MÉCANIQUE NUMÉRIQUE

3e devoir du cours

Benjamin QU – SY1924124

* *Les codes sont programmés en MATLAB et mis dans* ***Partie 2***.
* *Les sorties graphiques sont mises dans* ***Partie 3***.

Partie 1 – Exercice : Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

Question 5.1 Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite

5.1.2) Selon la sortie graphique 5.1.2, la résolution par schéma de NEWMARK implicite est bien précise.
5.1.3) Selon la sortie graphique 5.1.3, les valeurs de E* associée au schéma de NEWMARK implicite oscille entre $2\pi^2$ (E* exacte) et $4\pi^2$.
5.1.4) Selon la sortie graphique 5.1.4, les valeurs propres de la matrice d'amplification pour des valeurs de Δt comprises entre 0s et 1s sont toujours égales à 1. Par conséquent, la solution avec schéma de NEWMARK implicite est toujours stable.

Question 5.2 Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

5.2.2) Selon la sortie graphique 5.2.2, la résolution par schéma de NEWMARK explicite est bien précise.
5.2.3) Selon les sorties graphiques 5.2.3, la solution par schéma de NEWMARK explicite stabilise quand $\Delta t = 0.2s$ et diverge quand $\Delta t = 0.5$s, ce qui implique que le pas de temps critique est probablement compris entre 0.2s et 0.5s.
5.2.4) En faisant que les modules des valeurs propres de la matrice d'amplification pour le schéma de NEWMARK explicite soient égaux à 1, on obtient une pas de temps critique $\Delta t \approx 0.318$s, c'est-à-dire que $\Delta t = \alpha \times \frac{2}{\omega_0} = 1 \times \frac{2}{\omega_0}$, avec $\alpha = 1$.

