

MÉCANIQUE NUMÉRIQUE

4^e devoir du cours

Benjamin QU – SY1924124

* Les codes sont programmés en MATLAB et mis dans la *fin de chaque partie*.

* Les sorties graphiques sont mises *après les codes de chaque partie*.

TABLE DE MATIÈRES

Partie 1 – Exercice : Étude d’un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté	2
Codes MATLAB	3
Sorties graphiques	8
Partie 2 – Exercice : Étude d’un double pendule avec l’hypothèse des petits mouvements	14
Codes MATLAB	16
Sorties graphiques	21
Partie 3 – Exercice : Oscillateur non linéaire à un degré de liberté.....	23
Codes MATLAB	24
Sorties graphiques	27

Partie 1 – Exercice : Étude d'un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté

Question 1.1) Résolution avec un schéma d'EULER explicite

1.1.a) Selon la sortie graphique 1.1.a), quand $\frac{2\varepsilon}{\omega_0} < \Delta t$, la solution diverge.

1.1.b) Selon la sortie graphique 1.1.b), quand $\Delta t = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$, la solution est quasi-instable.

1.1.c) Selon la sortie graphique 1.1.c), quand $\Delta t = 0.8 \times \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$, la solution converge lentement.

1.1.d) Pour étudier la précision, il faut regarder les décalages avec la solution exacte par rapport aux extrêmes.

Selon la sortie graphique 1.1.d), on peut voir que quand $\Delta t = 0.01 \times \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$, la solution est bien précise.

C'est-à-dire qu'à partir de $\frac{\Delta t}{\frac{2\varepsilon}{\omega_0}} = 0.01$, la solution présente une précision suffisante.

Question 1.2) Résolution avec un schéma d'EULER implicite

La matrice d'amplification est $\begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ \omega_0^2 \Delta t & 1 + 2\varepsilon \omega_0 \Delta t \end{bmatrix}^{-1}$.

Selon la sortie graphique 1.2), les modules des valeurs propres de la matrice d'amplification sont toujours inférieurs à 1, donc le pas de temps critique sera 0.

Question 1.3) Résolution avec un schéma de RUNGE KUTTA

1.3.a) Selon les sorties graphiques 1.3.a), la solution diverge quand $h = 1.04$, elle est stable quand $h = 0.96$ et $h = 0.04$. Et la solution est plus précise pour $h = 0.04$ que pour $h = 0.96$.

On peut conclure préliminairement que la solution est instable quand la valeur de h est supérieure à une valeur critique comprise entre 0.96 et 1.04, et est stable quand h est inférieure à 1, et que plus h est petit, plus la solution est précise.

1.3.b) On peut voir dans les sorties graphiques 1.3.b), quand $h = 1.013$, la solution converge, quand $h = 1.014$, la solution diverge. Donc, on prend $h_c = 1.0135$ où $1.013 < h_c < 1.014$ avec $|1.014 - 1.013| \leq 0.001$.

Codes MATLAB

```
% Exercice - Etude d'un oscillateur lineaire amorti a un degre de
3iffére
% Author: Benjamin QU - SY1924124 - P2015
clc
clear
set(0,'defaultfigurecolor','w')
%% 1.1) Resolution avec un schema d'EULER explicite
% Solution reference
T0 = 1 ;
w0 = 2*pi ;
sym_w0 = sym(2*pi) ;
syms sym_dt ;
syms sym_epsilon ;
epsilon = 0.02 ;
x0 = 0.01 ;
dx0 = 0 ;
solution_ref =
dsolve('D2x+4*0.02*pi*Dx+(2*pi)^2*x=0','x(0)=0.01','Dx(0)=0') ;

% fplot(solution_ref,[0,10*T0]) % Plot figure
% title('Oscillateur lineaire amorti')
%% 1.1.a) b) c)
dt = [4*epsilon/w0,2*epsilon/w0,0.8*2*epsilon/w0] ; % 3ifférents pas
de temps - delta t

time = cell(length(dt),1);
for i = 1:length(dt)
    time{i} = 0:dt(i):10*T0;
end

mat_amp_exp = cell(length(time),1); % Matrice d'amplification
for i = 1:length(time)
    mat_amp_exp{i} = [1,dt(i);-w0^2*dt(i),1-2*epsilon*w0*dt(i)];
end

X = {[x0;dx0],[x0;dx0],[x0;dx0]};

x_exp = cell(length(time),1);
for i = 1:length(time)
    x_exp{i} = zeros(1,length(time{i}));
end

dx_exp = cell(length(time),1);
```

```
for i = 1:length(time)
    dx_exp{i} = zeros(1,length(time{i}));
end

for i = 1:length(time)
    for j = 1:length(time{i})
        x_exp{i}(j) = X{i}(1);
        dx_exp{i}(j) = X{i}(2);
        X{i} = mat_amp_exp{i}*X{i} ;
    end
end

figure % 1.1.a)
fplot(solution_ref, [0,10*T0])
hold on
plot(time{1},x_exp{1})
title('1.1.a')
legend('solution exacte','\Delta t > 2\epsilon/\omega_0')

figure % 1.1.b)
fplot(solution_ref, [0,10*T0])
hold on
plot(time{2},x_exp{2})
title('1.1.b')
legend('solution exacte','\Delta t = 2\epsilon/\omega_0')

figure % 1.1.c)
fplot(solution_ref, [0,10*T0])
hold on
plot(time{3},x_exp{3})
title('1.1.c')
legend('solution exacte','\Delta t = 0.8\times 2\epsilon/\omega_0')

%% 1.1.d)
dt2 = [0.1*2*\epsilon/w_0,0.05*2*\epsilon/w_0,0.01*2*\epsilon/w_0] ; %
4différents pas de temps - delta t

time2 = cell(length(dt2),1);
for i = 1:length(dt2)
    time2{i} = 0:dt2(i):10*T0;
end

mat_amp_exp2 = cell(length(time2),1); % Matrice d'amplification
for i = 1:length(time2)
```

```

    mat_amp_exp2{i} = [1,dt2(i);-w0^2*dt2(i),1-2*epsilon*w0*dt2(i)];
end

X2 = {[x0;dx0],[x0;dx0],[x0;dx0]};

x_exp2 = cell(length(time2),1);
for i = 1:length(time2)
    x_exp2{i} = zeros(1,length(time2{i}));
end

dx_exp2 = cell(length(time2),1);
for i = 1:length(time2)
    dx_exp2{i} = zeros(1,length(time2{i}));
end

for i = 1:length(time2)
    for j = 1:length(time2{i})
        x_exp2{i}(j) = X2{i}(1);
        dx_exp2{i}(j) = X2{i}(2);
        X2{i} = mat_amp_exp2{i}*X2{i} ;
    end
end

figure % 1.1.d)
fplot(solution_ref,[0,10*T0])
for i = 1:length(time2)
    hold on
    plot(time2{i},x_exp2{i})
end
title('1.1.d')
legend('solution exacte','\Deltat =
0.1\times2\epsilon/\omega0','\Deltat =
0.05\times2\epsilon/\omega0','\Deltat = 0.01\times2\epsilon/\omega0')
%% 1.2) Resolution avec un schéma d'EULER implicite
dts = 0:0.05:1;
mat_amp_imp = cell(length(dts),1);
VPs = zeros(2,length(dts));
for i = 1:length(dts)
    mat_amp_imp{i} = inv([1,-
dts(i);w0^2*dts(i),1+2*epsilon*w0*dts(i)]);
    VP = eig(mat_amp_imp{i});
    VPs(1,i) = abs(VP(1));
    VPs(2,i) = abs(VP(2));
end

```

```

figure
plot(dts,VPs(1,⊗))
hold on
plot(dts,VPs(2,⊗))
title('1.2) Modules des valeurs propres pour \Deltat entre 0s et 1s')
legend('valeur propre 1','valeur propre 2')
%% 1.3) Resolution avec un schema de RUNGE KUTTA
MT = [0,1 ; -w0^2, -2*epsilon*w0] ; % Matrice de transformation
Q = {[x0 ; dx0] ; [x0 ; dx0] ; [x0 ; dx0]} ;
dt_RK = [0.04*2*sqrt(2)/w0, 0.96*2*sqrt(2)/w0, 1.04*2*sqrt(2)/w0];

time_RK = cell(3,1);
for i = 1:length(time_RK)
    time_RK{i} = 0:dt_RK(i):100*T0;
end

x_RK = cell(3,1);
dx_RK = cell(3,1);
for i = 1:length(dt_RK)
    x_RK{i} = zeros(1,length(time_RK{i}));
    dx_RK{i} = zeros(1,length(time_RK{i}));
end

for i = 1:length(dt_RK)
    for j = 1:length(time_RK{i})
        x_RK{i}(j) = Q{i}(1);
        dx_RK{i}(j) = Q{i}(2);
        k1 = MT*Q{i};
        k2 = MT*(Q{i}+k1*dt_RK(i)/2);
        k3 = MT*(Q{i}+k2*dt_RK(i)/2);
        k4 = MT*(Q{i}+k3*dt_RK(i));
        K = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
        Q{i} = Q{i}+K*dt_RK(i);
    end
end
%% 1.3.a)
figure
fplot(solution_ref, [0,100*T0])
hold on
plot(time_RK{1},x_RK{1})
title('1.3.a)')
legend('solution exacte','RK \Deltat = 0.04\times2\surd2/\omega_{0}')

figure

