Michel GAO Minghui 15241017 ZY1924105

Exo 3 Etude d'un double pendule avec l'hypothèse des petits mouvements

3.1 On a d'abord la relation (1) :

$$ma^2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix} + mga\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = F_0 sin(\omega t)\begin{pmatrix}a\\ \frac{a}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Je note $q = \begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}$ et $\ddot{q} = \begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix}$

Maintenant je simplifie la relation (1) :

$$\ddot{q}_n = -\frac{g}{a}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix} q_n + \frac{F}{ma^2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\sin\omega t\begin{pmatrix}a\\ \frac{a}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Je note $\mathcal{M} = -\frac{g}{a}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ et $F(t) = \frac{F}{ma^2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\sin\omega t\begin{pmatrix}a\\ \frac{a}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ pour simplifier la notation.

On a :

$$\ddot{q}_n = \mathcal{M} q_n + F(t)$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \mathcal{M} q_{n+1} + F(t + \Delta t)$$

En considérant que $\beta = 0$ et $\gamma = 0.5$, on déduit les relations (2) et (3) données par l'exo :

$$q_{n+1} = \left(I + \frac{1}{2}\Delta t^2\mathcal{M}\right) q_n + \Delta t\dot{q}_n + \frac{1}{2}\Delta t^2 F(t)$$

$$\dot{q}_{n+1} - \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} q_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} q_n + \frac{1}{2}\Delta t\left(F(t) + F(t + \Delta t)\right)$$

On peut écrire la relation suivante :

$$\begin{pmatrix}I & 0\\ -\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{n+1}\\ \dot{q}_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I + \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\Delta t\\ \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_n\\ \dot{q}_n\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\Delta t^2 I & 0\\ \Delta t I & \Delta t I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F(t)\\ F(t + \Delta t)\end{pmatrix}$$

On obtient la matrice B et C du schéma de NewMark :

$$B = \begin{pmatrix}I & 0\\ -\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}I + \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\Delta t\\ \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\end{pmatrix}$$

3.1.1

Donc la matrice d'amplification $A = B^{-1}C$

$$A = \begin{pmatrix}I & 0\\ -\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}I + \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\Delta t\\ \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\end{pmatrix}$$

3.1.2

Il faut trouver le plus grand pas de temps qui satisfait la condition : $|\lambda_i| \leq 1, \forall i$. λ est une valeur propre de la matrice d'amplification.

Après beaucoup d'essais, je trouve un pas de temps $\boldsymbol{\Delta t} = \mathbf{0.05971s}$ qui satisfait cette condition.

Les valeurs propres relatives sont -0.9999 + 0.0000i, 0.8182 + 0.0890i, 0.8182 - 0.0890i, 0.8806 + 0.0000i

3.1.3

$$\ddot{q}_0 = -\frac{g}{a}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} q_0$$

$$\dot{q}_0 = \begin{pmatrix} -1.31519275 \\ -1.85996342 \end{pmatrix}$$

3.1.4

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I+\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\Delta t \\ \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Delta t^2 I & 0 \\ \Delta t I & \Delta t I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F(t) \\ F(t+\Delta t) \end{pmatrix}$$

$$\ddot{q}_n = \mathcal{M} q_n + F(t)$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \mathcal{M} q_{n+1} + F(t+\Delta t)$$

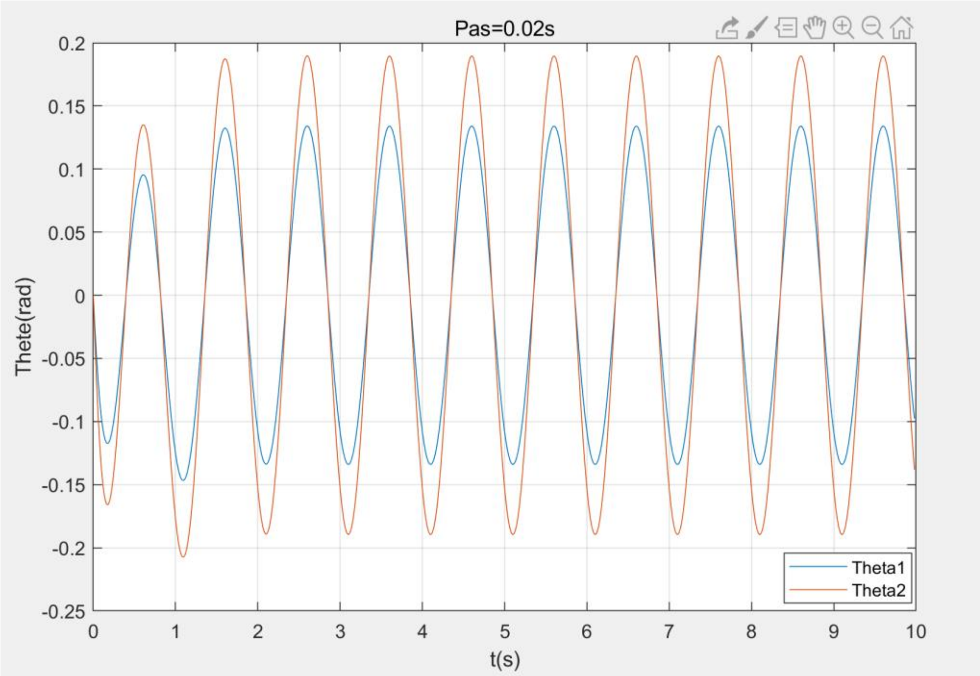
Avec $\mathcal{M} = -\frac{g}{a}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $F(t) = \frac{F}{ma^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sin\omega t \begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3.1.5