Partie 2 – Codes MATLAB

* *Les codes de la question 5 (NEWMARK) ont besoin de codes des questions précédentes pour marcher, donc j'ai fait copier-coller de tous les codes dans cette partie.*

```
%% Exercice -- Oscillateur conservatif lineaire a un degre de liberte
% Author: Benjamin QU -- SY1924124 -- P2015
clc
clear
set(0,'defaultfigurecolor','w')
%% Question 1 - 1
% Solution reference
T0 = 3;
solution_ref = dsolve('D2q+(2*pi)^2*q=0','q(0)=1','Dq(0)=0');
disp(['Q1.1 - La solution reference est q=' char(solution_ref)])

% % Plot figure
% fplot(solution_ref,[0,T0])
% title(['Q1.1 q=' char(solution_ref)])
%% Question 1 - 2
% Quantite E*
w0 = sym(2*pi);
E_etoile = ((diff(solution_ref))^2+(w0^2)*(solution_ref^2))/2;
disp(['Q1.2 - La quantite E* est E*=' char(simplify(E_etoile))])
%% Question 2 - 2 et 2 - 3
% Resolution avec schema d'EULER explicite -- Methode 2
q0 = 1;
dq0 = 0;
pas_de_temps = [0.1 0.05 0.01]; % Differents pas de temps -- delta t

t = cell(length(pas_de_temps),1);
for i = 1:length(pas_de_temps)
    t{i} = 0:pas_de_temps(i):3;
end

mat_amp = cell(length(t),1); % Matrice d'amplification
for i = 1:length(t)
    mat_amp{i} = [1 pas_de_temps(i);-(2*pi)^2*pas_de_temps(i) 1];
end

U_j = {[q0;dq0],[q0;dq0],[q0;dq0]};

q_exp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    q_exp{i} = zeros(1,length(t{i}));
```

```
end

dq_exp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    dq_exp{i} = zeros(1,length(t{i}));
end

for i = 1:length(t)
    for j = 1:length(t{i})
        U_j{i} = mat_amp{i}*U_j{i};
        q_exp{i}(j) = U_j{i}(1);
        dq_exp{i}(j) = U_j{i}(2);
    end
end

% % Plot figure
% figure
% for i = 1:length(t)
%     hold on
%     plot(t{i},q_exp{i})
% end
% title('Q2.2 et Q2.3 EULER explicite')
% legend(['delta t = ' num2str(pas_de_temps(1))],['delta t = '
num2str(pas_de_temps(2))],['delta t = ' num2str(pas_de_temps(3))])
%% Question 2 - 4
% Calcul de E* associee au schema d'EULER explicite
E_etoile_exp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    E_etoile_exp{i} = zeros(length(t{i}),1);
end

for i = 1:length(t)
    for j = 1:length(t{i})
        E_etoile_exp{i}(j) =
((dq_exp{i}(j))^2+(2*pi)^2*(q_exp{i}(1))^2)/2;
    end
end

% % Plot figure
% for i = 1:length(t)
%     figure
%     fplot(E_etoile,[0,T0])
%     hold on
%     plot(t{i},E_etoile_exp{i})
```

```
%    title(['Q2.4 E* avec pas de temps = ' num2str(pas_de_temps(i))])
% end
%% Question 2 - 5
% Valeurs propres de la matrice d'amplification
syms delta_t
VP_explicit = eig([1 delta_t;-(w0)^2*delta_t 1]);
disp(['Q2.5 - Les valeurs propres de la matrice d''amplification sont
' char(VP_explicit(1)) ' et ' char(VP_explicit(2))])
%% Question 3 - 1
% Resolution avec schema d'EULER implicite -- Methode 1
q_imp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    q_imp{i} = zeros(1,length(t{i}));
    q_imp{i}(1) = 1;
end

dq_imp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    dq_imp{i} = zeros(1,length(t{i}));
end

d2q_imp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    d2q_imp{i} = zeros(1,length(t{i}));
end

