MÉCANIQUE NUMÉRIQUE

2^e devoir du cours

Benjamin QU – SY1924124

* *Les codes sont programmés en MATLAB et mis dans* ***Partie 2***.
* *Les sorties graphiques pour certaines questions sont mises dans* ***Partie 3***.

Partie 1 – Exercice : Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

Question 3.1

J'utilise ici la méthode 1 pour programmer.
La résolution est représentée dans une figure.

Question 3.2

Avec un pas de temps $\Delta t = 0.01$s, on voit dans la sortie graphique que la solution avec EULER explicite diverge, alors que la solution avec EULER implicite correspond assez bien avec la solution exacte.

Question 3.3

En prenant différents pas de temps de 0.3s à 0.01s, on peut voir dans la sortie graphique qu'il y a un amortissement numérique. Et plus Δt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

Question 3.4

La comparaison des valeurs de la quantité *E** avec différents pas de temps sont représentés dans trois figures. On voit que *E** associée au schéma d'EULER explicite diverge, alors que *E** associée au schéma d'EULER implicite oscille entre $2\pi^2$ (*E** exacte) et $4\pi^2$.
Quand Δt devient plus grand, *E** associée au schéma d'EULER explicite diverge plus rapidement, alors que *E** associée au schéma d'EULER implicite ne présente pas de changement évident.

Question 3.5

Les valeurs propres de la matrice d'amplification sont $\frac{i}{2\pi\Delta t+i}$ et $\frac{1}{1+2\pi\Delta t i}$. Les modules de ces deux valeurs sont plus petits que 1, ce qui conduit à la stabilité du schéma d'EULER implicite.

Question 4.1

Pour transformer l'équation $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ à une formulation adaptée aux schémas du premier ordre, on construit alors un vecteur $Q = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$, et donc $\dot{Q} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix}$.

L'équation $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ peut s'écrire alors comme $\dot{Q} = A \times Q$, où $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}$, ce qui est d'une forme adaptée aux schémas du premier ordre et permet d'utiliser les schémas de RUNGE KUTTA.

Question 4.2

La résolution de l'équation du mouvement à l'aide d'un schéma de RUNGE KUTTA est programmée avec un pas de temps $\Delta t = 0.01$s.

Question 4.3

La comparaison des solutions obtenues avec différents schémas est représentée dans une figure, dans laquelle on peut dire que quand $\Delta t = 0.01\text{s}$, le schéma d'EULER implicite et le schéma de RUNGE KUTTA peuvent bien résoudre l'équation (1) car leur solution correspond bien à la solution exacte, alors que la solution obtenue avec le schéma d'EULER explicite diverge.

Question 4.4

La comparaison des valeurs de la quantité E^* avec un pas de temps $\Delta t = 0.01\text{s}$ est représentée dans une figure. On voit que E^* associée au schéma d'EULER explicite diverge, alors que E^* associée au schéma d'EULER implicite et E^* associée au schéma de RUNGE KUTTA oscillent entre $2\pi^2$ (E^* exacte) et $4\pi^2$.

On peut dire que quand $\Delta t = 0.01\text{s}$, la précision de la solution de l'équation (1) obtenue avec un schéma d'EULER implicite et un schéma de RUNGE KUTTA est du même ordre.