```

```

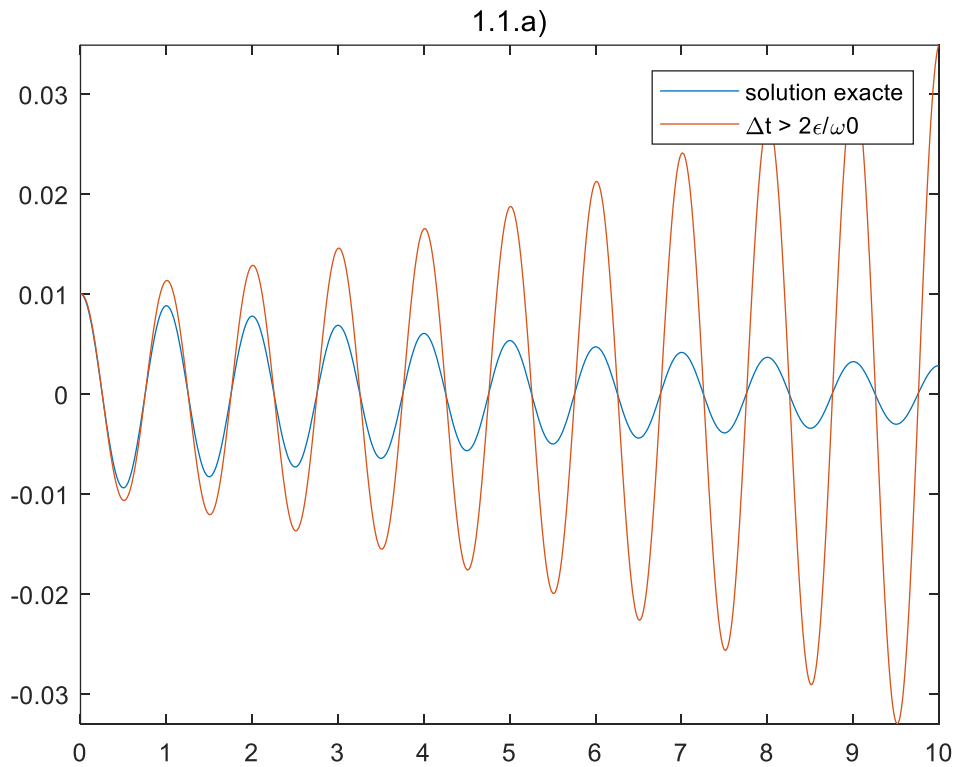
fplot(solution_ref, [0,100*T0])
hold on
plot(time_RK{2},x_RK{2})
title('1.3.a')
legend('solution exacte','RK \Deltat = 0.96\times2\surd2/\omega_{0}')

figure
fplot(solution_ref, [0,100*T0])
hold on
plot(time_RK{3},x_RK{3})
title('1.3.a')
legend('solution exacte','RK \Deltat = 1.04\times2\surd2/\omega_{0}')
%% 1.3.b)
hc = 1.0135;
dte = hc*2*sqrt(2)/w0;
timec = 0:dte:100*T0;
xc = zeros(1,length(timec));
dxc = zeros(1,length(timec));
Qc = [x0;dx0];
for j = 1:length(timec)
    xc(j) = Qc(1);
    dxc(j) = Qc(2);
    k1 = MT*Qc;
    k2 = MT*(Qc+k1*dte/2);
    k3 = MT*(Qc+k2*dte/2);
    k4 = MT*(Qc+k3*dte);
    K = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    Qc = Qc+K*dte;
end
figure
fplot(solution_ref, [0,100*T0])
hold on
plot(timec,xc)
title('1.3.b')
legend('solution exacte',['RK \Deltat = ' num2str(hc)
'\times2\surd2/\omega_{0}'])

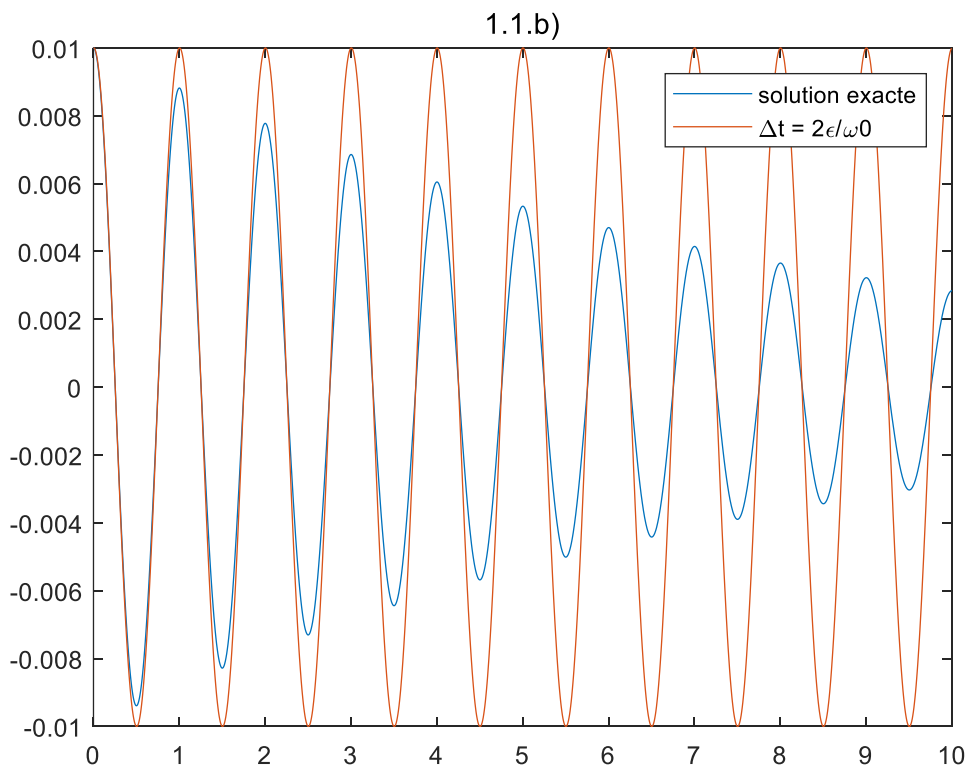
```

Sorties graphiques

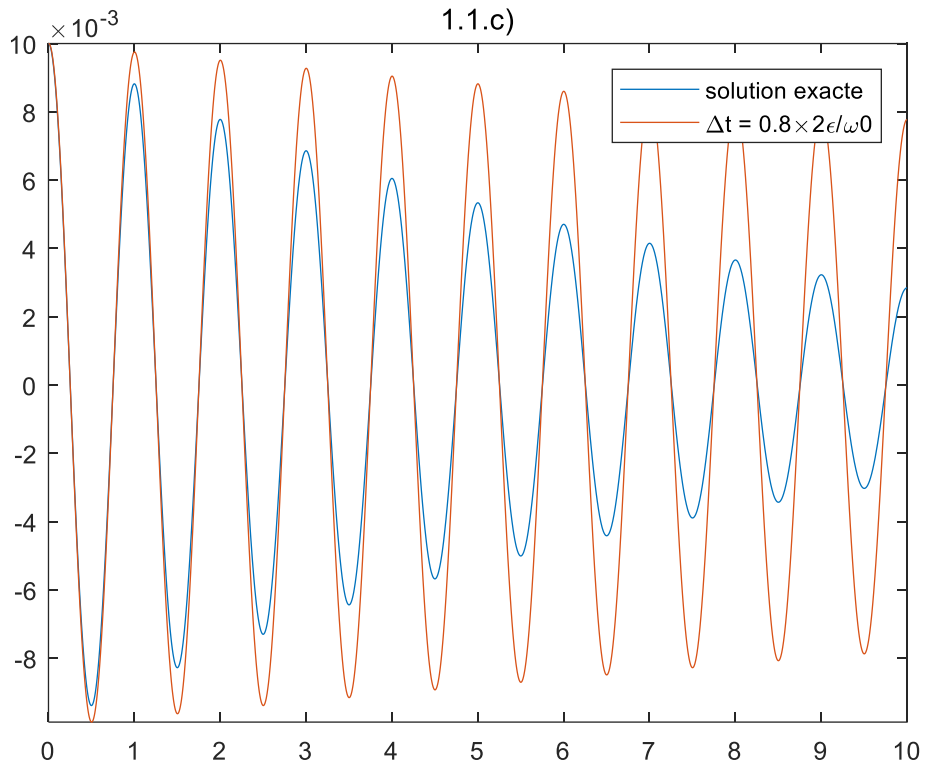
Question 1.1.a)



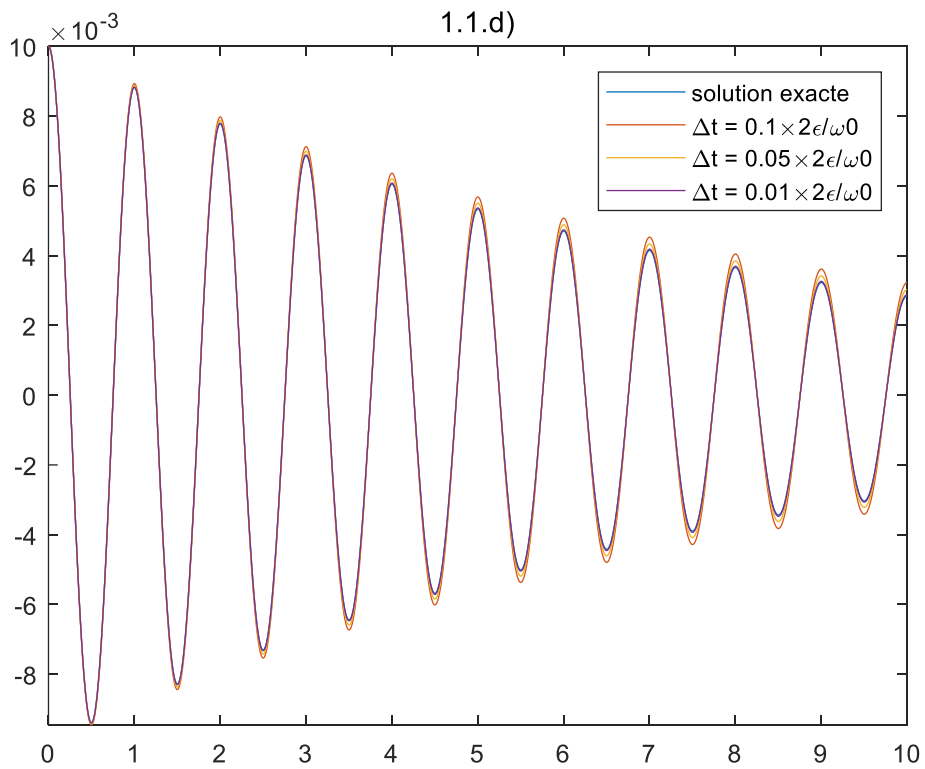
Question 1.1.b)