for i = 1:length(t)
    for j = 1:(length(t{i})-1)
        q_imp{i}(j+1) =
q_imp{i}(j)+pas_de_temps(i)*(dq_imp{i}(j)+pas_de_temps(i)*q_imp{i}(j+
1)*(-4*pi^2));
        d2q_imp{i}(j+1) = (-4*pi^2)*q_imp{i}(j+1);
        dq_imp{i}(j+1) = dq_imp{i}(j)+pas_de_temps(i)*d2q_imp{i}(j+1);
    end
end

% % Plot figure
% figure
% for i = 1:length(t)
%    hold on
%    plot(t{i},q_imp{i})
% end
% title('Q3.1 EULER implicite')
% legend(['delta t = ' num2str(pas_de_temps(1))],['delta t = '
```

```
num2str(pas_de_temps(2))],['delta t = ' num2str(pas_de_temps(3))])
%% Question 3 - 2
% Comparaison des trois solutions
% figure
% fplot(solution_ref,[0,T0])
% hold on
% plot(t{3},q_exp{3})
% hold on
% plot(t{3},q_imp{3})
% title('Q3.2 Comparaison solutions')
% legend('solution exacte','EULER explicite','EULER implicite')
%% Question 3 - 3
% L'amortissement numerique d'EULER implicite
pas_de_temps_2 = [0.3 0.2 0.04 0.03];
t_2 = cell(length(pas_de_temps_2),1);
for i = 1:length(pas_de_temps_2)
    t_2{i} = 0:pas_de_temps_2(i):3;
end

q_imp_2 = cell(length(t_2),1);
for i = 1:length(t_2)
    q_imp_2{i} = zeros(1,length(t_2{i}));
    q_imp_2{i}(1) = 1;
end

dq_imp_2 = cell(length(t_2),1);
for i = 1:length(t_2)
    dq_imp_2{i} = zeros(1,length(t_2{i}));
end

d2q_imp_2 = cell(length(t_2),1);
for i = 1:length(t_2)
    d2q_imp_2{i} = zeros(1,length(t_2{i}));
end

for i = 1:length(t_2)
    for j = 1:(length(t_2{i})-1)
        q_imp_2{i}(j+1) =
q_imp_2{i}(j)+pas_de_temps_2(i)*(dq_imp_2{i}(j)+pas_de_temps_2(i)*q_i
mp_2{i}(j+1)*(-4*pi^2));
        d2q_imp_2{i}(j+1) = (-4*pi^2)*q_imp_2{i}(j+1);
        dq_imp_2{i}(j+1) =
dq_imp_2{i}(j)+pas_de_temps_2(i)*d2q_imp_2{i}(j+1);
    end
```

```
end

% % Plot figure
% figure
% for i = 1:length(t_2)
%     hold on
%     plot(t_2{i},q_imp_2{i})
% end
% for i = 1:length(t)
%     hold on
%     plot(t{i},q_imp{i})
% end
% title('Q3.3 EULER implicite avec differents pas de temps')
% legend(['delta t = ' num2str(pas_de_temps_2(1))],['delta t = '
num2str(pas_de_temps_2(2))],['delta t = '
num2str(pas_de_temps_2(3))],['delta t = '
num2str(pas_de_temps_2(4))],['delta t = '
num2str(pas_de_temps(1))],['delta t = '
num2str(pas_de_temps(2))],['delta t = ' num2str(pas_de_temps(3))])
%% Question 3 - 4
% Calcul de E* associee au schema d'EULER implicite
E_etoile_imp = cell(length(t),1);
for i = 1:length(t)
    E_etoile_imp{i} = zeros(length(t{i}),1);
end

for i = 1:length(t)
    for j = 1:length(t{i})
        E_etoile_imp{i}(j) =
((dq_imp{i}(j))^2+(2*pi)^2*(q_imp{i}(1))^2)/2;
    end
end

% % Plot figure
% for i = 1:length(t)
%     figure
%     fplot(E_etoile,[0,T0])
%     hold on
%     plot(t{i},E_etoile_exp{i})
%     hold on
%     plot(t{i},E_etoile_imp{i})
%     title(['Q3.4 E* avec pas de temps = ' num2str(pas_de_temps(i))])
%     legend('E* exact','E* explicit','E* implicit')
% end
```

```
%% Question 3 - 5
% Valeurs propres de la matrice d'amplification
VP_implicit = eig((1/(1+w0^2*delta_t^2))*[1 delta_t;-(w0)^2*delta_t
1]);
disp(['Q3.5 - Les valeurs propres de la matrice d''amplification sont
' char(VP_implicit(1)) ' et ' char(VP_implicit(2))])
