Michel GAO Minghui 15241017 ZY1924105

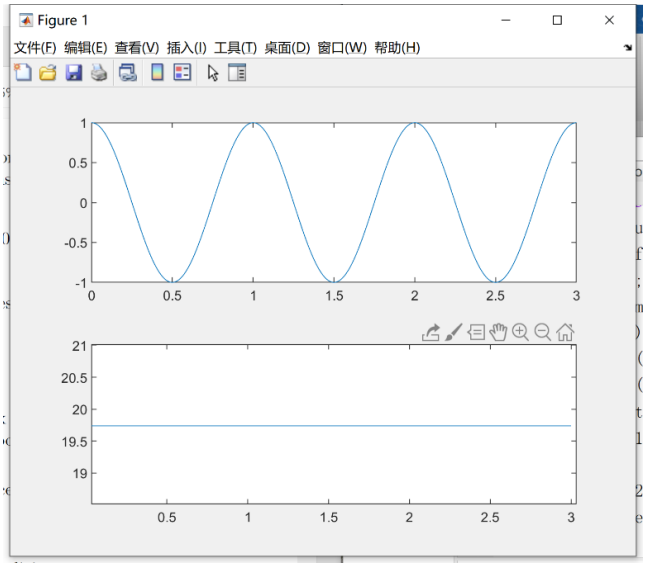
EXO 1

1.1 Code de Matlab :

```
syms q omega0;
equation = 'D2q+omega0^2*q=0';
x= dsolve(equation, 'q(0)=1', 'Dq(0)=0');
vitess = diff(x);
t = 0:0.01:3;
x= subs(x, omega0, 2*pi);
x= subs(x, t);
vitess= subs(vitess, omega0, 2*pi);
vitess= subs(vitess, t);
Etoile = (vitess.^2 + (2*pi)^2*x.^2)/2;
subplot(2,1,1);
plot(t,x);
subplot(2,1,2);
plot(t,Etoile);
```

La solution analytique de q est : q = xp(-pi*t*2i)/2 + exp(pi*t*2i)/2

1.2 Avec le code de 1.1, j'obtiens que le terme $E_\star$ est une constante qui vaut environ 19.7392



Exo 2

2.1

On a d'abord l'équation (1) :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \longrightarrow \ddot{q} = -\omega_0^2 q$$

Puis on peut écrire l'équation différentielle (2) :

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_i \\ \ddot{q}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{pmatrix}$$

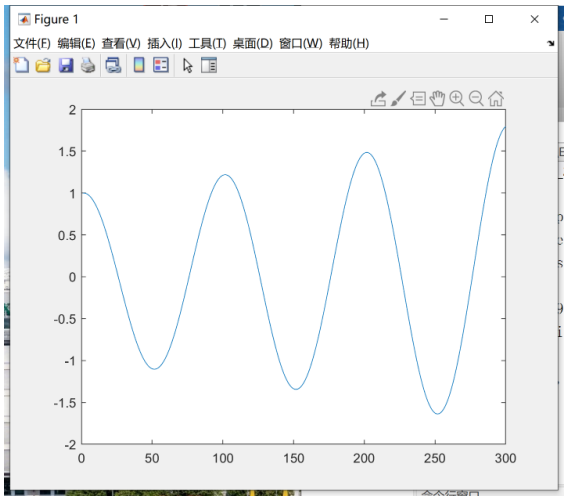
En utilisant la formule (1) et (2) :
On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} q_{i+1} \\ \dot{q}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\Delta t \omega_0^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{pmatrix}$$