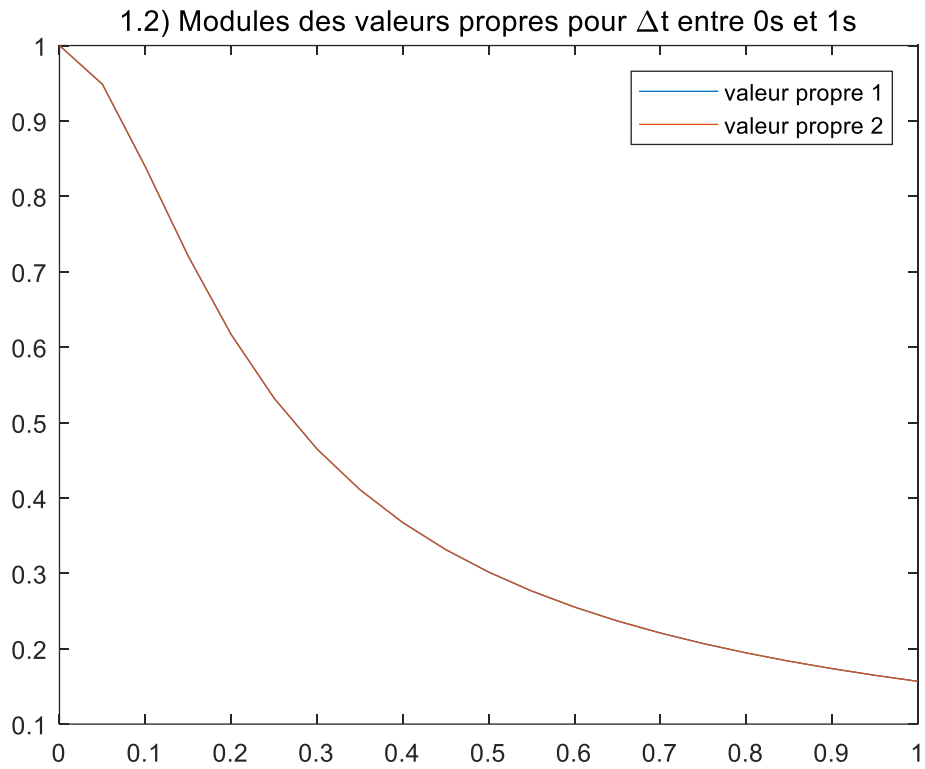
Question 1.1.c)



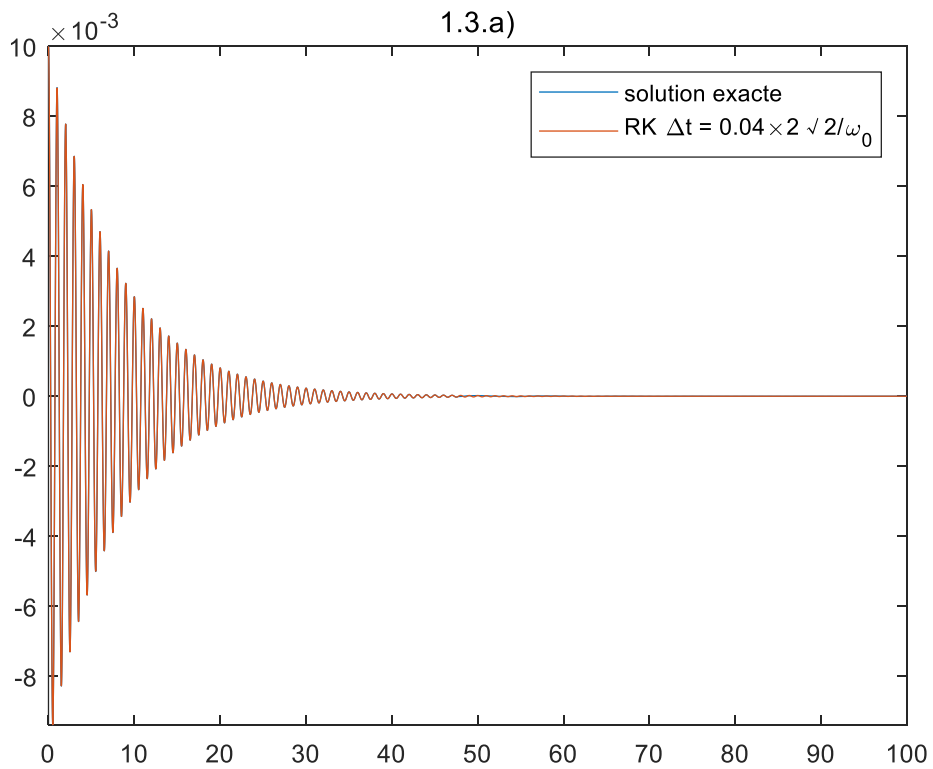
Question 1.1.d)

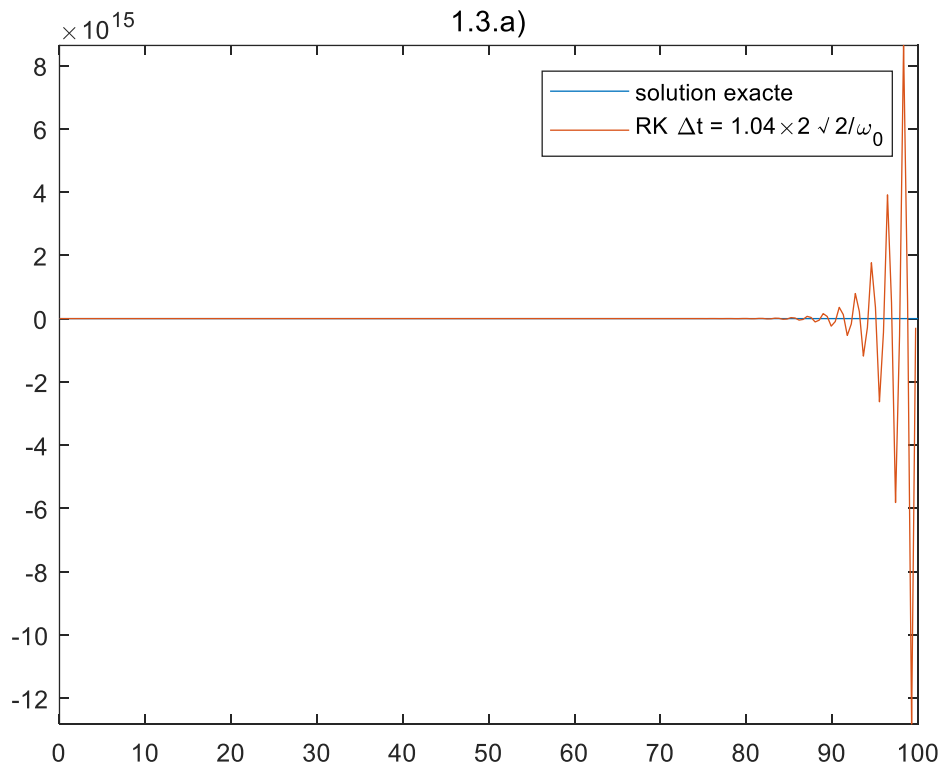
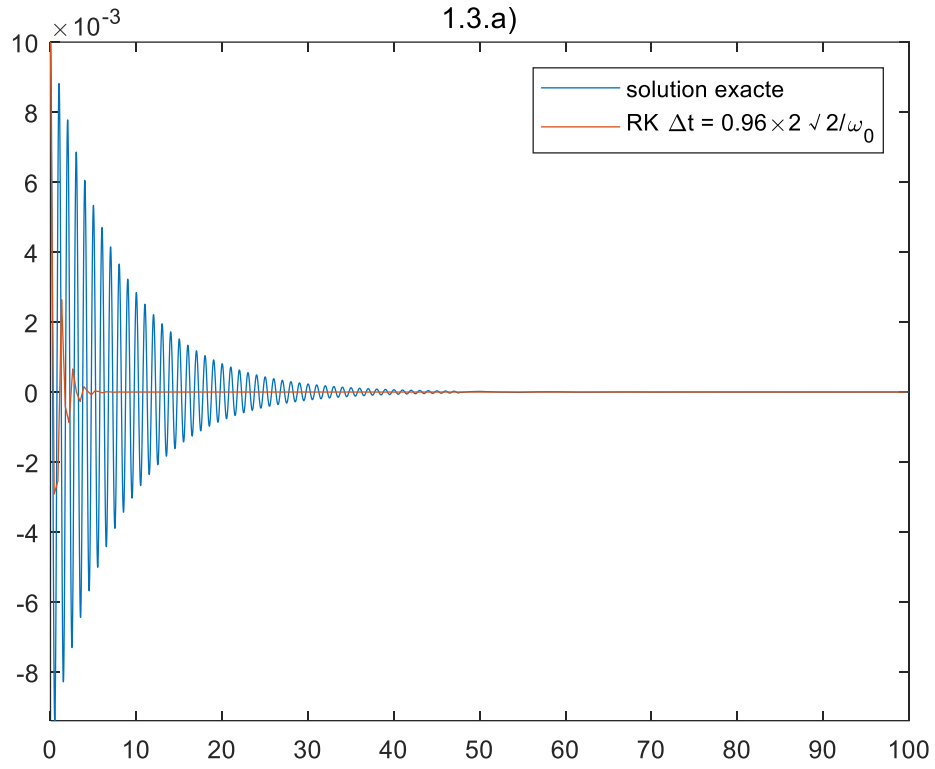


Question 1.2)