Partie 2 – Codes MATLAB

```
%% Exercice -- Oscillateur conservatif lineaire a un degre de liberte
% Author: Benjamin QU -- SY1924124 -- P2015
clc
clear
%% Question 1 - 1
% Solution reference
T0 = 3;
solution_ref = dsolve('D2q+(2*pi)^2*q=0','q(0)=1','Dq(0)=0');
disp(['Q1.1 - La solution reference est q=' char(solution_ref)])
%% Question 1 - 2
% Quantite E*
w0 = sym(2*pi);
E_etoile = ((diff(solution_ref))^2+(w0^2)*(solution_ref^2))/2;
disp(['Q1.2 - La quantite E* est E*=' char(simplify(E_etoile))])
%% Question 2 - 2 et 2 - 3
% Resolution avec schema d'EULER explicite -- Methode 2
q0 = 1;
dq0 = 0;
pas_de_temps = [0.1 0.05 0.01]; % Differents pas de temps -- delta t

t = cell(length(pas_de_temps),1);
for i = 1:length(pas_de_temps)
    t{i} = 0:pas_de_temps(i):3;
end

mat_amp = cell(length(t),1); % Matrice d'amplification
for i = 1:length(t)
    mat_amp{i} = [1 pas_de_temps(i);-(2*pi)^2*pas_de_temps(i) 1];
end

U_j = {[q0;dq0],[q0;dq0],[q0;dq0]};

q_exp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    q_exp{i} = zeros(1,length(t{i}));
end

dq_exp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    dq_exp{i} = zeros(1,length(t{i}));
end
```

```
for i = 1:length(t)
    for j = 1:length(t{i})
        U_j{i} = mat_amp{i}*U_j{i};
        q_exp{i}(j) = U_j{i}(1);
        dq_exp{i}(j) = U_j{i}(2);
    end
end
%% Question 2 - 4
% Calcul de E* associee au schema d'EULER explicite
E_etoile_exp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    E_etoile_exp{i} = zeros(length(t{i}),1);
end

for i = 1:length(t)
    for j = 1:length(t{i})
        E_etoile_exp{i}(j) =
((dq_exp{i}(j))^2+(2*pi)^2*(q_exp{i}(1))^2)/2;
    end
end
%% Question 2 - 5
% Valeurs propres de la matrice d'amplification
syms delta_t
VP_explicit = eig([1 delta_t;-(w0)^2*delta_t 1]);
disp(['Q2.5 - Les valeurs propres de la matrice d''amplification sont
' char(VP_explicit(1)) ' et ' char(VP_explicit(2))])
%% Question 3 - 1
% Resolution avec schema d'EULER implicite -- Methode 1
q_imp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    q_imp{i} = zeros(1,length(t{i}));
    q_imp{i}(1) = 1;
end

dq_imp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    dq_imp{i} = zeros(1,length(t{i}));
end

d2q_imp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    d2q_imp{i} = zeros(1,length(t{i}));
end
```

```
for i = 1:length(t)
    for j = 1:(length(t{i})-1)
        q_imp{i}(j+1) =
q_imp{i}(j)+pas_de_temps(i)*(dq_imp{i}(j)+pas_de_temps(i)*q_imp{i}(j+
1)*(-4*pi^2));
        d2q_imp{i}(j+1) = (-4*pi^2)*q_imp{i}(j+1);
        dq_imp{i}(j+1) = dq_imp{i}(j)+pas_de_temps(i)*d2q_imp{i}(j+1);
    end
end

% Plot figure
figure
for i = 1:length(t)
    hold on
    plot(t{i},q_imp{i})
end
title('Q3.1 EULER implicite')
legend(['delta t = ' num2str(pas_de_temps(1))],['delta t = '
num2str(pas_de_temps(2))],['delta t = ' num2str(pas_de_temps(3))])
%% Question 3 - 2
% Comparaison des trois solutions
figure
fplot(solution_ref,[0,T0])
hold on
plot(t{3},q_exp{3})
hold on
plot(t{3},q_imp{3})
title('Q3.2 Comparaison solutions')
legend('solution exacte','EULER explicite','EULER implicite')
%% Question 3 - 3
% L'amortissement numerique d'EULER implicite
pas_de_temps_2 = [0.3 0.2 0.04 0.03];
t_2 = cell(length(pas_de_temps_2),1);
for i = 1:length(pas_de_temps_2)
    t_2{i} = 0:pas_de_temps_2(i):3;
end

q_imp_2 = cell(length(t_2),1);
for i = 1:length(t_2)
    q_imp_2{i} = zeros(1,length(t_2{i}));
    q_imp_2{i}(1) = 1;
end

dq_imp_2 = cell(length(t_2),1);
```