%% Question 4 - 2
MT = [0,1;-(2*pi)^2,0]; % Matrice de transformation (au premier
order)
Q = [q0;dq0];
q_RK = zeros(1,length(t{3}));
dq_RK = zeros(1,length(t{3}));
for i = 1:length(t{3})
    q_RK(i) = Q(1);
    dq_RK(i) = Q(2);
    k1 = MT*Q;
    k2 = MT*(Q+k1*pas_de_temps(3)/2);
    k3 = MT*(Q+k2*pas_de_temps(3)/2);
    k4 = MT*(Q+k3*pas_de_temps(3));
    K = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    Q = Q+K*pas_de_temps(3);
end
%% Question 4 - 3
% Comparaison des solutions
% figure
% fplot(solution_ref,[0,T0])
% hold on
% plot(t{3},q_exp{3})
% hold on
% plot(t{3},q_imp{3})
% hold on
% plot(t{3},q_RK)
% title('Q4.3 RUNGE KUTTA')
% legend('solution exacte','EULER explicite','EULER implicite','RUNGE
KUTTA')
%% Question 4 - 4
% E* associee au schema de RUNGE KUTTA
E_etoile_RK = zeros(1,length(t{3}));
for i = 1:length(q_RK)
    E_etoile_RK(i) = ((dq_RK(i))^2+(2*pi)^2*(q_RK(1))^2)/2;
end

% % Plot figure
% figure
```

```
% fplot(E_etoile,[0,T0])
% hold on
% plot(t{3},E_etoile_exp{3})
% hold on
% plot(t{3},E_etoile_imp{3})
% hold on
% plot(t{3},E_etoile_RK)
% title('Q4.4 E* avec pas de temps = 0.01s')
% legend('E* exact','E* explicit','E* implicit','E* RK')
%% Question 5 - 1
gamma1 = 0.5;
beta1 = 0.25;

% Q5.1.1 Resolution avec NEWMARK trapezes
B =
[1+beta1*(pas_de_temps(3))^2*(2*pi)^2,0;gamma1*pas_de_temps(3)*(2*pi)
^2,1];
C = [1-(0.5-beta1)*(pas_de_temps(3))^2*(2*pi)^2,pas_de_temps(3);-(1-
gamma1)*pas_de_temps(3)*(2*pi)^2,1];
A = inv(B)*C;
q_NMK = zeros(1,length(t{3}));
dq_NMK = zeros(1,length(t{3}));
U_NMK = [1;0];
for i = 1:length(t{3})
    q_NMK(i) = U_NMK(1);
    dq_NMK(i) = U_NMK(2);
    U_NMK = A*U_NMK;
end

% Q5.1.2 Comparaison solutions
figure
fplot(solution_ref,[0,T0])
hold on
plot(t{3},q_exp{3})
hold on
plot(t{3},q_imp{3})
hold on
plot(t{3},q_RK)
hold on
plot(t{3},q_NMK)
title('Q5.1.2 Comparaison solutions')
legend('solution exacte','EULER explicite','EULER implicite','RUNGE
KUTTA','NEWMARK trapezes')
```

```
% Q5.1.3 Comparaison E*
E_etoile_NMK = zeros(1,length(t{3}));
for i = 1:length(q_NMK)
    E_etoile_NMK(i) = ((dq_NMK(i))^2+(2*pi)^2*(q_NMK(1))^2)/2;
end
figure
fplot(E_etoile,[0,T0])
hold on
plot(t{3},E_etoile_exp{3})
hold on
plot(t{3},E_etoile_imp{3})
hold on
plot(t{3},E_etoile_RK)
hold on
plot(t{3},E_etoile_NMK)
title('Q5.1.3 E* avec pas de temps = 0.01s')
legend('E* exact','E* explicit','E* implicit','E* RK','E* NMK
trapezes')

% Q5.1.4 Valeurs propres de la matrice d'amplification
dts = 0:0.05:1;
Bs = cell(length(dts),1);
Cs = cell(length(dts),1);
As = cell(length(dts),1);
VPs = zeros(2,length(dts));
for i = 1:length(dts)
    Bs{i} = [1+beta1*dts(i)^2*(2*pi)^2,0;gamma1*dts(i)*(2*pi)^2,1];
    Cs{i} = [1-(0.5-beta1)*dts(i)^2*(2*pi)^2,dts(i);-(1-
gamma1)*dts(i)*(2*pi)^2,1];
    As{i} = inv(Bs{i})*Cs{i};
    VP = eig(As{i});
    VPs(1,i) = abs(VP(1));
    VPs(2,i) = abs(VP(2));
end
figure
plot(dts,VPs(1,:))
hold on
plot(dts,VPs(2,:))
title('Q5.1.4 Valeurs propres pour \Deltat entre 0s et 1s')
legend('valeur propre 1','valeur propre 2')
%% Question 5 - 2
gamma2 = 0.5;
beta2 = 0;
```