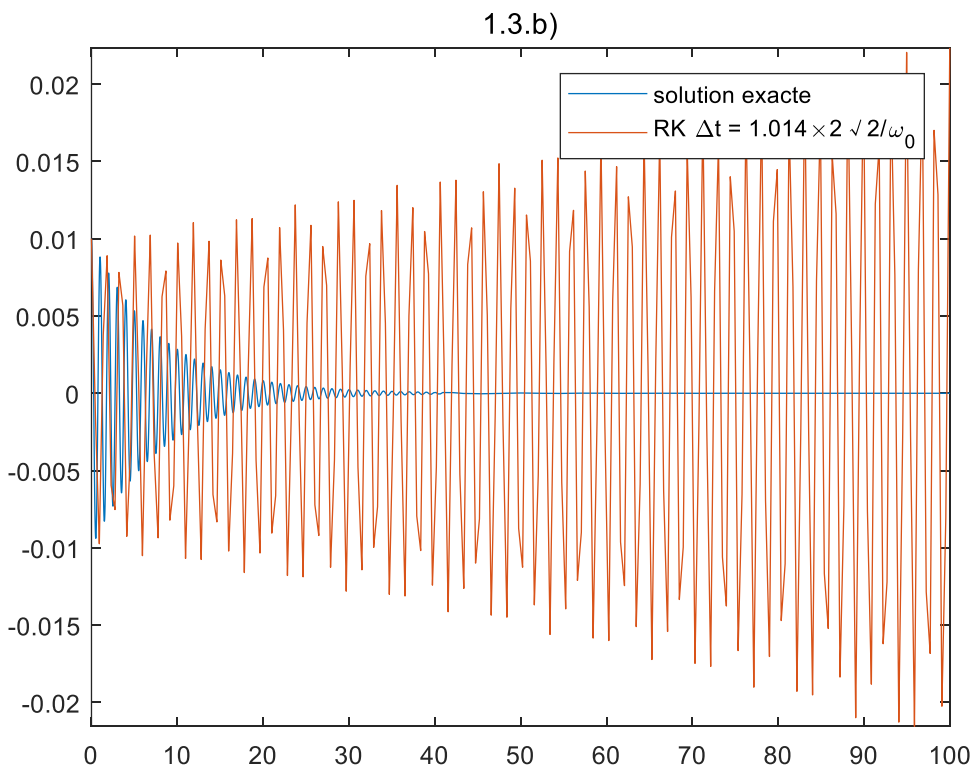
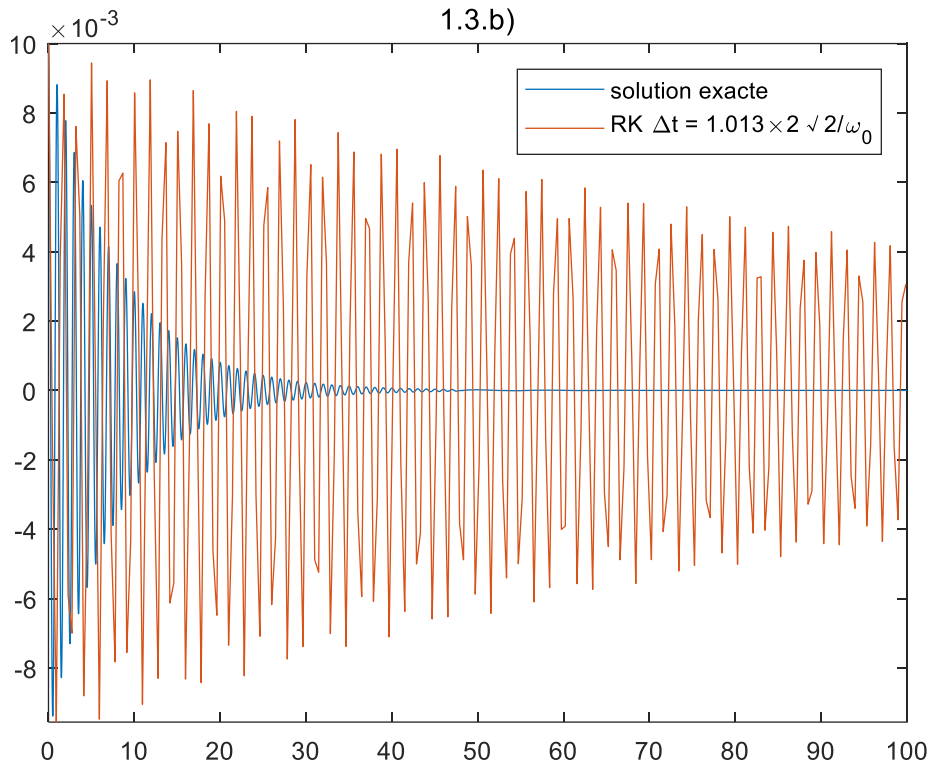


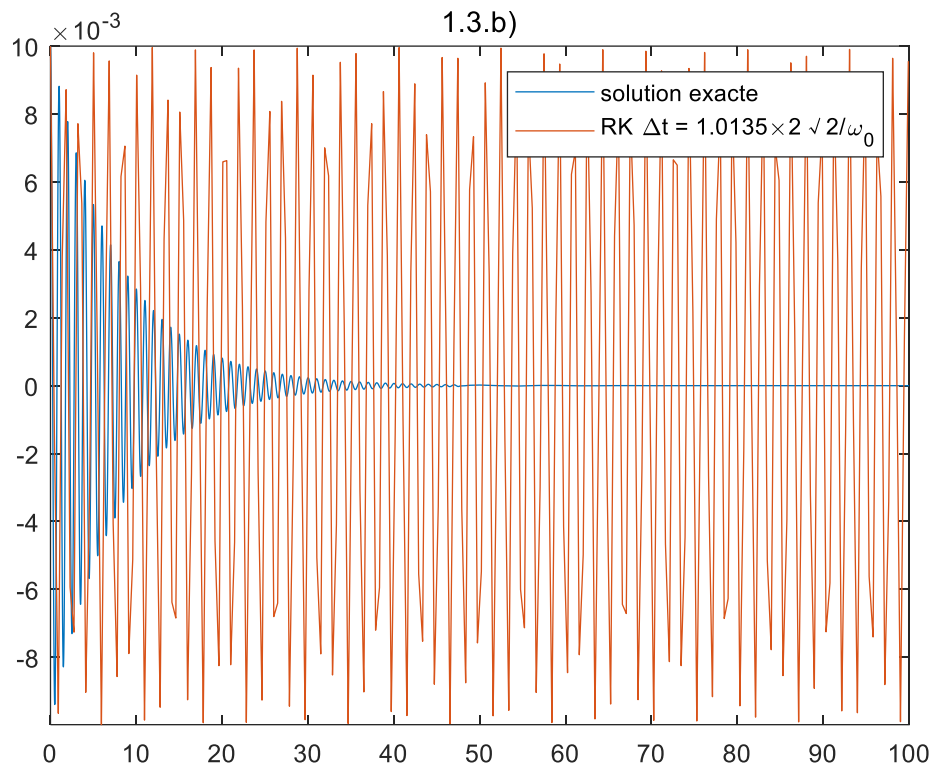
Question 1.3.a)





Question 1.3.b)





Partie 2 – Exercice : Étude d'un double pendule avec l'hypothèse des petits mouvements

Question 1. Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

1.1) À partir des trois relations :

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = F_0 \sin \omega t \begin{bmatrix} a \\ a/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{n+1} \quad (2)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_n + \Delta t \gamma \ddot{q}_{n+1} \quad (3)$$

Avec $q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$

On obtient donc une relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 + 2\Delta t^2 \beta g/a & -\Delta t^2 \beta g/a & 0 & 0 \\ -2\Delta t^2 \beta g/a & 1 + 2\Delta t^2 \beta g/a & 0 & 0 \\ 2\Delta t \gamma g/a & -\Delta t \gamma g/a & 1 & 0 \\ -2\Delta t \gamma g/a & 2\Delta t \gamma g/a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1,n+1} \\ \theta_{2,n+1} \\ \dot{\theta}_{1,n+1} \\ \dot{\theta}_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\Delta t^2 (0.5 - \beta) g/a & \Delta t^2 (0.5 - \beta) g/a & \Delta t & 0 \\ 2\Delta t^2 (0.5 - \beta) g/a & 1 - 2\Delta t^2 (0.5 - \beta) g/a & 0 & \Delta t \\ -2\Delta t (1 - \gamma) g/a & \Delta t (1 - \gamma) g/a & 1 & 0 \\ 2\Delta t (1 - \gamma) g/a & -2\Delta t (1 - \gamma) g/a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1,n} \\ \theta_{2,n} \\ \dot{\theta}_{1,n} \\ \dot{\theta}_{2,n} \end{bmatrix}$$

Alors la matrice d'amplification est

$$\begin{bmatrix} 1 + 2\Delta t^2 \beta g/a & -\Delta t^2 \beta g/a & 0 & 0 \\ -2\Delta t^2 \beta g/a & 1 + 2\Delta t^2 \beta g/a & 0 & 0 \\ 2\Delta t \gamma g/a & -\Delta t \gamma g/a & 1 & 0 \\ -2\Delta t \gamma g/a & 2\Delta t \gamma g/a & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 - 2\Delta t^2 (0.5 - \beta) g/a & \Delta t^2 (0.5 - \beta) g/a & \Delta t & 0 \\ 2\Delta t^2 (0.5 - \beta) g/a & 1 - 2\Delta t^2 (0.5 - \beta) g/a & 0 & \Delta t \\ -2\Delta t (1 - \gamma) g/a & \Delta t (1 - \gamma) g/a & 1 & 0 \\ 2\Delta t (1 - \gamma) g/a & -2\Delta t (1 - \gamma) g/a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Qui est, pour un schéma de NEWMARK explicite :

$$\begin{bmatrix} 1 - \Delta t^2 \frac{g}{a} & \Delta t^2 \frac{g}{2a} & \Delta t & 0 \\ \Delta t^2 \frac{g}{a} & 1 - \Delta t^2 \frac{g}{a} & 0 & \Delta t \\ -\frac{\Delta t g (-3g\Delta t^2 + 4a)}{2a^2} & \frac{\Delta t g (-g\Delta t^2 + a)}{a^2} & 1 - \Delta t^2 \frac{g}{a} & \Delta t^2 \frac{g}{2a} \\ \frac{2\Delta t g (-g\Delta t^2 + a)}{a^2} & -\frac{\Delta t g (-3g\Delta t^2 + 4a)}{2a^2} & \Delta t^2 \frac{g}{a} & 1 - \Delta t^2 \frac{g}{a} \end{bmatrix}$$

1.2) Selon la sortie graphique 1.2), on obtient que le pas de temps critique $\Delta t_c \approx 0.24$ s.