2.2
Je choisie la méthode 2 avec un pas de 0.01s

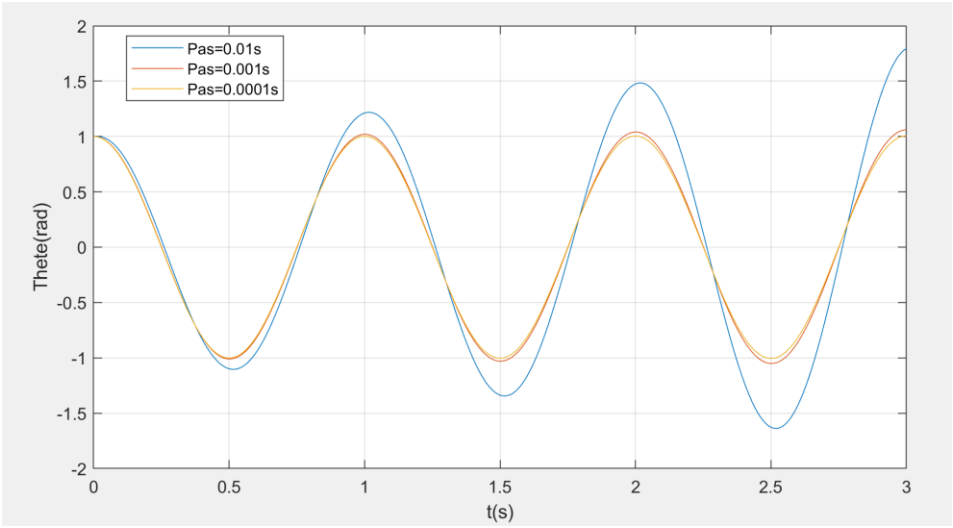
Le code de Matlab:

```
interval = 0.01;
omega = 2*pi;
m = [1,interval;-omega^2*interval,1];
res = zeros(2,300);
res(:,1) = [1;0];
for i=1:299
    res(:,i+1) = m*res(:,i);
end
plot(res(1,:))
```



Cette image est évidemment divergente.

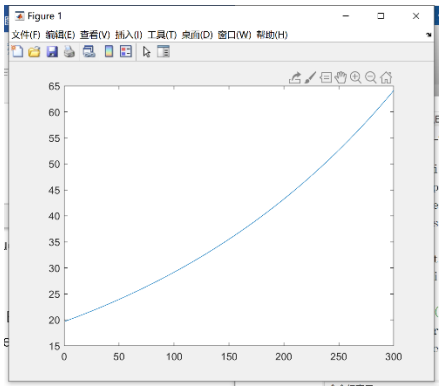
2.3



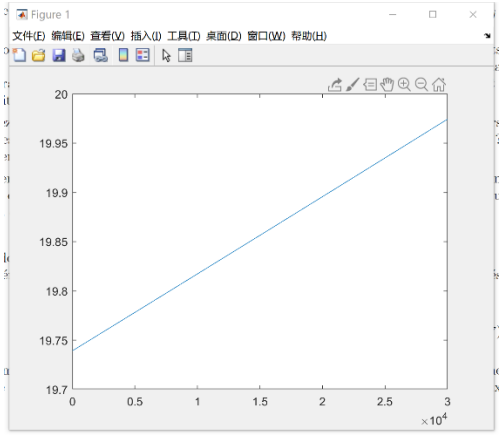
Quand le pas de temps est 0.01s : La solution est évidemment divergente.
Quand on met le pas de temps plus petit, à 0.0001s : C'est peu divergent.

2.4 Le terme E* n'est plus constant. Mais je constate que E* tend vers une value constante quand on met le pas plus petit.

Pour un pas de 0.01s : Ce terme varie entre (20, 65)



Pour un pas de 0.00001s : Ce terme varie entre (19.73, 19.97). Ce qui signifie que c'est plus stable.



2.5

```
>> eig(m)

ans =

   1.0000 + 0.0006i
   1.0000 - 0.0006i
```

Les valeurs propres de cette matrice sont positives, donc le résultat est divergent. Pour le rendre plus stable, il faut que les parties réelles des valeurs propres soient plus petites que 1.