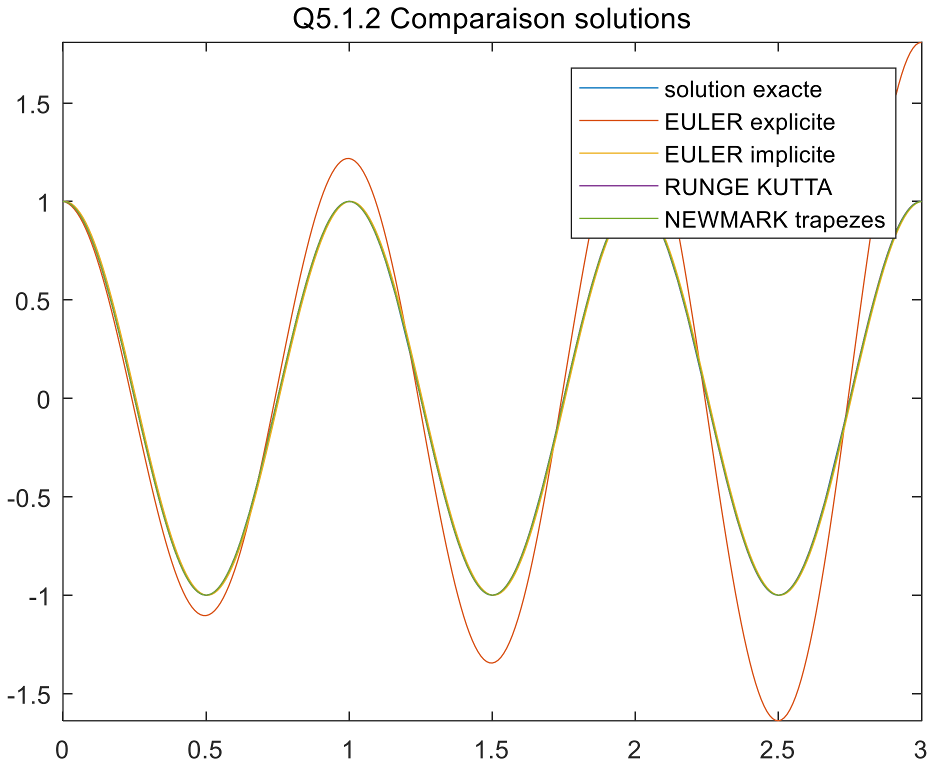
```
% Q5.2.1 Resolution avec NEWMARK centrees
B2 = [1,0;gamma2*pas_de_temps(3)*(2*pi)^2,1];
C2 = [1-0.5*(pas_de_temps(3))^2*(2*pi)^2,pas_de_temps(3);-(1-
gamma2)*pas_de_temps(3)*(2*pi)^2,1];
A2 = inv(B2)*C2;
q_NMK2 = zeros(1,length(t{3}));
dq_NMK2 = zeros(1,length(t{3}));
U_NMK2 = [1;0];
for i = 1:length(t{3})
    q_NMK2(i) = U_NMK2(1);
    dq_NMK2(i) = U_NMK2(2);
    U_NMK2 = A2*U_NMK2;
end

% Q5.2.2 Comparaison solutions
figure
fplot(solution_ref,[0,T0])
hold on
plot(t{3},q_exp{3})
hold on
plot(t{3},q_imp{3})
hold on
plot(t{3},q_RK)
hold on
plot(t{3},q_NMK)
hold on
plot(t{3},q_NMK2)
title('Q5.2.2 Comparaison solutions')
legend('solution exacte','EULER explicite','EULER implicite','RUNGE
KUTTA','NEWMARK trapezes','NEWMARK centrees')

% Q5.2.3 Comparaison solutions
B3 = [1+beta1*0.2^2*(2*pi)^2,0;gamma1*0.2*(2*pi)^2,1];
C3 = [1-(0.5-beta1)*0.2^2*(2*pi)^2,0.2;-(1-gamma1)*0.2*(2*pi)^2,1];
A3 = inv(B3)*C3;
B4 = [1+beta1*0.5^2*(2*pi)^2,0;gamma1*0.5*(2*pi)^2,1];
C4 = [1-(0.5-beta1)*0.5^2*(2*pi)^2,0.5;-(1-gamma1)*0.5*(2*pi)^2,1];
A4 = inv(B4)*C4;
B5 = [1+beta2*0.2^2*(2*pi)^2,0;gamma2*0.2*(2*pi)^2,1];
C5 = [1-(0.5-beta2)*0.2^2*(2*pi)^2,0.2;-(1-gamma2)*0.2*(2*pi)^2,1];
A5 = inv(B5)*C5;
B6 = [1+beta2*0.5^2*(2*pi)^2,0;gamma2*0.5*(2*pi)^2,1];
C6 = [1-(0.5-beta2)*0.5^2*(2*pi)^2,0.5;-(1-gamma2)*0.5*(2*pi)^2,1];
A6 = inv(B6)*C6;
```

```
t2 = {0:0.2:3;0:0.5:3};

q_NMK3 = zeros(1,length(t2{1}));
dq_NMK3 = zeros(1,length(t{1}));
U_NMK3 = [1;0];
q_NMK4 = zeros(1,length(t2{2}));
dq_NMK4 = zeros(1,length(t2{2}));
U_NMK4 = [1;0];
q_NMK5 = zeros(1,length(t2{1}));
dq_NMK5 = zeros(1,length(t2{1}));
U_NMK5 = [1;0];
q_NMK6 = zeros(1,length(t2{2}));
dq_NMK6 = zeros(1,length(t2{2}));
U_NMK6 = [1;0];

for i = 1:length(t2{1})
    q_NMK3(i) = U_NMK3(1);
    dq_NMK3(i) = U_NMK3(2);
    U_NMK3 = A3*U_NMK3;
    q_NMK5(i) = U_NMK5(1);
    dq_NMK5(i) = U_NMK5(2);
    U_NMK5 = A5*U_NMK5;
end
for i = 1:length(t2{2})
    q_NMK4(i) = U_NMK4(1);
    dq_NMK4(i) = U_NMK4(2);
    U_NMK4 = A4*U_NMK4;
    q_NMK6(i) = U_NMK6(1);
    dq_NMK6(i) = U_NMK6(2);
    U_NMK6 = A6*U_NMK6;
end

figure
subplot(1,2,1)
fplot(solution_ref,[0,T0])
hold on
plot(t2{1},q_NMK3)
hold on
plot(t2{1},q_NMK5)
title('Q5.2.3 \Deltat = 0.2s')
legend('solution exacte','NEWMARK trapezes','NEWMARK centrees')
subplot(1,2,2)
fplot(solution_ref,[0,T0])
```