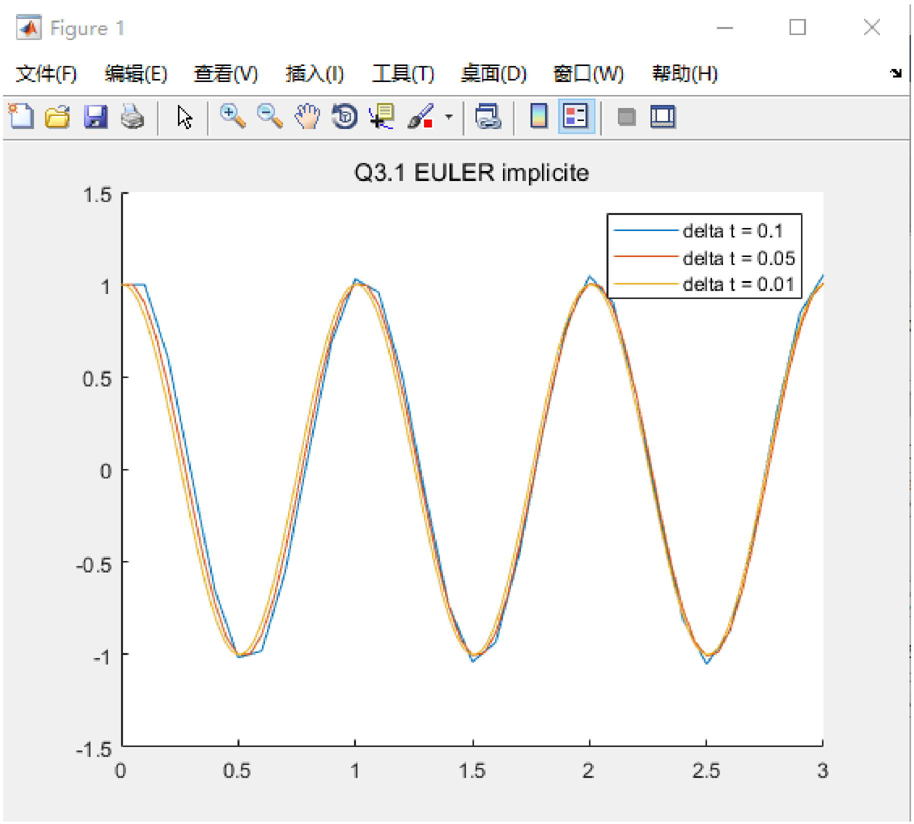
```
for i = 1:length(t_2)
    dq_imp_2{i} = zeros(1,length(t_2{i}));
end

d2q_imp_2 = cell(length(t_2),1);
for i = 1:length(t_2)
    d2q_imp_2{i} = zeros(1,length(t_2{i}));
end

for i = 1:length(t_2)
    for j = 1:(length(t_2{i})-1)
        q_imp_2{i}(j+1) =
q_imp_2{i}(j)+pas_de_temps_2(i)*(dq_imp_2{i}(j)+pas_de_temps_2(i)*q_i
mp_2{i}(j+1)*(-4*pi^2));
        d2q_imp_2{i}(j+1) = (-4*pi^2)*q_imp_2{i}(j+1);
        dq_imp_2{i}(j+1) =
dq_imp_2{i}(j)+pas_de_temps_2(i)*d2q_imp_2{i}(j+1);
    end
end

% Plot figure
figure
for i = 1:length(t_2)
    hold on
    plot(t_2{i},q_imp_2{i})
end
for i = 1:length(t)
    hold on
    plot(t{i},q_imp{i})
end
title('Q3.3 EULER implicite avec differents pas de temps')
legend(['delta t = ' num2str(pas_de_temps_2(1))],['delta t = '
num2str(pas_de_temps_2(2))],['delta t = '
num2str(pas_de_temps_2(3))],['delta t = '
num2str(pas_de_temps_2(4))],['delta t = '
num2str(pas_de_temps(1))],['delta t = '
num2str(pas_de_temps(2))],['delta t = ' num2str(pas_de_temps(3))])
%% Question 3 - 4
% Calcul de E* associee au schema d'EULER implicite
E_etoile_imp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    E_etoile_imp{i} = zeros(length(t{i}),1);
end
```

```
for i = 1:length(t)
    for j = 1:length(t{i})
        E_etoile_imp{i}(j) =
((dq_imp{i}(j))^2+(2*pi)^2*(q_imp{i}(1))^2)/2;
    end
end

% Plot figure
for i = 1:length(t)
    figure
    fplot(E_etoile,[0,T0])
    hold on
    plot(t{i},E_etoile_exp{i})
    hold on
    plot(t{i},E_etoile_imp{i})
    title(['Q3.4 E* avec pas de temps = ' num2str(pas_de_temps(i))])
    legend('E* exact','E* explicit','E* implicit')
end
%% Question 3 - 5
% Valeurs propres de la matrice d'amplification
VP_implicit = eig((1/(1+w0^2*delta_t^2))*[1 delta_t;-(w0)^2*delta_t
1]);
disp(['Q3.5 - Les valeurs propres de la matrice d''amplification sont
' char(VP_implicit(1)) ' et ' char(VP_implicit(2))])
%% Question 4 - 2
A = [0,1;-(2*pi)^2,0]; % Matrice de transformation (au premier order)
Q = [q0;dq0];
q_RK = zeros(1,length(t{3}));
dq_RK = zeros(1,length(t{3}));
for i = 1:length(t{3})
    q_RK(i) = Q(1);
    dq_RK(i) = Q(2);
    k1 = A*Q;
    k2 = A*(Q+k1*pas_de_temps(3)/2);
    k3 = A*(Q+k2*pas_de_temps(3)/2);
    k4 = A*(Q+k3*pas_de_temps(3));
    K = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    Q = Q+K*pas_de_temps(3);
end
%% Question 4 - 3
% Comparaison des solutions
figure
fplot(solution_ref,[0,T0])
hold on
```