1.3) On sait que $q_0 = \begin{bmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\dot{q}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1,0} \\ \dot{\theta}_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.31519275 \\ -1.85996342 \end{bmatrix}$, et pour \ddot{q}_0 on a :

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{1,0} \\ \ddot{\theta}_{2,0} \end{bmatrix} + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \end{bmatrix} = F_0 \sin \omega t_0 \begin{bmatrix} a \\ a/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_0 = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{1,0} \\ \ddot{\theta}_{2,0} \end{bmatrix} = -\frac{g}{a} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.4) Les trois relations du schéma de NEWMARK explicite :

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + 0.5 \Delta t^2 \ddot{q}_n$$

$$\ddot{q}_n = -\frac{g}{a} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} q_n + \frac{F_0}{ma} \sin(\omega n \Delta t) \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{2}/2 \\ -2 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_n + \Delta t \gamma \ddot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + 0.5 \Delta t \ddot{q}_n + 0.5 \Delta t \ddot{q}_{n+1}$$

1.5) La sortie graphique de la résolution est présentée après.

1.6) À $t = 0$ s : $q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.32 \\ -1.86 \end{pmatrix}$, $\ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

À $t = \Delta t$: $q(t) = \begin{pmatrix} -0.0263 \\ -0.0372 \end{pmatrix}$, $\dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.28 \\ -1.87 \end{pmatrix}$, $\ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} 3.54 \\ -1.04 \end{pmatrix}$;

À $t = 2\Delta t$: $q(t) = \begin{pmatrix} -0.0512 \\ -0.0748 \end{pmatrix}$, $\dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.17 \\ -1.90 \end{pmatrix}$, $\ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} 6.97 \\ -1.99 \end{pmatrix}$;

À $t = 0.5$ s: $q(t) = \begin{pmatrix} 0.581 \\ -0.278 \end{pmatrix}$, $\dot{q}(t) = \begin{pmatrix} 0.249 \\ 4.99 \end{pmatrix}$, $\ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} -28.2 \\ 33.7 \end{pmatrix}$.

Question 2. Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite

2.1) La matrice d'amplification est, pour un schéma de NEWMARK implicite :

$$\begin{bmatrix} \frac{8a^2 - \Delta t^4 g^2}{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2} & \frac{4a\Delta t^2 g}{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2} & \frac{4a\Delta t(\Delta t^2 g + 2a)}{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2} & \frac{2a\Delta t^3 g}{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2} \\ \frac{8a\Delta t^2 g}{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2} & \frac{8a^2 - \Delta t^4 g^2}{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2} & \frac{4a\Delta t^3 g}{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2} & \frac{4a\Delta t(\Delta t^2 g + 2a)}{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2} \\ \frac{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2}{-4\Delta t g(\Delta t^2 g + 4a)} & \frac{8a\Delta t g}{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2} & \frac{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2}{8a^2 - \Delta t^4 g^2} & \frac{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2}{4a\Delta t^2 g} \\ \frac{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2}{16a\Delta t g} & \frac{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2}{-4\Delta t g(\Delta t^2 g + 4a)} & \frac{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2}{8a\Delta t^2 g} & \frac{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2}{8a^2 - \Delta t^4 g^2} \\ \frac{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2}{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2} & \frac{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2}{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2} & \frac{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2}{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2} & \frac{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2}{8a^2 + 8a\Delta t^2 g + \Delta t^4 g^2} \end{bmatrix}$$

2.2) Selon la sortie graphique 2.2), on voit que le module de la plus grande valeur propre de cette matrice est toujours égal à 1, on peut conclure donc que la solution avec un schéma de NEWMARK implicite est toujours stable.

2.3) Même que dans la question 1.3) : $q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{q}_0 = \begin{pmatrix} -1.31519275 \\ -1.85996342 \end{pmatrix}$, et $\ddot{q}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.4) Les trois relations du schéma de NEWMARK implicite :

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + 0.25\Delta t^2 \ddot{q}_n + 0.25\Delta t^2 \ddot{q}_{n+1}$$

$$\ddot{q}_n = -\frac{g}{a} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} q_n + \frac{F_0}{ma} \sin(\omega n \Delta t) \begin{vmatrix} 2 - \sqrt{2}/2 \\ -2 + \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{q}_n + \Delta t \gamma \ddot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + 0.5\Delta t \ddot{q}_n + 0.5\Delta t \ddot{q}_{n+1}$$

2.5) La sortie graphique de la résolution est présentée après.

2.6) À $t = 0$ s: $q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.32 \\ -1.86 \end{pmatrix}$, $\ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

À $t = \Delta t$: $q(t) = \begin{pmatrix} -0.0260 \\ -0.0373 \end{pmatrix}$, $\dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.28 \\ -1.87 \end{pmatrix}$, $\ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} 3.53 \\ -1.02 \end{pmatrix}$;

À $t = 2\Delta t$: $q(t) = \begin{pmatrix} -0.0505 \\ -0.0750 \end{pmatrix}$, $\dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.18 \\ -1.90 \end{pmatrix}$, $\ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} 6.94 \\ -1.95 \end{pmatrix}$;

À $t = 0.5$ s: $q(t) = \begin{pmatrix} 0.578 \\ -0.277 \end{pmatrix}$, $\dot{q}(t) = \begin{pmatrix} 0.275 \\ 4.95 \end{pmatrix}$, $\ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} -28.1 \\ 33.6 \end{pmatrix}$.

Codes MATLAB

```

%% Exercice -- Etude d'un double pendule avec l'hypothese des petits
mouvements
% Author: Benjamin QU -- SY1924124 -- P2015
clc
clear
set(0,'defaultfigurecolor','w')

m = 2;
a = 0.5;
g = 9.81;
F0 = 20;
w = 2*pi;
theta10 = 0;
theta20 = 0;
dtheta10 = -1.31519275;
dtheta20 = -1.85996342;
T0 = 8;
%% 1. Resolution avec un schema de NEWMARK explicite
beta_exp = 0;
gamma_exp = 0.5;

% 1.1) Matrice d'amplification
syms dt_sym g_sym a_sym;
B_exp_sym = [1+dt_sym^2*beta_exp^2*g_sym/a_sym, -
dt_sym^2*beta_exp*g_sym/a_sym, 0, 0;
-
dt_sym^2*beta_exp^2*g_sym/a_sym, 1+dt_sym^2*beta_exp^2*g_sym/a_sym, 0, 0
;
dt_sym*gamma_exp^2*g_sym/a_sym, -
dt_sym*gamma_exp*g_sym/a_sym, 1, 0;
-
dt_sym*gamma_exp^2*g_sym/a_sym, dt_sym*gamma_exp^2*g_sym/a_sym, 0, 1];
C_exp_sym = [1-dt_sym^2*(0.5-beta_exp)^2*g_sym/a_sym, dt_sym^2*(0.5-
beta_exp)*g_sym/a_sym, dt_sym, 0;
dt_sym^2*(0.5-beta_exp)^2*g_sym/a_sym, 1-dt_sym^2*(0.5-
beta_exp)^2*g_sym/a_sym, 0, dt_sym;
-dt_sym*(1-gamma_exp)^2*g_sym/a_sym, dt_sym*(1-
gamma_exp)*g_sym/a_sym, 1, 0;
dt_sym*(1-gamma_exp)^2*g_sym/a_sym, -dt_sym*(1-
gamma_exp)^2*g_sym/a_sym, 0, 1];
A_exp_sym = inv(B_exp_sym)*C_exp_sym;
disp('1.1) Matrice d'amplification explicite: ')
disp(simplify(A_exp_sym))

```



```

% 1.2) Determination pas de temps critique
dts = 0:0.02:1;
B_exp = cell(length(dts),1);
C_exp = cell(length(dts),1);
A_exp = cell(length(dts),1);
VP_exp = zeros(4,length(dts));
for i = 1:length(dts)
    B_exp{i} = [1+dts(i)^2*beta_exp*2*g/a,-dts(i)^2*beta_exp*g/a,0,0;
               -dts(i)^2*beta_exp*2*g/a,1+dts(i)^2*beta_exp*2*g/a,0,0;
               dts(i)*gamma_exp*2*g/a,-dts(i)*gamma_exp*g/a,1,0;
               -dts(i)*gamma_exp*2*g/a,dts(i)*gamma_exp*2*g/a,0,1];
    C_exp{i} = [1-dts(i)^2*(0.5-beta_exp)*2*g/a,dts(i)^2*(0.5-
beta_exp)*g/a,dts(i),0;
               dts(i)^2*(0.5-beta_exp)*2*g/a,1-dts(i)^2*(0.5-
beta_exp)*2*g/a,0,dts(i);
               -dts(i)*(1-gamma_exp)*2*g/a,dts(i)*(1-gamma_exp)*g/a,1,0;
               dts(i)*(1-gamma_exp)*2*g/a,-dts(i)*(1-gamma_exp)*2*g/a,0,1];
    A_exp{i} = inv(B_exp{i})*C_exp{i};
    VP = eig(A_exp{i});
    VP_exp(1,i) = abs(VP(1));
    VP_exp(2,i) = abs(VP(2));
    VP_exp(3,i) = abs(VP(3));
    VP_exp(4,i) = abs(VP(4));
end

figure % Plot figure
plot(dts,VP_exp(1,:))
title('1.2) Modules de plus grande valeur propre pour \Deltat entre
0s et 1s')

% 1.5) Resolution en temps du probleme
dt = 0.02;
time = 0:dt:T0;
q0 = [theta10;theta20];
dq0 = [dtheta10;dtheta20];
d2q0 = (-g/a)*[2,-1;-2,2]*q0;
q_exp = zeros(2,length(time));
q_exp(:,1) = q0;
dq_exp = zeros(2,length(time));
dq_exp(:,1) = dq0;
d2q_exp = zeros(2,length(time));
d2q_exp(:,1) = d2q0;
for i = 1:(length(time)-1)