Le code de Matlab :

```
m = 2;
a = 0.5;
g = 9.81;
F0 = 20;
omega = 2*pi;
pas = 0.02; % temps critique = 0.05971s
interval = 10;
time_list = pas:pas:interval;
steps = floor(interval/pas);
M = -g/a*[2 -1; -2 2];
I = eye(2);
B = [I I*0; -M*pas/2 I];
C = [I+M*pas/2 I*pas; pas*M/2 I];
F = [I*pas^2/2 0*I;pas*I/2 pas*I/2];
A = inv(B)*C;
eig(A);
resNM = zeros(4,steps);
resNM(:,1) = [0;0;-1.31519275;-1.85996342]; % initialisation
for i=1:(steps-1)
    Fi0 = F0/(m*a^2)*[1 -1;-1 2]*sin(omega*time_list(i))*[a;a/sqrt(2)];
    Fi1 = F0/(m*a^2)*[1 -1;-1 2]*sin(omega*time_list(i+1))*[a;a/sqrt(2)];
    resNM(:,i+1) = A*resNM(:,i) + inv(B)*F*[Fi0;Fi1];
```

```
end
plot(time_list, resNM(1,:), time_list, resNM(2,:))
legend('Theta1','Theta2');
```



3.1.6

Pour $t = 0s$:

$$q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.31519275 \\ -1.85996342 \end{pmatrix} \quad \ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pout $t = \Delta t$:

$$q(t) = \begin{pmatrix} -0.0263 \\ -0.0372 \end{pmatrix} \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.3048 \\ -1.8453 \end{pmatrix} \quad \ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} 1.0365 \\ 1.4658 \end{pmatrix}$$

Pour $t = 2\,\Delta t$:

$$q(t) = \begin{pmatrix} -0.0492 \\ -0.0696 \end{pmatrix} \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.2742 \\ -1.8020 \end{pmatrix} \quad \ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} 2.0226 \\ 2.8604 \end{pmatrix}$$

Pour $t = 0.5s$:

$$q(t) = \begin{pmatrix} 0.0670 \\ 0.0948 \end{pmatrix} \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} 0.8505 \\ 1.2028 \end{pmatrix} \quad \ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} -0.7700 \\ -1.0890 \end{pmatrix}$$

3.2

On a d'abord la relation (1) :

$$ma^2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix}+mga\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}=F_0 sin(\omega t)\begin{pmatrix}a\\ \frac{a}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Je note $q=\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}$ et $\ddot{q}=\begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix}$

Maintenant je simplifie la relation (1) :

$$\ddot{q}_n=-\frac{g}{a}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}q_n+\frac{F}{ma^2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\sin\omega t\begin{pmatrix}a\\ \frac{a}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Je note $\mathcal{M}=-\frac{g}{a}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ et $F(t)=\frac{F}{ma^2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\sin\omega t\begin{pmatrix}a\\ \frac{a}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ pour simplifier la notation.

On a :

$$\ddot{q}_n=\mathcal{M}q_n+F(t)$$

$$\ddot{q}_{n+1}=\mathcal{M}q_{n+1}+F(t+\Delta t)$$

En considérant que $\beta=0.25$ et $\gamma=0.5$, on déduit les relations (2) et (3) données par l'exo :

$$q_{n+1}=q_n+\Delta t\dot{q}_n+0.25\Delta t^2\left(\mathcal{M}q_n+\mathcal{M}q_{n+1}+F(t)+F(t+\Delta t)\right)$$

$$\dot{q}_{n+1}=\dot{q}_n+0.5\Delta t\left(\mathcal{M}q_n+\mathcal{M}q_{n+1}+F(t)+F(t+\Delta t)\right)$$

On peut écrire la relation suivante :

$$\begin{pmatrix}I-0.25\Delta t^2 M & 0\\ -\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{n+1}\\ \dot{q}_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I+\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\Delta t\\ \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_n\\ \dot{q}_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.25\Delta t^2 I & 0.25\Delta t^2 I\\ 0.5\Delta tI & 0.5\,\Delta tI\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F(t)\\ F(t+\Delta t)\end{pmatrix}$$