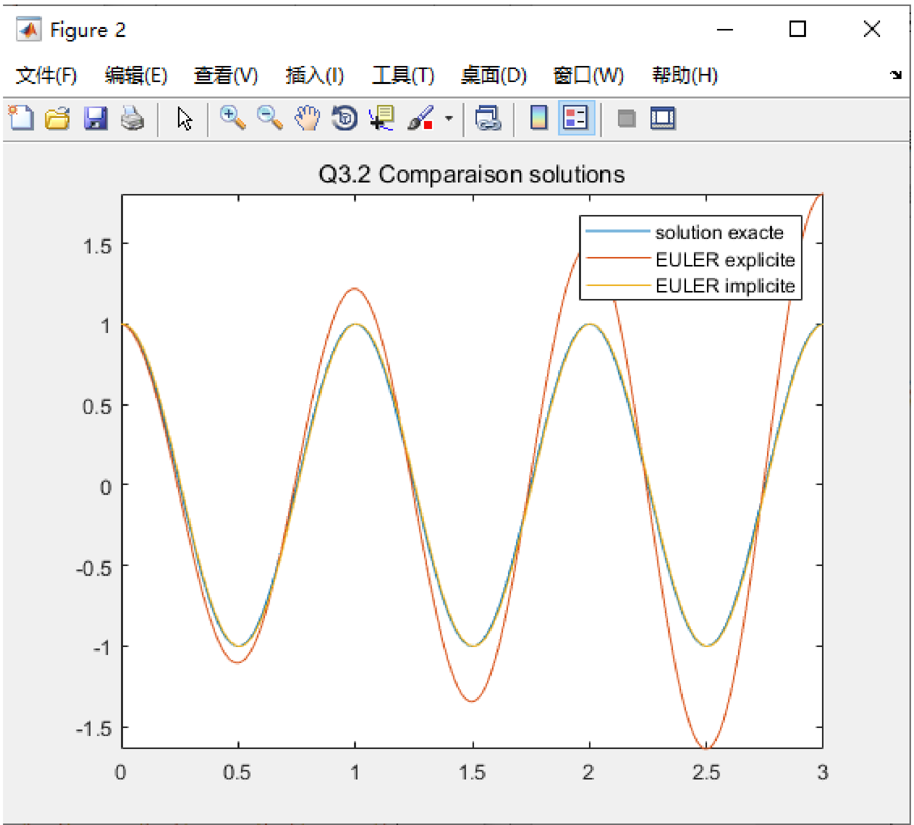
```
plot(t{3},q_exp{3})
hold on
plot(t{3},q_imp{3})
hold on
plot(t{3},q_RK)
title('Q4.3 RUNGE KUTTA')
legend('solution exacte','EULER explicite','EULER implicite','RUNGE
KUTTA')
%% Question 4 - 4
% E* associee au schema de RUNGE KUTTA
E_etoile_RK = zeros(1,length(t{3}));
for i = 1:length(q_RK)
   E_etoile_RK(i) = ((dq_RK(i))^2+(2*pi)^2*(q_RK(1))^2)/2;
end

% Plot figure
figure
fplot(E_etoile,[0,T0])
hold on
plot(t{3},E_etoile_exp{3})
hold on
plot(t{3},E_etoile_imp{3})
hold on
plot(t{3},E_etoile_RK)
title('Q4.4 E* avec pas de temps = 0.01s')
legend('E* exact','E* explicit','E* implicit','E* RK')
```