Le code de Matlab :

```
interval = 0.0001;
steps = 3/interval;
omega = 2*pi;
m = [1,interval;-omega^2*interval,1];
res = zeros(2,steps);
res(:,1) = [1;0];
for i=1:(steps-1)
    res(:,i+1) = m*res(:,i);
end
plot(res(1,:))
etoile = (res(2,:).^2+omega^2*res(1,:).^2)/2;
plot(etoile)
```

3. La méthode d'Euler implicite :

$$X_{i+1} = X_i + \Delta t \dot{X}_{i+1}$$

On en déduit :

$$X_{i+1} = X_i + \Delta t \mathcal{M} X_{i+1}$$

Avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\omega_0^2 \end{pmatrix}$$

En fin :

$$X_{i+1} = \left(I - \Delta t \mathcal{M}\right)^{-1} X_i$$

3.1 Je choisie la méthode 2.

Le code de Matlab :

```
interval = 0.01;
steps = 3/interval;
omega = 2*pi;
m = [0,1;-omega^2,0];
M = inv(eye(2)-interval*m);
res = zeros(2,steps);
```

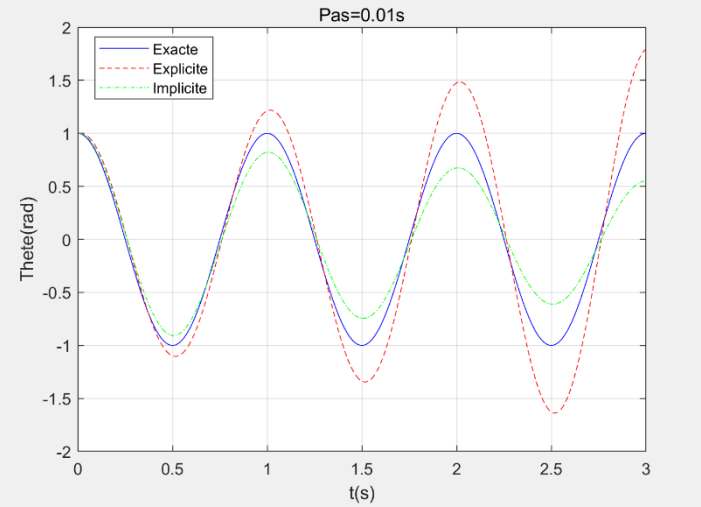
```
res(:,1) = [1;0];
for i=1:(steps-1)
    res(:,i+1) = M*res(:,i);
end
plot(res(1,:))
```

