max(max(mo))
end
plot(dt, ma)

```

L' allure est le suivant :



Donc on conclure que pour toutes les pas de temps entre 0 et 1s, la plus grande valeur propre de cette matrice est plus grande que 1, et elle augmente quand le pas de temps augmente.

2.3 Comme la question 1.3, soit $q_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}$, (1) peut s' écrire comme :

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ddot{q}_0 + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q_0 = F_0 \sin wt \Big|_{a/\sqrt{2}}$$

On obtient la relation entre \ddot{q}_0 et q_0 :

$$\ddot{q}_0 = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_0 + \frac{F_0 \sin wt}{ma} \begin{bmatrix} (2 - \sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix}$$

Mais je ne peux pas obtenir la relation entre q_0 et \dot{q}_0 , mais on sait les valeurs de q_0 et \dot{q}_0 , parce que dans le sujet donne :

$$\theta_1(0) = 0 \text{ rad} \quad \theta_2(0) = 0 \text{ rad} \quad \dot{\theta}_1(0) = -1.31519275 \text{ rad.s}^{-1} \quad \dot{\theta}_2(0) = -1.85996342 \text{ rad.s}^{-1}$$

2.4 Soit $q_n = \begin{bmatrix} \theta_n \\ \varphi_n \end{bmatrix}$, le schéma Newmark implicite s' écrire comme :

$$\ddot{q}_n = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_n + \frac{F_0 \sin wt_n}{ma} \begin{bmatrix} (2 - \sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix}$$

$$q_{n+1} = q_n + dt \dot{q}_n + 0.25 dt^2 \ddot{q}_n + 0.25 dt^2 \ddot{q}_{n+1}$$

$$q_{n+1} = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_{n+1} + \frac{F_0 \sin wt_{n+1}}{ma} \begin{bmatrix} (2 - \sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix}$$

$$q_{n+1} = \dot{q}_n + 0.5 dt \ddot{q}_n + 0.5 dt \ddot{q}_{n+1}$$

2.5 J' utilise Matlab pour obtenir la relation entre les vecteurs d' état du système aux instants t_n et

t_{n+1}

```
syms thinc fiinc dthinc dthinc ddfiinc thinc fiinc dthinc dthinc ddfiinc tinc;  
[thinc,fiinc]=solve('thinc = thinc + dtl * dthinc+ dtl*dtl*0.25*ddthinc+dtl*dtl*0.25*( g*fiinc/a-2*g*thinc/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*tinc))/(2*m*a)', 'fiinc =
```

Après, je programme ce résultat dans le code comme le suivant :

```
dtl = 0.02;t1 = (0:dtl:1)';  
npl = size(t1,1);  
m = 2;a = 0.5; g = 9.81; F0 = 20; w = 2*pi;  
syms th fi dth dfi;  
th(1) = 0; fi(1) = 0;t(1)=0  
dth(1) = -1.31519275; dfi(1) = -1.85996342;  
ddth(1) = g*fi(1)/a-2*g*th(1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(1))/(2*m*a)  
ddfi(1) = 2*g*th(1)/a-2*g*fi(1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(1))/(m*a)  
for inc = 2 : npl  
t(inc)=t(inc-1)+dtl  
ddth(inc-1) = g*fi(inc-1)/a-2*g*th(inc-1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(inc-1))/(2*m*a)  
ddfi(inc-1) = 2*g*th(inc-1)/a-2*g*fi(inc-1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(inc-1))/(m*a)  
th(inc)=(2.0e-33*(4.0e33*a^2*m*th(inc-1) + 4.0e33*a^2*dtl*dth(inc-1)*m + 292893218813452475599155637895155.0*F0*a*dtl^2*sin(t(inc)*w) + 250  
fi(inc)=(1.0e-33*(8.0e33*a^2*fi(inc-1)*m + 8.0e33*a^2*ddfi(inc-1)*dtl*m + 828427124746190097603377448419400.0*F0*a*dtl^2*sin(t(inc)*w) + 707  
%th(inc) = th(inc-1) + dtl * dth(inc-1)+ dtl*dtl*0.25*ddth(inc-1)+dtl*dtl*0.25*ddth(inc)  
%fi(inc) = fi(inc-1) + dtl * dfi(inc-1)+ dtl*dtl*0.25*ddfi(inc-1)+dtl*dtl*0.25*ddfi(inc)  
ddth(inc) = g*fi(inc)/a-2*g*th(inc)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(inc))/(2*m*a)  
ddfi(inc) = 2*g*th(inc)/a-2*g*fi(inc)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(inc))/(m*a)  
dth(inc) = dth(inc-1) +0.5*dtl*ddth(inc)+0.5*dtl*dth(inc-1)  
dfi(inc) = dfi(inc-1) +0.5*dtl*ddfi(inc)+0.5*dtl*dfi(inc-1)  
th=vpa(th,3)  
fi=vpa(fi,3)  
dth=vpa(dth,3)  
dfi=vpa(dfi,3)  
ddth=vpa(ddth,3)  
ddfi=vpa(ddfi,3)  
end
```

2.6 Comme la question 1.6, quand $t=0s$, on obtient le résultat directement par établir $t(1)=0$ et puis exécuter :

```
m = 2;a = 0.5; g = 9.81; F0 = 20; w = 2*pi;  
th(1) = 0; fi(1) = 0;t(1)=0  
dth(1) = -1.31519275; dfi(1) = -1.85996342;  
ddth(1) = g*fi(1)/a-2*g*th(1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(1))/(2*m*a)  
ddfi(1) = 2*g*th(1)/a-2*g*fi(1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(1))/(m*a)  
  
t =  
  
0  
  
ddth =  
  
0  
  
ddfi =  
  
0
```

Pour $t=dt$ et $2dt$, j' établis que la circulation finit à $0.04s$. Le résultat est le suivant, dans $[\dots]$, les premiers nombres sont les valeurs de $t=0s$, les deuxièmes sont celles de $t=0.02s$, et les troisièmes sont celles de $t=0.04s$.

```
th =  
[ 0, -0.0262, -0.0523]  
  
fi =  
[ 0, -0.0371, -0.0739]  
  
dth =  
[ -1.32, -1.32, -1.31]  
  
dfi =  
[ -1.86, -1.86, -1.85]
```

Pour $t=0.5s$, j' établis que la circulation finit à 0.5s, le résultat est le suivant :

```
>> vpa(th(26), 3)  
  
ans =  
  
-0.325  
  
>> vpa(fi(26), 3)  
  
ans =  
  
-0.46  
  
>> vpa(dth(26), 3)  
  
ans =  
  
0.126  
  
>> vpa(dfi(26), 3)  
  
ans =  
  
0.178
```