```

```

    q_exp(:,i+1) = inv(eye(2)+dt^2*beta_exp*g/a*[2,-1;-
2,2])*(q_exp(:,i)+dt*dq_exp(:,i)+dt^2*(0.5-
beta_exp)*d2q_exp(:,i)+dt^2*beta_exp*(F0/(m*a))*sin(w*i*dt)*[2-
sqrt(2)/2;-2+sqrt(2)]);
    d2q_exp(:,i+1) = (-g/a)*[2,-1;-
2,2]*q_exp(:,i+1)+(F0/(m*a))*sin(w*i*dt)*[2-sqrt(2)/2;-2+sqrt(2)];
    dq_exp(:,i+1) = dq_exp(:,i)+dt*(1-
gamma_exp)*d2q_exp(:,i)+dt*gamma_exp*d2q_exp(:,i+1);
end
figure % Plot figure
plot(time,q_exp(1,:))
hold on
plot(time,q_exp(2,:))
title('1.5 \Deltat = 0.02 s')
legend('\theta_{1}','\theta_{2}')
grid on

% 1.6) Valeurs numeriques
disp(['1.6) A t=0s: q(t) = ',mat2str(q_exp(:,1)),', ', dq(t) =
',mat2str(dq_exp(:,1)),', ', d2q(t) = ',mat2str(d2q_exp(:,1))])
disp(['1.6) A t=dt: q(t) = ',mat2str(q_exp(:,2)),', ', dq(t) =
',mat2str(dq_exp(:,2)),', ', d2q(t) = ',mat2str(d2q_exp(:,2))])
disp(['1.6) A t=2*dt: q(t) = ',mat2str(q_exp(:,3)),', ', dq(t) =
',mat2str(dq_exp(:,3)),', ', d2q(t) = ',mat2str(d2q_exp(:,3))])
disp(['1.6) A t=0.5s: q(t) = ',mat2str(q_exp(:,26)),', ', dq(t) =
',mat2str(dq_exp(:,26)),', ', d2q(t) = ',mat2str(d2q_exp(:,26))])
%% 2. Resolution avec un schema de NEWMARK implicite
beta_imp = 0.25;
gamma_imp = 0.5;

% 2.1) Matrice d'amplification
B_imp_sym = [1+dt_sym^2*beta_imp*2*g_sym/a_sym,-
dt_sym^2*beta_imp*g_sym/a_sym,0,0;
-
dt_sym^2*beta_imp*2*g_sym/a_sym,1+dt_sym^2*beta_imp*2*g_sym/a_sym,0,0
;
dt_sym*gamma_imp*2*g_sym/a_sym,-
dt_sym*gamma_imp*g_sym/a_sym,1,0;
-
dt_sym*gamma_imp*2*g_sym/a_sym,dt_sym*gamma_imp*2*g_sym/a_sym,0,1];
C_imp_sym = [1-dt_sym^2*(0.5-beta_imp)*2*g_sym/a_sym,dt_sym^2*(0.5-
beta_imp)*g_sym/a_sym,dt_sym,0;
dt_sym^2*(0.5-beta_imp)*2*g_sym/a_sym,1-dt_sym^2*(0.5-
beta_imp)*2*g_sym/a_sym,0,dt_sym];

```

```

        -dt_sym*(1-gamma_imp)*2*g_sym/a_sym,dt_sym*(1-
gamma_imp)*g_sym/a_sym,1,0;
        dt_sym*(1-gamma_imp)*2*g_sym/a_sym,-dt_sym*(1-
gamma_imp)*2*g_sym/a_sym,0,1];
A_imp_sym = inv(B_imp_sym)*C_imp_sym;
disp('2.1) Matrice d'amplification implicite: ')
disp(simplify(A_imp_sym))

% 2.2) Evolution de la plus grande valeur propre
B_imp = cell(length(dts),1);
C_imp = cell(length(dts),1);
A_imp = cell(length(dts),1);
VP_imp = zeros(4,length(dts));
for i = 1:length(dts)
    B_imp{i} = [1+dts(i)^2*beta_imp*2*g/a,-dts(i)^2*beta_imp*g/a,0,0;
        -dts(i)^2*beta_imp*2*g/a,1+dts(i)^2*beta_imp*2*g/a,0,0;
        dts(i)*gamma_imp*2*g/a,-dts(i)*gamma_imp*g/a,1,0;
        -dts(i)*gamma_imp*2*g/a,dts(i)*gamma_imp*2*g/a,0,1];
    C_imp{i} = [1-dts(i)^2*(0.5-beta_imp)*2*g/a,dts(i)^2*(0.5-
beta_imp)*g/a,dts(i),0;
        dts(i)^2*(0.5-beta_imp)*2*g/a,1-dts(i)^2*(0.5-
beta_imp)*2*g/a,0,dts(i);
        -dts(i)*(1-gamma_imp)*2*g/a,dts(i)*(1-gamma_imp)*g/a,1,0;
        dts(i)*(1-gamma_imp)*2*g/a,-dts(i)*(1-gamma_imp)*2*g/a,0,1];
    A_imp{i} = inv(B_imp{i})*C_imp{i};
    VP = eig(A_imp{i});
    VP_imp(1,i) = abs(VP(1));
    VP_imp(2,i) = abs(VP(2));
    VP_imp(3,i) = abs(VP(3));
    VP_imp(4,i) = abs(VP(4));
end

figure % Plot figure
plot(dts,VP_imp(1,:))
title('2.2) Modules de plus grande valeur propre pour \Deltat entre
0s et 1s')

% 2.5) Resolution en temps du probleme
q_imp = zeros(2,length(time));
q_imp(:,1) = q0;
dq_imp = zeros(2,length(time));
dq_imp(:,1) = dq0;
d2q_imp = zeros(2,length(time));
d2q_imp(:,1) = d2q0;

```

```

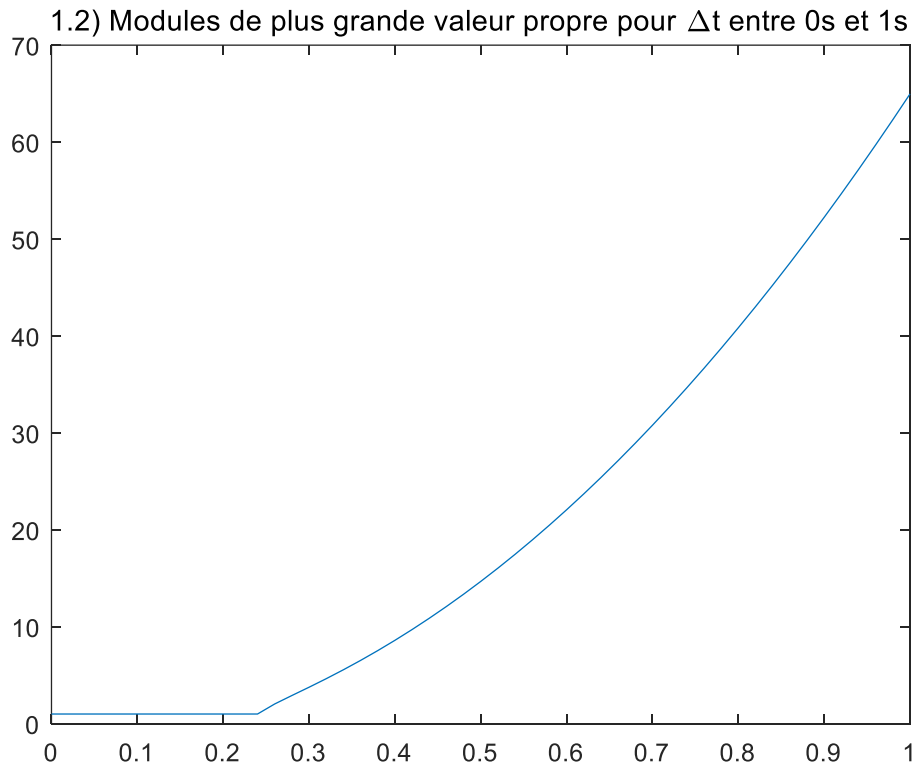
for i = 1:(length(time)-1)
    q_imp(:,i+1) = inv(eye(2)+dt^2*beta_imp*g/a*[2,-1;-
2,2])*(q_imp(:,i)+dt*dq_imp(:,i)+dt^2*(0.5-
beta_imp)*d2q_imp(:,i)+dt^2*beta_imp*(F0/(m*a))*sin(w*i*dt)*[2-
sqrt(2)/2;-2+sqrt(2)]);
    d2q_imp(:,i+1) = (-g/a)*[2,-1;-
2,2]*q_imp(:,i+1)+(F0/(m*a))*sin(w*i*dt)*[2-sqrt(2)/2;-2+sqrt(2)];
    dq_imp(:,i+1) = dq_imp(:,i)+dt*(1-
gamma_imp)*d2q_imp(:,i)+dt*gamma_imp*d2q_imp(:,i+1);
end
figure % Plot figure
plot(time,q_imp(1,:))
hold on
plot(time,q_imp(2,:))
title('2.5) \Deltat = 0.02 s')
legend('\theta_{1}','\theta_{2}')
grid on

% 2.6) Valeurs numeriques
disp(['2.6) A t=0s: q(t) = ',mat2str(q_imp(:,1)),' , dq(t) =
',mat2str(dq_imp(:,1)),' , d2q(t) = ',mat2str(d2q_imp(:,1))])
disp(['2.6) A t=dt: q(t) = ',mat2str(q_imp(:,2)),' , dq(t) =
',mat2str(dq_imp(:,2)),' , d2q(t) = ',mat2str(d2q_imp(:,2))])
disp(['2.6) A t=2*dt: q(t) = ',mat2str(q_imp(:,3)),' , dq(t) =
',mat2str(dq_imp(:,3)),' , d2q(t) = ',mat2str(d2q_imp(:,3))])
disp(['2.6) A t=0.5s: q(t) = ',mat2str(q_imp(:,26)),' , dq(t) =
',mat2str(dq_imp(:,26)),' , d2q(t) = ',mat2str(d2q_imp(:,26))])

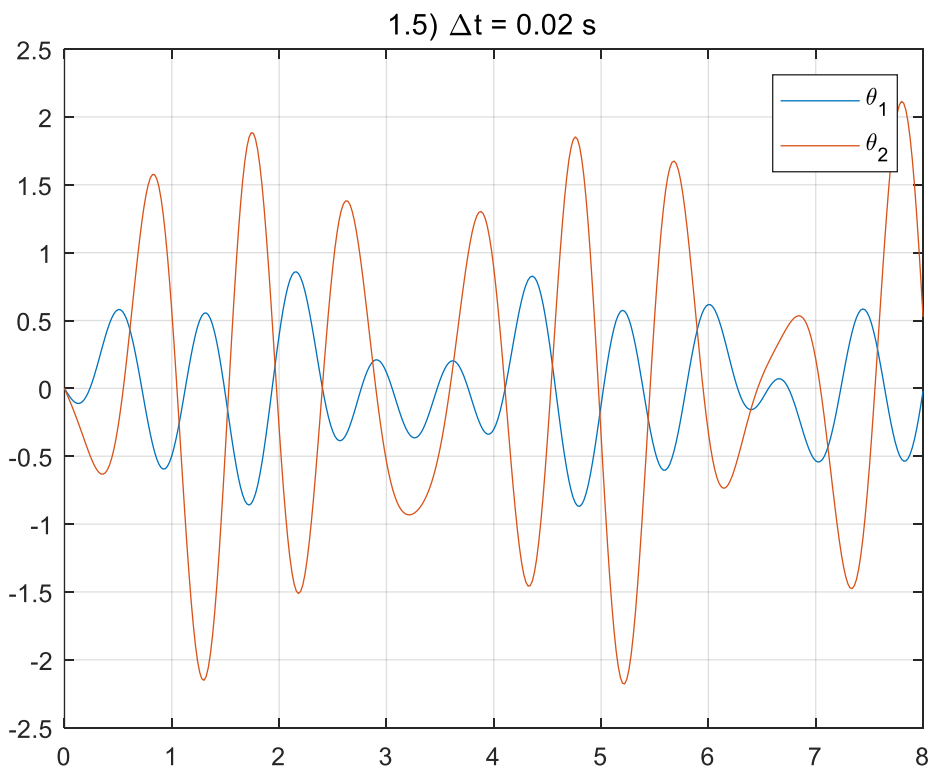
```