3.2

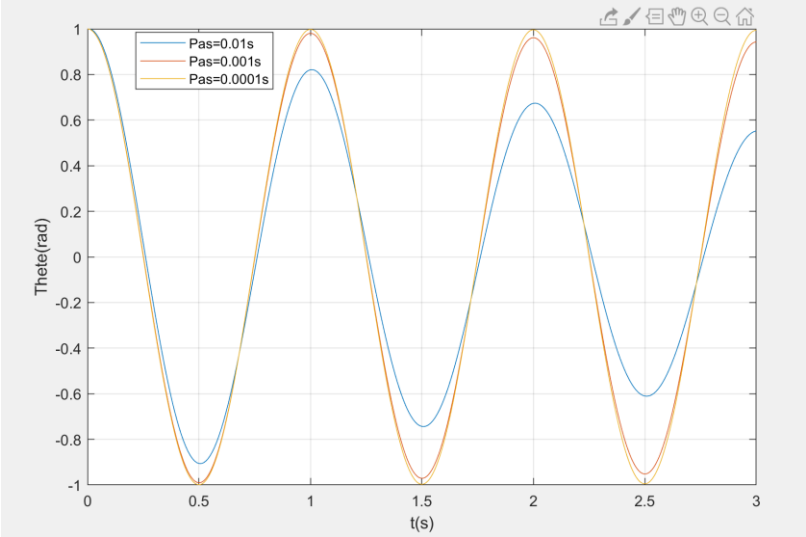
La solution exacte : Stable

EULER explicite : Divergence

EULER implicite : Convergence



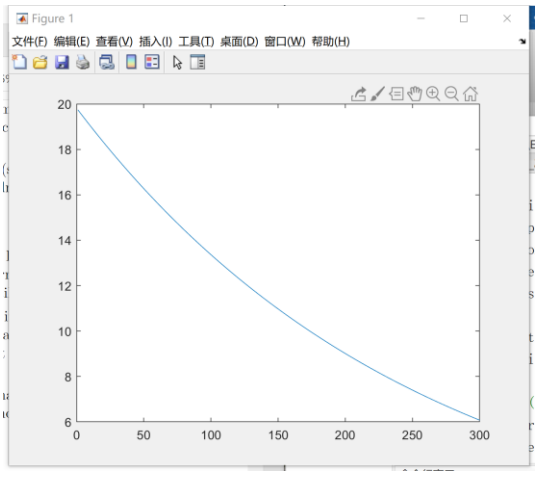
3.3



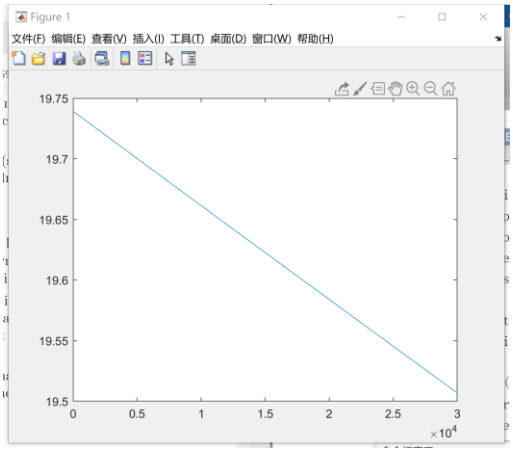
Quand le pas de temps est 0.01s : La solution est évidemment convergente.

Quand on met le pas de temps plus petit, à 0.0001s : C'est peu convergent.

3.4 Cette fois le terme E* est décroissant au pas de 0.01s.



Quand on met le pas de temps plus petit, E* tend aussi vers une constante :
Figure au pas de 0.0001s



Evidemment la variation est plus petite.

3.5

```
>> eig(M)

ans =

   0.9961 + 0.0626i
   0.9961 - 0.0626i
```

Pour le pas de temps 0.01s

Pour rendre le résultat plus stable, il faut que les parties réelles des valeurs propres soient proches de 1.

Exo 4

4.1 Je peux réécrire l'équation (1) comme :

$$\begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \end{pmatrix}$$

Je note

$$y(t) = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \end{pmatrix}$$

Puis je peux écrire :

$$\dot{y}(t) = f(y(t), t)$$

$$\Downarrow$$

$$f(y(t), t) = \mathcal{M} y(t)$$

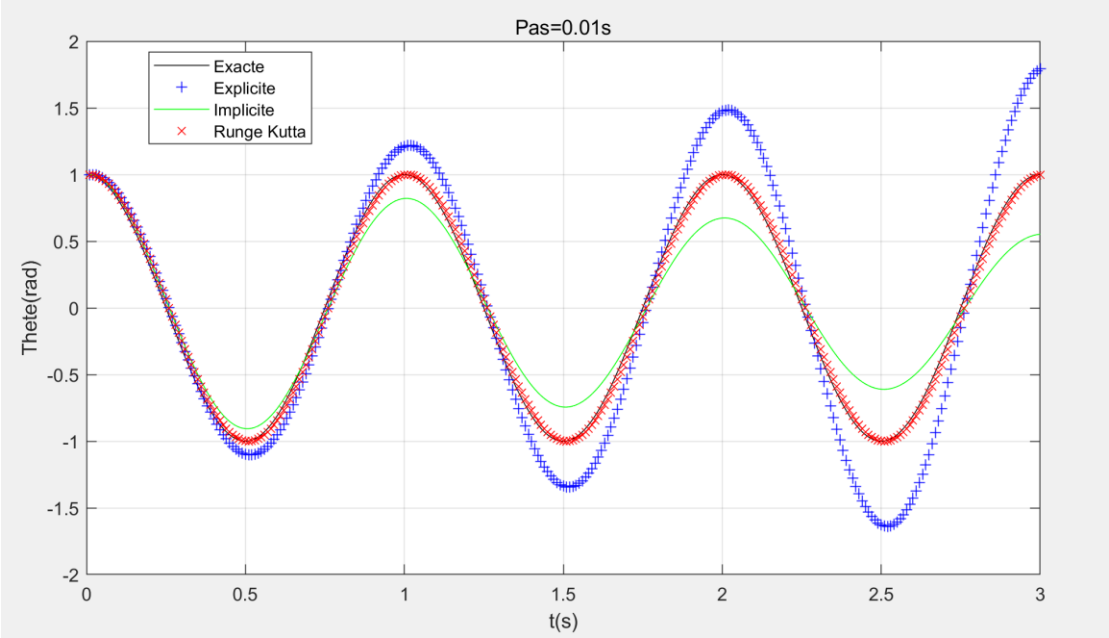
Avec :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 Le code de Matlab :