Partie 3 – Sorties graphiques

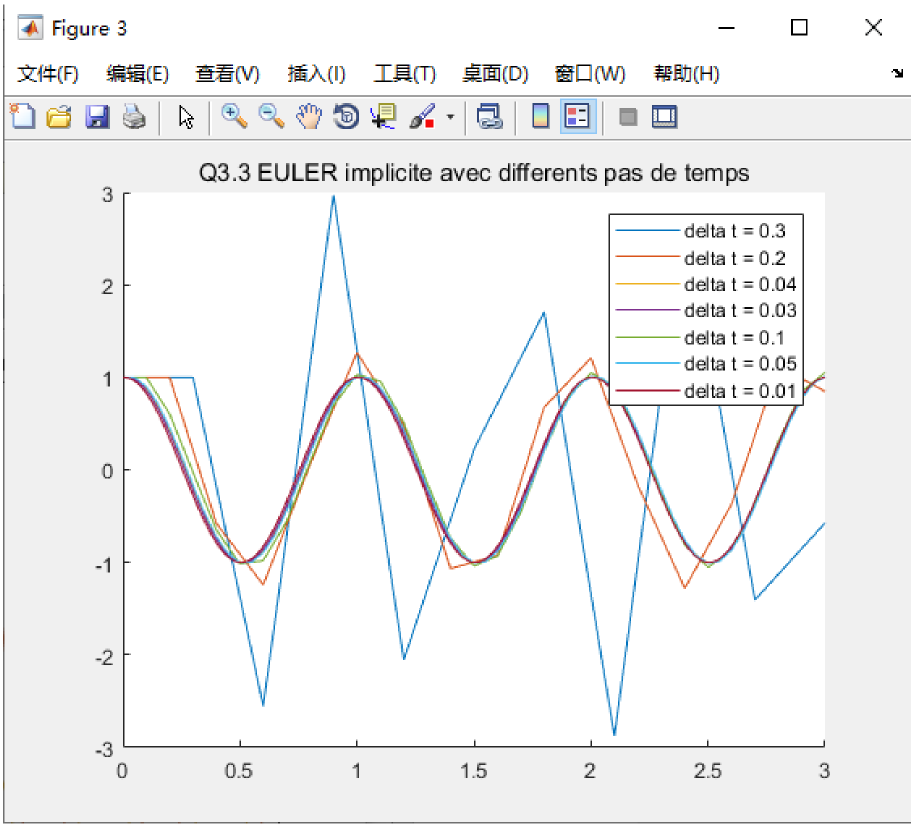
Question 3.1



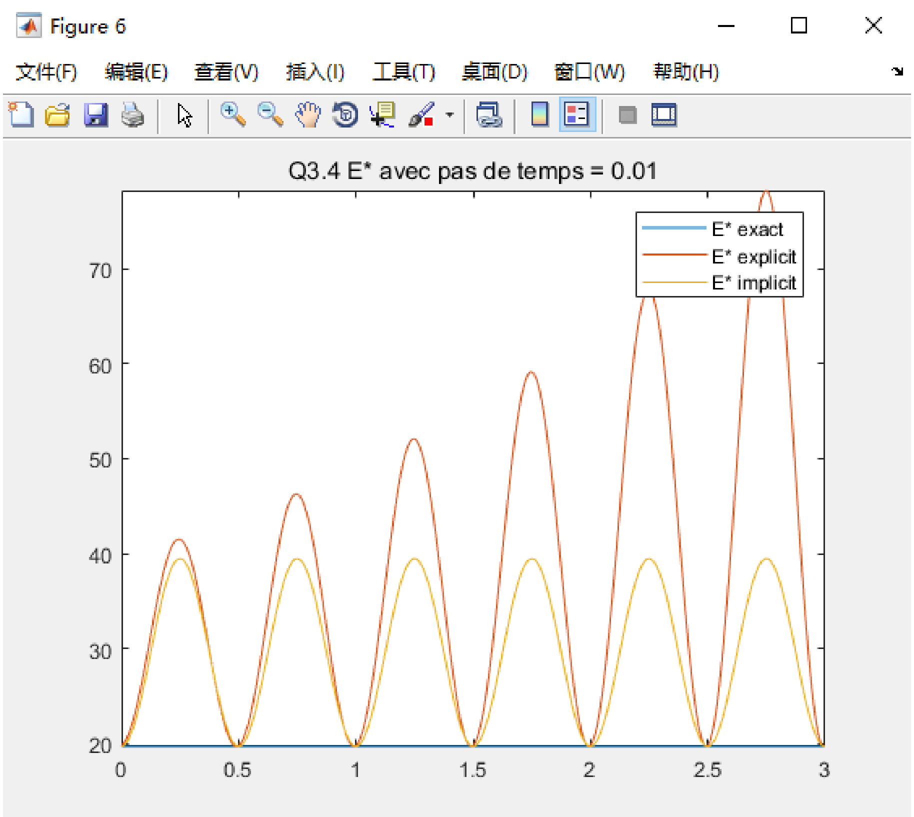
Question 3.2



Question 3.3



Question 3.4



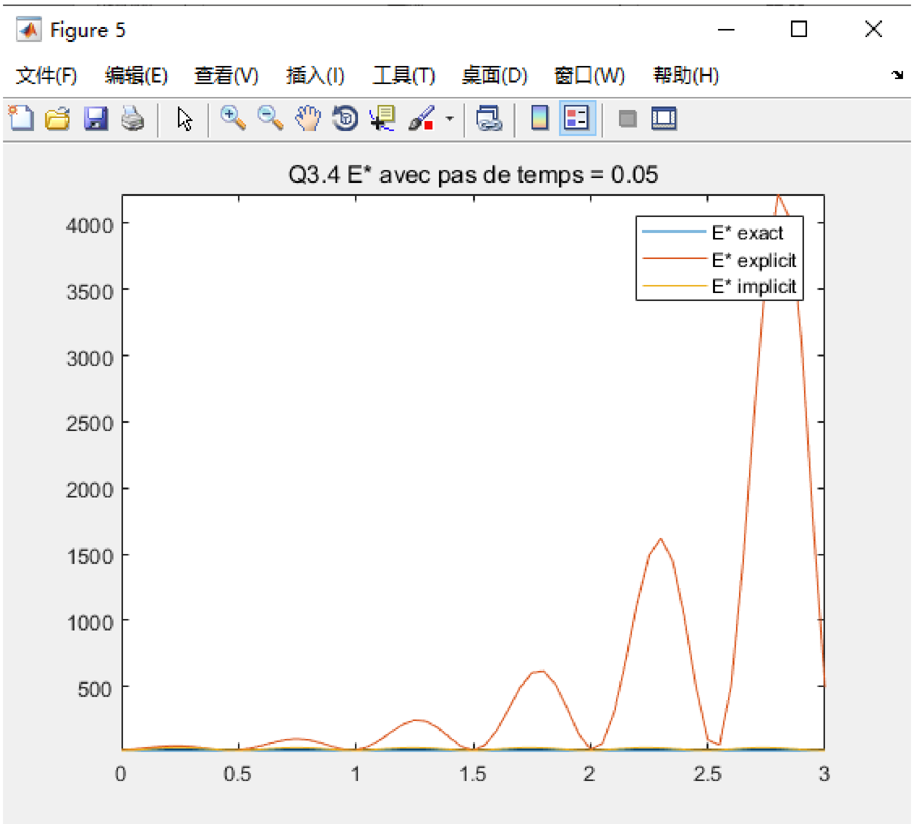


Figure 5
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
Q3.4 E* avec pas de temps = 0.05
E* exact
E* explicit
E* implicit
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