Sorties graphiques

Question 1.2)

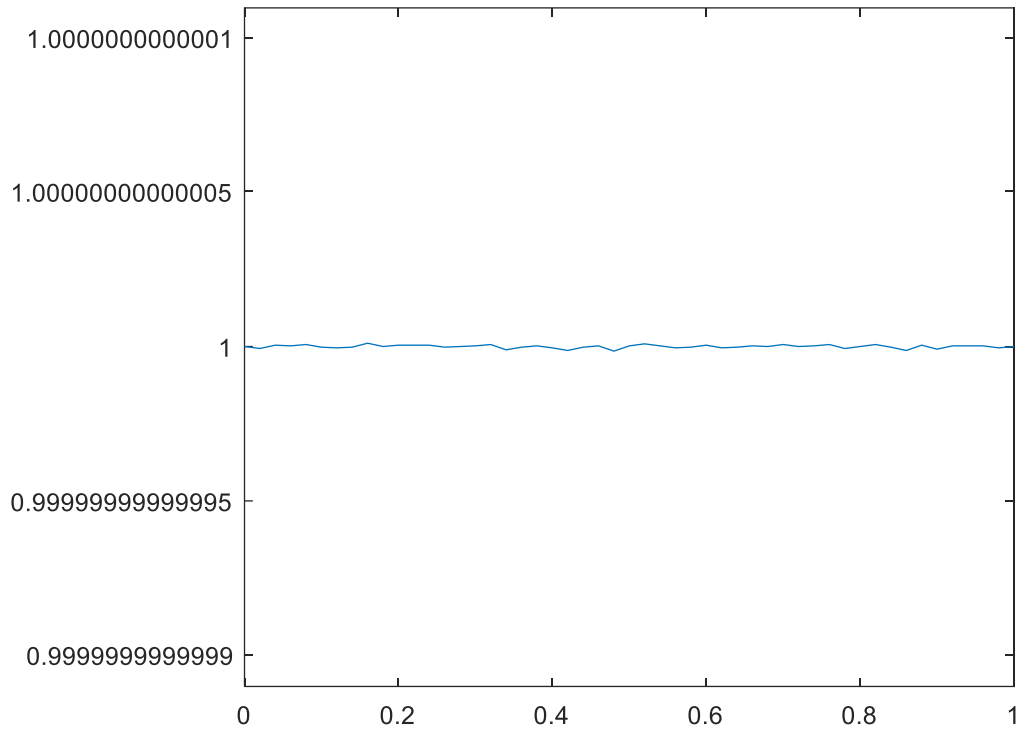


Question 1.5)



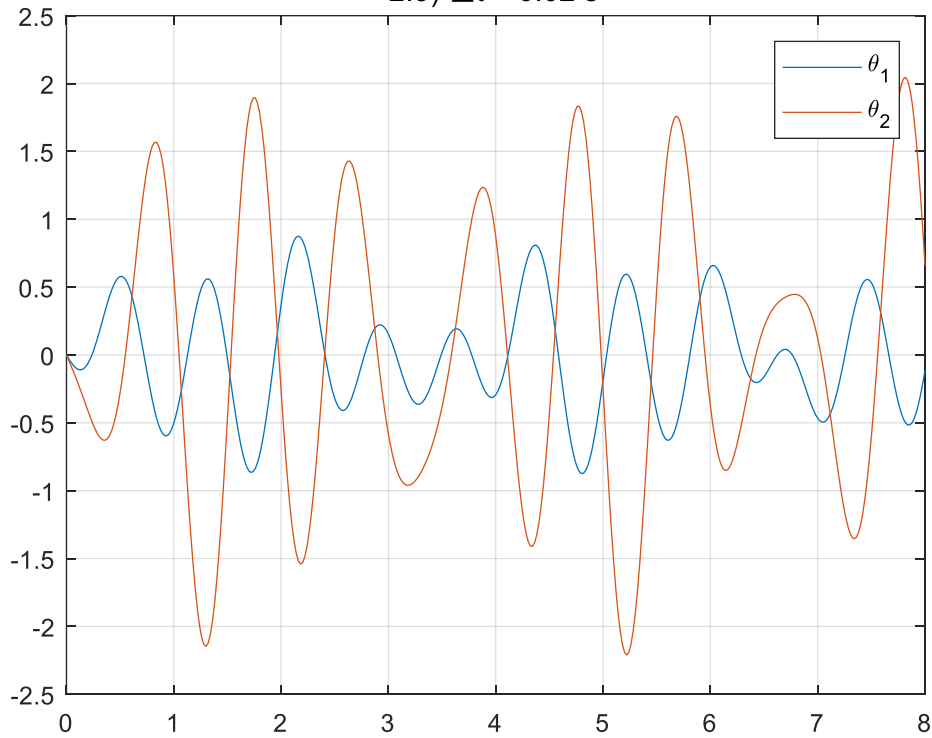
Question 2.2)

2.2) Modules de plus grande valeur propre pour Δt entre 0s et 1s



Question 2.5)

2.5) $\Delta t = 0.02$ s



Partie 3 – Exercice : Oscillateur non linéaire à un degré de liberté

Question 1. Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

1.1 Les trois relations pour un schéma de NEWMARK explicite :

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + 0.5 \Delta t^2 \ddot{q}_j$$

$$\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 q_{j+1} (1 + a q_{j+1}^2)$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j + \Delta t \gamma \ddot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + 0.5 \Delta t \ddot{q}_j + 0.5 \Delta t \ddot{q}_{j+1}$$

1.2 La sortie graphique de la résolution est présentée après.

1.3 À $t = 0$ s: $q(t) = 2$;

À $t = \Delta t$: $q(t) = 1.9779$;

À $t = 2\Delta t$: $q(t) = 1.9123$;

À $t = T_0$: $q(t) = 1.0329$.

Question 2. Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite

2.1 On cherche à minimiser la quantité $\ddot{q}_j + \omega_0^2 q_j (1 + a q_j^2)$.

2.2 Lorsque la valeur absolue du résidu est supérieure à la précision souhaitée :

$$\ddot{q}_{j+1}^* = -\omega_0^2 q_{j+1}^* (1 + a q_{j+1}^{*2})$$

$$q_{j+1}^* = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{j+1}^*$$

$$\dot{q}_{j+1}^* = \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j + \Delta t \gamma \ddot{q}_{j+1}^*$$

2.3 En choisissant une précision $\varepsilon = 0.001$, la sortie graphique de la résolution est présentée après.

2.4 À $t = 0$ s: $q(t) = 2$;

À $t = \Delta t$: $q(t) = 1.9781$;

À $t = 2\Delta t$: $q(t) = 1.9131$;

À $t = T_0$: $q(t) = 0.8493$.

Question 3. Énergie mécanique

3.1 L'énergie mécanique pour cet oscillateur non linéaire est :

$$E = \frac{1}{2} (m \dot{q}^2 + k q^2) = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2)$$

Prenons $E^* = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2)$ qui est proportionnel à E pour calculer.

3.2 La sortie graphique pour E^* avec deux schémas d'intégration est présentée après.

3.3 Avec $\Delta t = 0.02$ s, on peut voir que la quantité E^* oscille suivant le temps, et l'amplitude d'oscillation du schéma de NEWMARK implicite est plus grande que celle du schéma de NEWMARK explicite, et que E^* du NEWMARK implicite décale un peu suivant le temps.