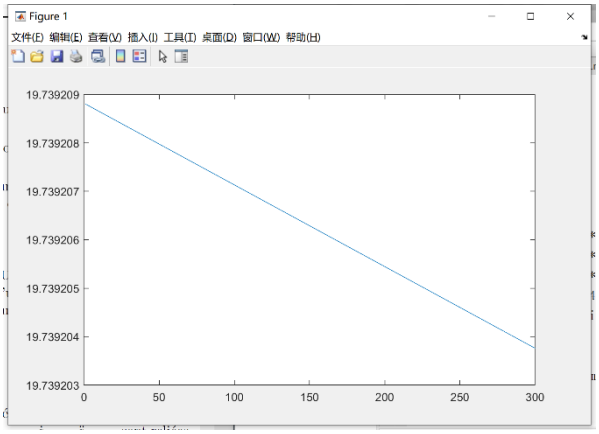
```
interval = 0.01;
steps = 3/interval;
omega = 2*pi;
m = [0,1;-omega^2,0];
res = zeros(2,steps);
res(:,1) = [1;0];
for i=1:(steps-1)
    k1 = m*res(:,i);
    k2 = m*(res(:,i)+k1*interval/2);
    k3 = m*(res(:,i)+k2*interval/2);
    k4 = m*(res(:,i)+k3*interval);
    K = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    res(:,i+1) = res(:,i)+K * interval;
end
plot(res(1,:))
```

4.3



On peut voir que le résultat de Runge Kutta correspond bien au résultat exact pour un pas de temps de 0.01s.
Mais le résultat d'Euler Explicite est divergent, le résultat d'Euler Implicite est convergent.

4.4 La figure de E*, c'est presque une constante.



Conclusion : La méthode de Runge Kutta correspond bien au résultat exacte.

Exo5
5.1
5.1.1 Le code de Matlab :

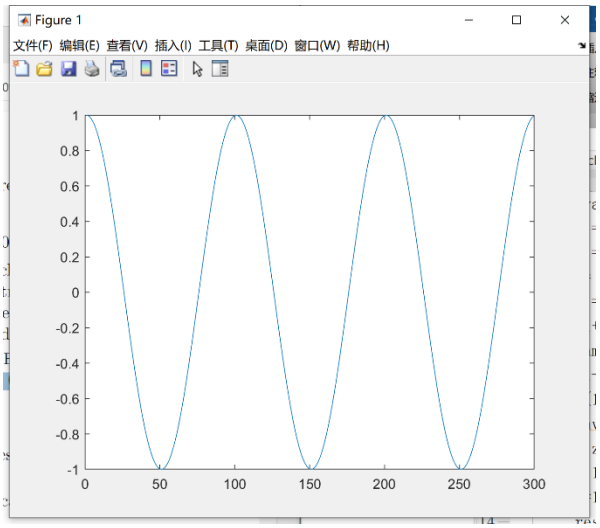
```
interval = 0.01;
steps = 3/interval;
omega = 2*pi;
beta = 0.25;
```

```
gamma = 0.5;
B = [1+beta*interval^2*omega^2 0;
     gamma*interval*omega^2 1];
C = [1-(0.5-beta)*interval^2*omega^2 interval;
     -(1-gamma)*interval*omega^2 1];
A = inv(B)* C;
res = zeros(2,steps);
res(:,1) = [1;0];
for i=1:(steps-1)
     res(:,i+1) = A*res(:,i);
end
plot(res(1,:))
```