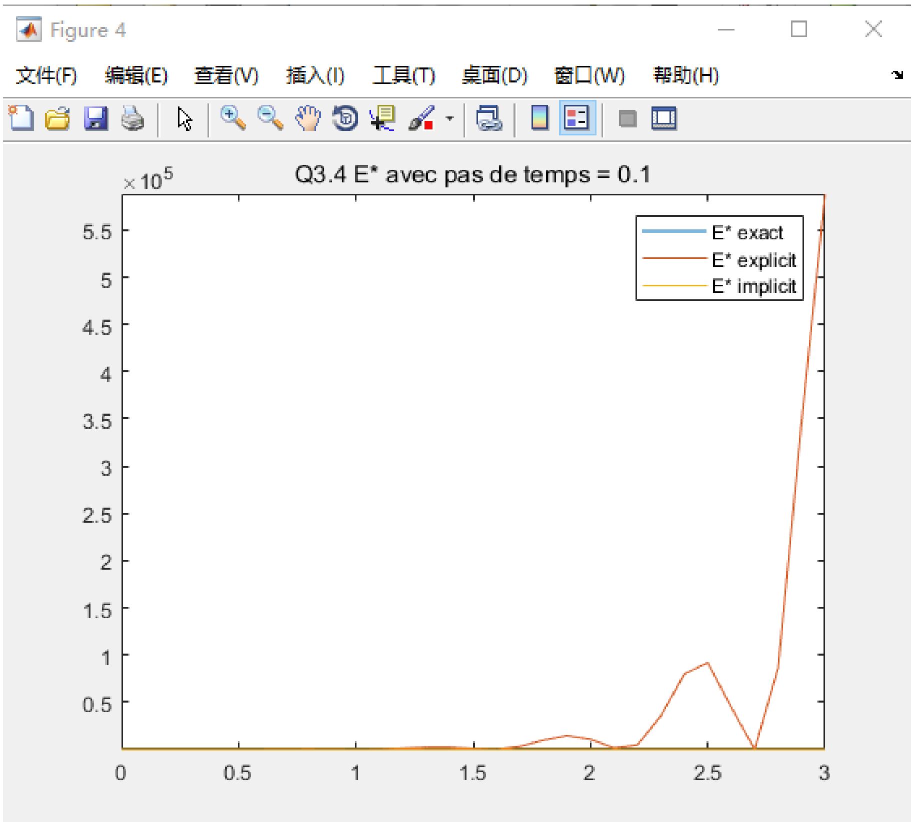
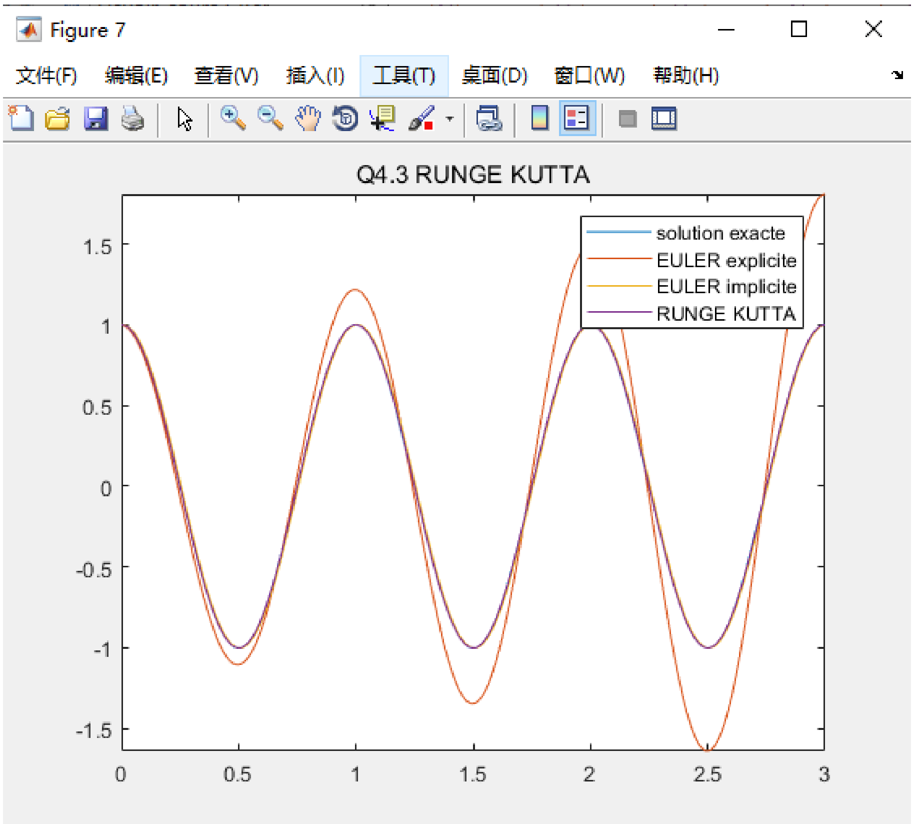


Figure 4
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
Q3.4 E* avec pas de temps = 0.1
× 10^5
E* exact
E* explicit
E* implicit
5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Question 4.3



Question 4.4