Codes MATLAB

```

%% Exercice -- Oscillateur non lineaire a un degre de liberte
% Author: Benjamin QU -- SY1924124 -- P2015

clc
clear
set(0, 'defaultfigurecolor', 'w')

w0 = 2*pi;
a = 0.1;
q0 = 2;
dq0 = 0;
d2q0 = -w0^2*q0*(1+a*q0^2);
T0 = 6;
dt = 0.02;
time = 0:dt:T0;
beta_imp = 0.25;
gamma_exp = 0.5; gamma_imp = 0.5;

%% Resolution avec un schema de NEWMARK explicite
q_exp = zeros(1, length(time));
q_exp(1) = q0;
dq_exp = zeros(1, length(time));
dq_exp(1) = dq0;
d2q_exp = zeros(1, length(time));
d2q_exp(1) = d2q0;
for i = 1:(length(time)-1)
    q_exp(i+1) = q_exp(i) + dt*dq_exp(i) + dt^2*0.5*d2q_exp(i);
    d2q_exp(i+1) = -w0^2*q_exp(i+1)*(1+a*(q_exp(i+1)^2));
    dq_exp(i+1) = dq_exp(i) + dt*(1-
gamma_exp)*d2q_exp(i) + gamma_exp*dt*d2q_exp(i+1);
end
figure % Plot figure
plot(time, q_exp)
title('1.2 NEWMARK explicite avec \Deltat = 0.02 s')

disp(['1.3 A t=0s: q(t) = ', num2str(q_exp(1))])
disp(['1.3 A t=dt: q(t) = ', num2str(q_exp(2))])
disp(['1.3 A t=2*dt: q(t) = ', num2str(q_exp(3))])
disp(['1.3 A t=T0: q(t) = ', num2str(q_exp(301))])
%% Resolution avec un schema de NEWMARK implicite
erreur = 0.001;
q_imp = zeros(1, length(time));
q_imp(1) = q0;
dq_imp = zeros(1, length(time));

```



```

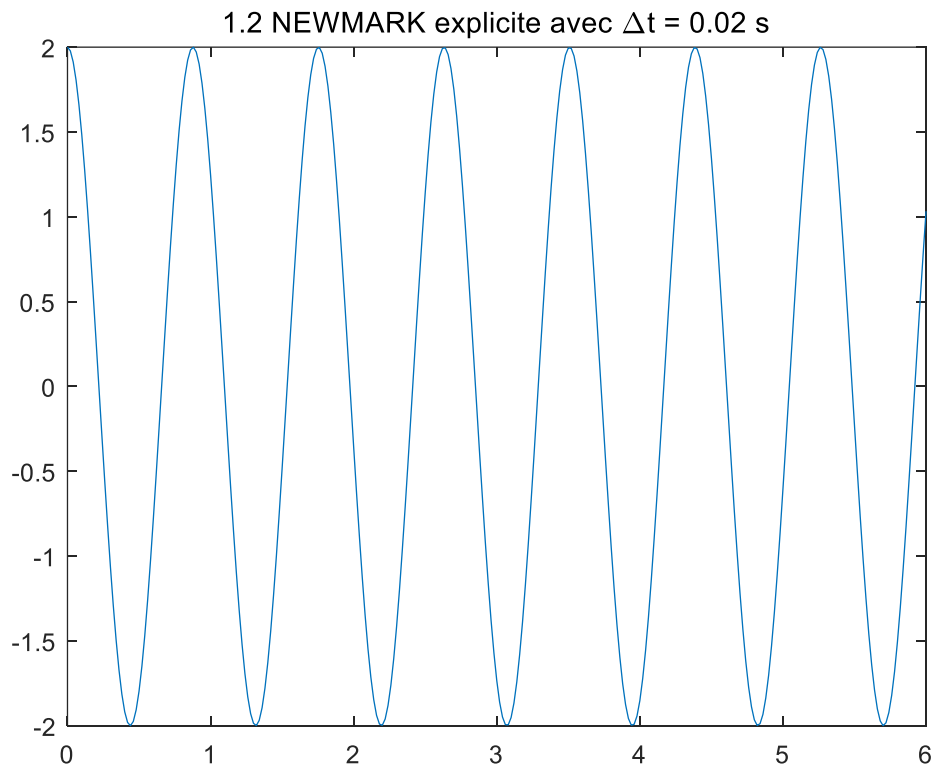
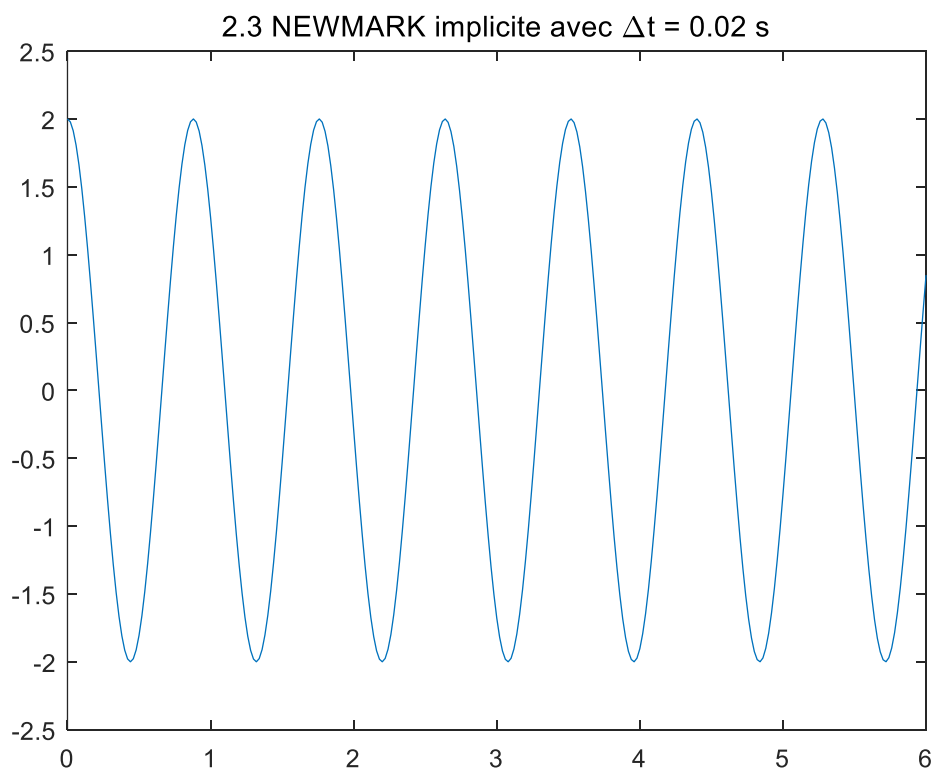
dq_imp(1) = dq0;
d2q_imp = zeros(1,length(time));
d2q_imp(1) = d2q0;
for i = 1:(length(time)-1)
    q = q_imp(i)+dt*dq_imp(i)+dt^2*(0.5-
beta_imp)*d2q_imp(i)+beta_imp*dt^2*d2q_imp(i);
    d2q = d2q_imp(i);
    while abs(d2q+w0^2*q*(1+a*q^2)) > erreur
        d2q = -w0^2*q*(1+a*q^2);
        q = q_imp(i)+dt*dq_imp(i)+dt^2*(0.5-
beta_imp)*d2q_imp(i)+beta_imp*dt^2*d2q;
        dq = dq_imp(i)+dt*(1-gamma_imp)*d2q_imp(i)+gamma_imp*dt*d2q;
    end
    q_imp(i+1) = q;
    dq_imp(i+1) = dq;
    d2q_imp(i+1) = d2q;
end
figure % Plot figure
plot(time,q_imp)
title('2.3 NEWMARK implicite avec \Deltat = 0.02 s')

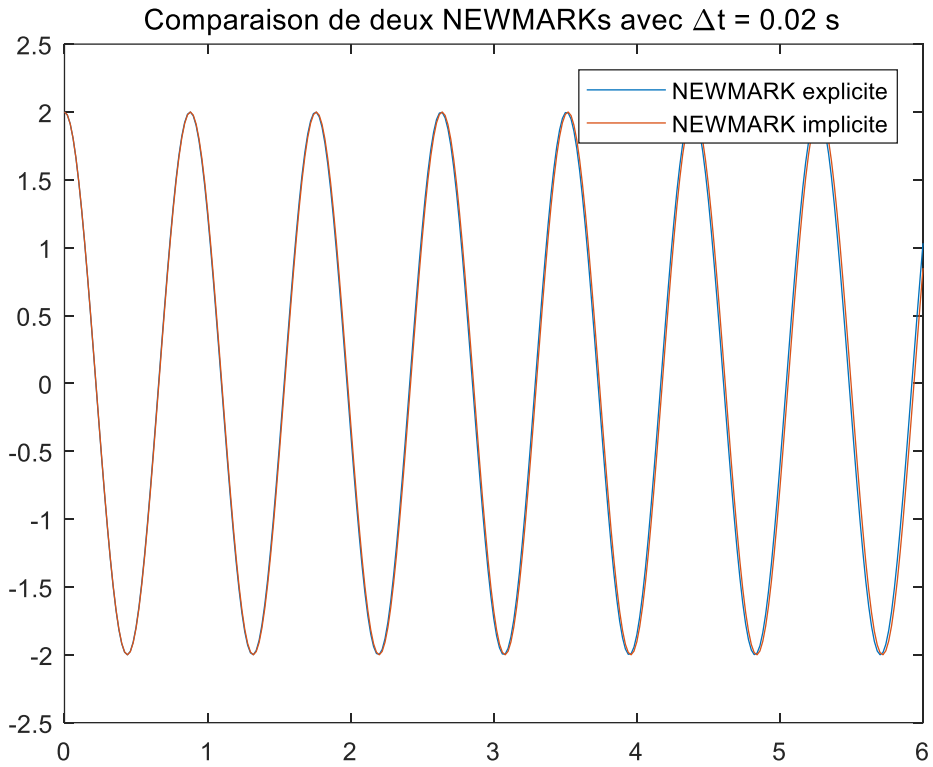
disp(['2.4 A t=0s: q(t) = ',num2str(q_imp(1))])
disp(['2.4 A t=dt: q(t) = ',num2str(q_imp(2))])
disp(['2.4 A t=2*dt: q(t) = ',num2str(q_imp(3))])
disp(['2.4 A t=T0: q(t) = ',num2str(q_imp(301))])

figure % Plot figure
plot(time,q_exp)
hold on
plot(time,q_imp)
title('Comparaison de deux NEWMARKs avec \Deltat = 0.02 s')
legend('NEWMARK explicite','NEWMARK implicite')
%% Energie mecanique
E_etoile_exp = zeros(1,length(time));
E_etoile_imp = zeros(1,length(time));
for i = 1:length(time)
    E_etoile_exp(i) = 0.5*(dq_exp(i)^2+w0^2*q_exp(i)^2);
    E_etoile_imp(i) = 0.5*(dq_imp(i)^2+w0^2*q_imp(i)^2);
end
figure % Plot figure
plot(time,E_etoile_exp)
hold on
plot(time,E_etoile_imp)
title('3.2 E^{*} avec schemas de NEWMARK et \Deltat = 0.02s')

```

```
legend('NEWMARK explicite', 'NEWMARK implicite')
```

Sorties graphiques**Question 1.2****Question 2.3**



Question 3.2