La matrice d'amplification :

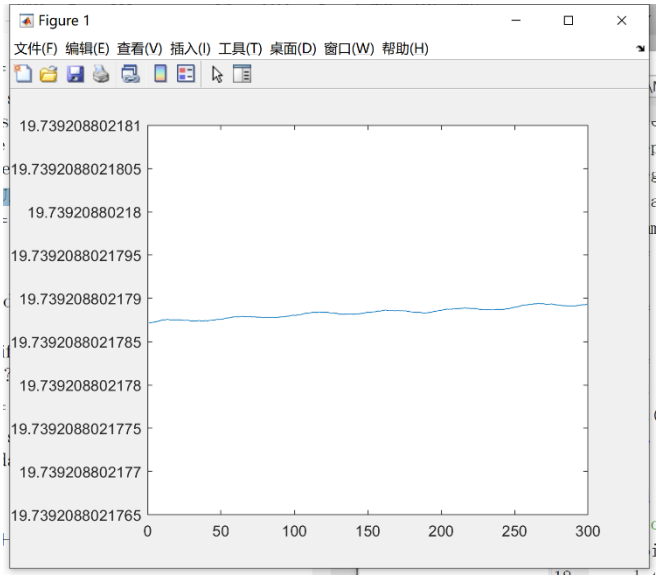
```
A =

    0.9980    0.0100
   -0.3944    0.9980
```

5.1.2 : La solution de NewMark (beta =0.25, gamma=0.5) :



La solution de NewMark est aussi performante que celle de RUNGE KUTTA, elles sont toutes assez stables. Elles sont très proche au résultat exact.
Mais les solutions de EULER explicite et EULER implicite sont pas assez agréables, avec une forte atténuation ou amplification.

5.1.3



La figure de E* de NewMark est encore plus constante que celle de RUNGE KUTTA. C'est très proche du résultat exact.

5.1.4

```
>> eig(A)

ans =

   0.9980 + 0.0628i
   0.9980 - 0.0628i
```

Les parties réelles des matrices d'amplification sont toutes proches de 1.

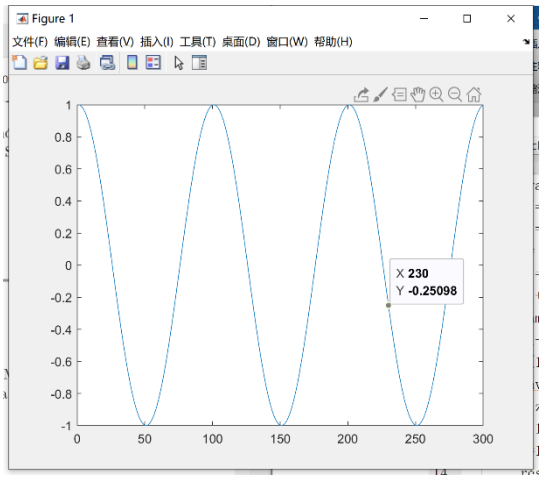
5.2

5.2.1 Le code de Matlab

```
interval = 0.01;
steps = 3/interval;
omega = 2*pi;
beta = 0;
gamma = 0.5;
B = [1+beta*interval^2*omega^2 0;
     gamma*interval*omega^2 1];
C = [1-(0.5-beta)*interval^2*omega^2 interval;
     -(1-gamma)*interval*omega^2 1];
A = inv(B)* C;
res = zeros(2,steps);
res(:,1) = [1;0];
for i=1:(steps-1)
     res(:,i+1) = A*res(:,i);
```

end
plot(res(1,:))

5.2.2



La solution du schéma de NEWMARK avec gamma=0.5, beta=0
Cette solution est aussi performante que celle de RUNGE KUTTA, elles sont toutes assez stables. Elles sont très proche au résultat exact.
Mais les solutions de EULER explicite et EULER implicite sont pas assez agréables, avec une forte atténuation ou amplification.