MÉCANIQUE NUMÉRIQUE

1^er^ Devoir du cours

Benjamin QU – SY1924124

Partie 1 – Retrouver l'équation du mouvement du pendule simple

Pour un pendule simple, les énergies s'écrivent :

$$E_c = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2$$
$$E_p = -mgd\cos\theta + Cte$$
$$\delta W = 0$$

Le Lagrangien est $L = E_c - E_p = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + mgd\cos\theta - Cte$

Alors on a l'équation :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{car} \quad \delta W = 0$$

Donc :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\left(\frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + mgd\cos\theta - Cte\right)}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial\left(\frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + mgd\cos\theta - Cte\right)}{\partial \theta} = 0$$

Donc :

$$\frac{d}{dt}\left(I\dot{\theta}\right) + mgd\sin\theta = 0$$

D'où :

$$I\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0$$

D'après l'hypothèse des petits mouvement, $\theta \ll 1 \implies \sin\theta \sim \theta$
Alors on a l'équation du mouvement du pendule simple :

$$I\ddot{\theta} + mgd\,\theta = 0$$

Partie 2 – Exercice : Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

Les codes sont programmés en MATLAB et mis à la fin de ce document.

Question 1.1

La solution exacte est $q = \cos(2\pi t)$, et est représentée par une figure.

Question 1.2

$$E^* = 2\pi^2$$

La quantité E^* est constante indépendante des conditions initiales.

Question 2.1

Démonstration : On a deux relations :

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t \times \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix}$$

Et :

$$\ddot{q}_j + \omega_0^2 q_j = 0$$

Alors :

$$\begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t \times \dot{q}_j \\ \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t \times \ddot{q}_j = -\Delta t \times \omega_0^2 q_j + \dot{q}_j \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix}$$

La matrice $\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$ est alors la matrice d'amplification.

Question 2.2 et Question 2.3

J'utilise ici la méthode 2 pour programmer.

Les solutions obtenues avec différents pas de temps sont représentées dans une figure.

Comme vu dans la figure, les solutions sont divergentes. Et plus le pas de temps est petit, plus la divergence est lente.

Question 2.4

La quantité E* associée au schéma d'EULER diverge par rapport à la valeur exacte. Cependant, elle oscille plus forte quand Δt devient plus grand.

Question 2.5

Les valeurs propres de la matrice d'amplification sont $1 \pm 2\pi\Delta t i$. Les modules de ces deux valeurs sont plus grands que 1, ce qui conduit à l'instabilité du schéma d'EULER explicite.

Partie 3 – Codes MATLAB

```
%% Exercice -- Oscillateur conservatif lineaire a un degre de liberte
% Author: Benjamin QU -- SY1924124 -- P2015
clc
clear
%% Question 1 - 1
% Solution reference
T0 = 3;
solution_ref = dsolve('D2q+(2*pi)^2*q=0','q(0)=1','Dq(0)=0');
disp(['Q1.1 - La solution reference est q=' char(solution_ref)])

% Plot figure
fplot(solution_ref,[0,T0])
title(['Q1.1 q=' char(solution_ref)])
%% Question 1 - 2
% Quantite E*
w0 = sym(2*pi);
E_etoile = ((diff(solution_ref))^2+(w0^2)*(solution_ref^2))/2;
disp(['Q1.2 - La quantite E* est E*=' char(simplify(E_etoile))])
%% Question 2 - 2 et 2 - 3
% Resolution avec schema d'EULER explicite -- Methode 2
q0 = 1;
dq0 = 0;
pas_de_temps = [0.1 0.05 0.01]; % Differents pas de temps -- delta t

t = cell(length(pas_de_temps),1);
for i = 1:length(pas_de_temps)
   t{i} = 0:pas_de_temps(i):3;
end

mat_amp = cell(length(t),1); % Matrice d'amplification
for i = 1:length(t)
   mat_amp{i} = [1 pas_de_temps(i);-(2*pi)^2*pas_de_temps(i) 1];
end

U_j = {[q0;dq0],[q0;dq0],[q0;dq0]};

q_exp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
   q_exp{i} = zeros(1,length(t{i}));
end

dq_exp = cell(length(t),1);
```

```
for i = 1:length(t)
    dq_exp{i} = zeros(1,length(t{i}));
end

for i = 1:length(t)
    for j = 1:length(t{i})
        U_j{i} = mat_amp{i}*U_j{i};
        q_exp{i}(j) = U_j{i}(1);
        dq_exp{i}(j) = U_j{i}(2);
    end
end

% Plot figure
figure
for i = 1:length(t)
    hold on
    plot(t{i},q_exp{i})
end
title('Q2.2 et Q2.3 EULER explicite')
legend(['delta t = ' num2str(pas_de_temps(1))],['delta t = '
num2str(pas_de_temps(2))],['delta t = ' num2str(pas_de_temps(3))])
%% Question 2 - 4
% Calcul de E* associee au schema d'EULER explicite
E_etoile_exp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    E_etoile_exp{i} = zeros(length(t{i}),1);
end

for i = 1:length(t)
    for j = 1:length(t{i})
        E_etoile_exp{i}(j) =
((dq_exp{i}(j))^2+(2*pi)^2*(q_exp{i}(1))^2)/2;
    end
end

% Plot figure
for i = 1:length(t)
    figure
    fplot(E_etoile,[0,T0])
    hold on
    plot(t{i},E_etoile_exp{i})
    title(['Q2.4 E* avec pas de temps = ' num2str(pas_de_temps(i))])
end
%% Question 2 - 5
```

```
% Valeurs propres de la matrice d'amplification
syms delta_t
VP_explicit = eig([1 delta_t;-(w0)^2*delta_t 1]);
disp(['Q2.5 - Les valeurs propres de la matrice d''amplification sont
' char(VP_explicit(1)) ' et ' char(VP_explicit(2))])
```