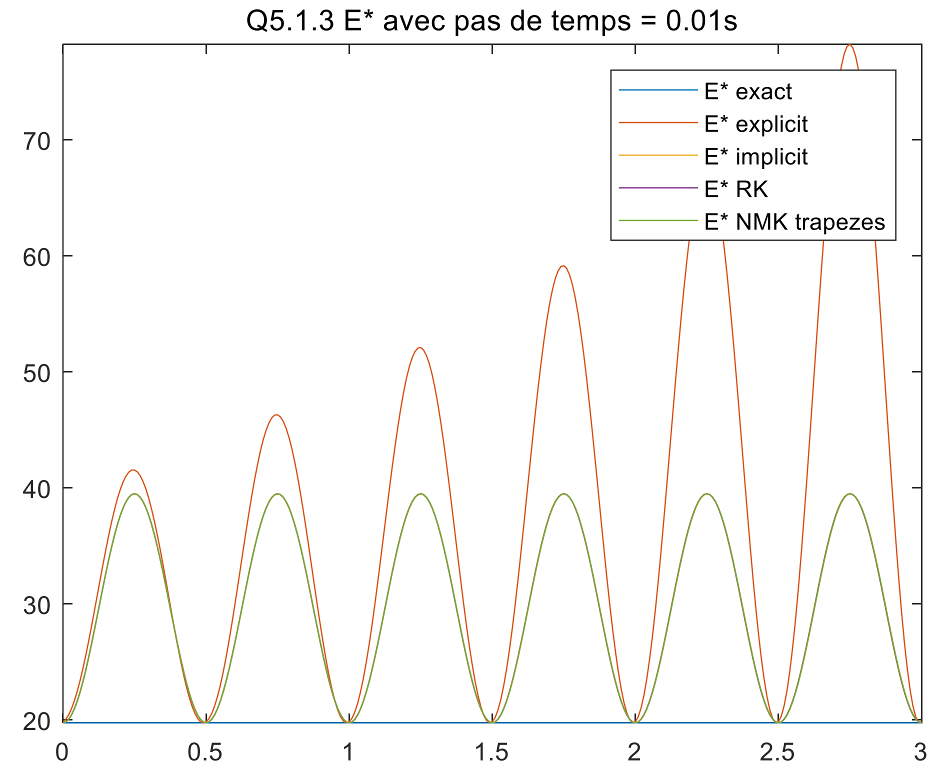
```
hold on
plot(t2{2},q_NMK4)
hold on
plot(t2{2},q_NMK6)
title('Q5.2.3 \Deltat = 0.5s')
legend('solution exacte','NEWMARK trapezes','NEWMARK centrees')

% Q5.2.4 Determination du pas de temps critique
B_sym2 = [1,0;gamma2*delta_t*w0^2,1];
C_sym2 = [1-0.5*delta_t^2*w0^2,delta_t;-(1-gamma2)*delta_t*w0^2,1];
A_sym2 = inv(B_sym2)*C_sym2;
VP_NMK2 = eig(A_sym2);
disp(['Q5.2.4 - Les valeurs propres de la matrice d''amplification
sont ' char(VP_NMK2(1)) ' et ' char(VP_NMK2(2))])
% dt = fsolve(@(x) abs(1 + 2*x*pi*((x*pi - 1)*(x*pi + 1))^(1/2) -
2*x^2*pi^2) - 1,0.318)
% dt = fsolve(@(x) abs(1 - 2*x*pi*((x*pi - 1)*(x*pi + 1))^(1/2) -
2*x^2*pi^2) - 1,0.318)
```

Partie 3 – Sorties graphiques

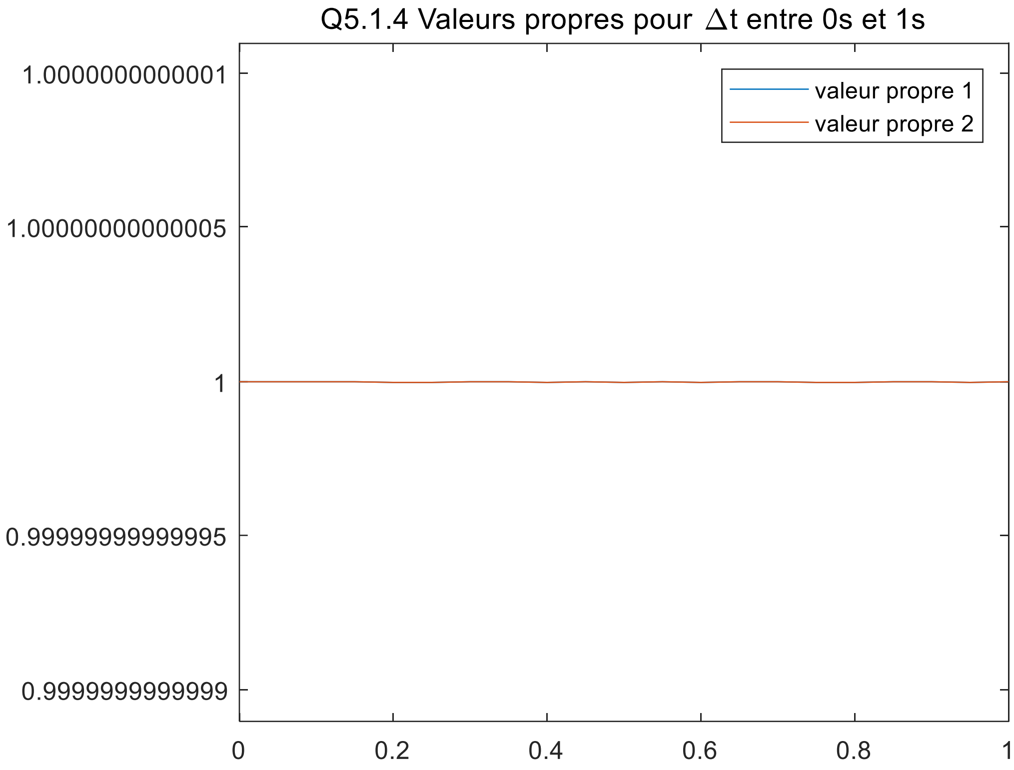
Question 5.1.2



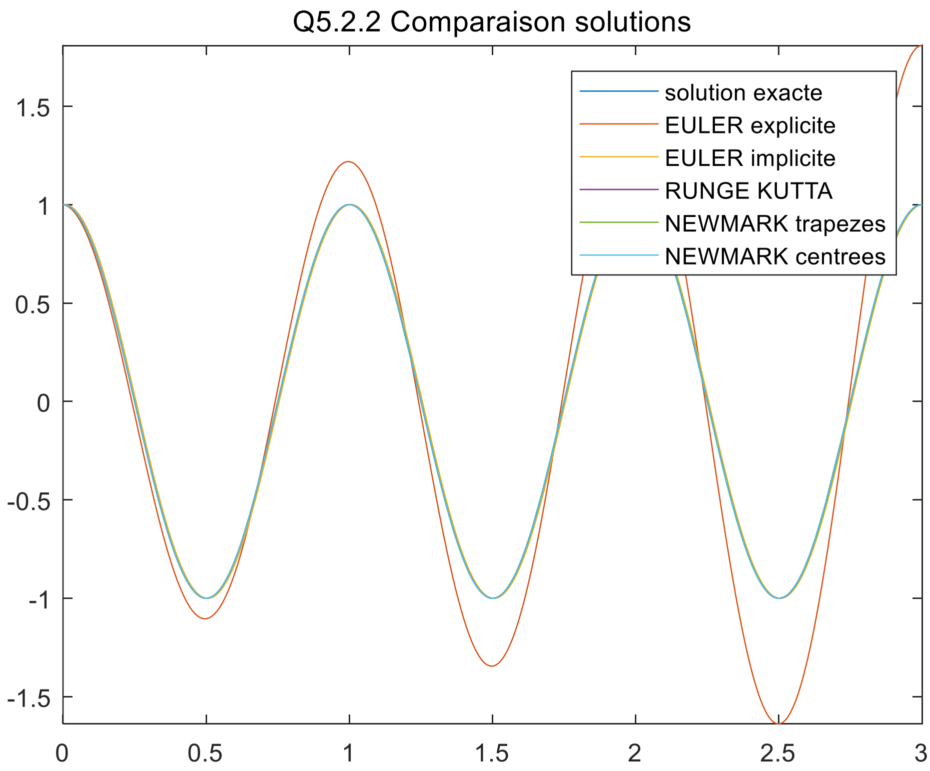
Question 5.1.3



Question 5.1.4



Question 5.2.2



Question 5.2.3