On obtient la matrice B et C du schéma de NewMark :

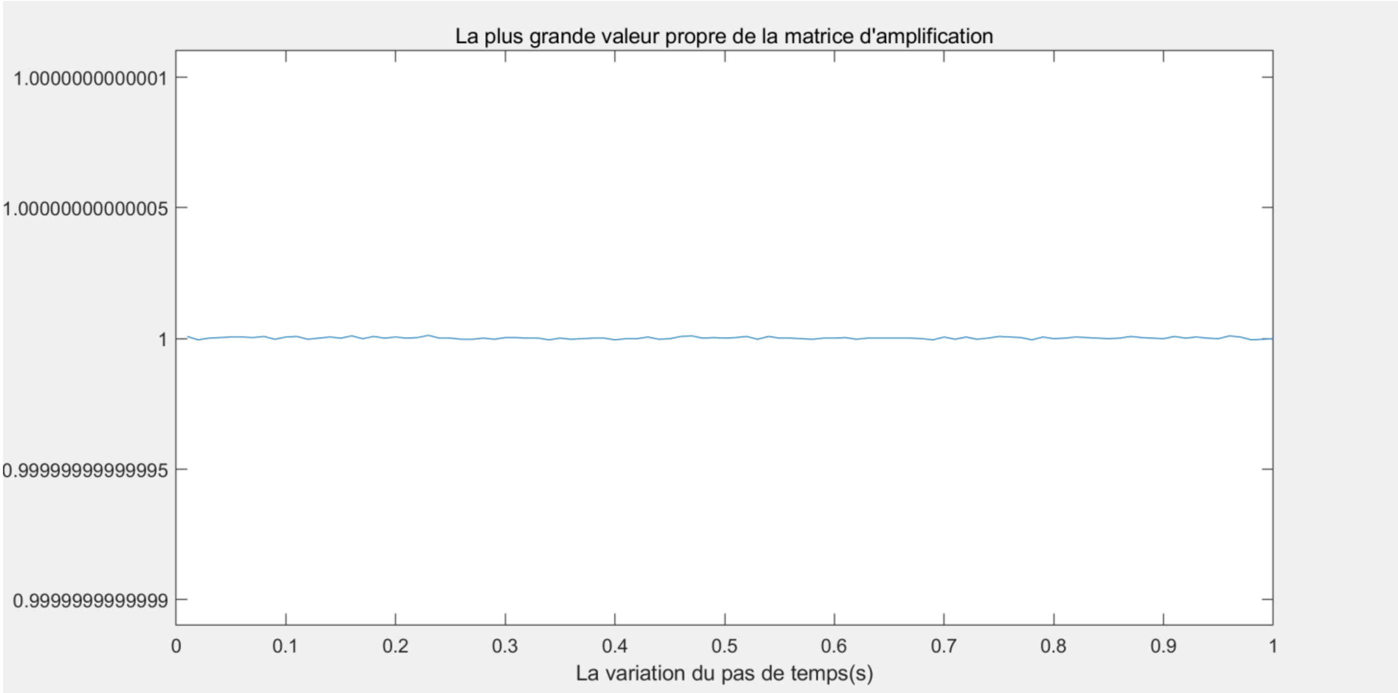
$$B=\begin{pmatrix}I-0.25\Delta t^2 M & 0\\ -\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}I+\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\Delta t\\ \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\end{pmatrix}$$

3.2.1 La matrice d'amplification $A=B^{-1}C$

$$A=\begin{pmatrix}I-0.25\Delta t^2 M & 0\\ -\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}I+\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\Delta t\\ \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{M} & I\end{pmatrix}$$

3.2.2



La plus grande valeur propre de la matrice d'amplification vaut toujours 1
Alors, il n'y a plus de temps critique pour cette méthode, car tout pas possible est le temps critique.

3.2.3

$$\ddot{q}_0 = -\frac{g}{a}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} q_0$$

$$\dot{q}_0 = \begin{pmatrix} -1.31519275 \\ -1.85996342 \end{pmatrix}$$

3.2.4

$$\begin{pmatrix} I - 0.25\Delta t^2 M & 0 \\ -\frac{1}{2}\Delta t \mathcal{M} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + \frac{1}{2}\Delta t \mathcal{M} & I\Delta t \\ \frac{1}{2}\Delta t \mathcal{M} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25\Delta t^2 I & 0.25\Delta t^2 I \\ 0.5\Delta t I & 0.5\,\Delta t I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F(t) \\ F(t+\Delta t) \end{pmatrix}$$

$$\ddot{q}_n = \mathcal{M} q_n + F(t)$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \mathcal{M} q_{n+1} + F(t+\Delta t)$$

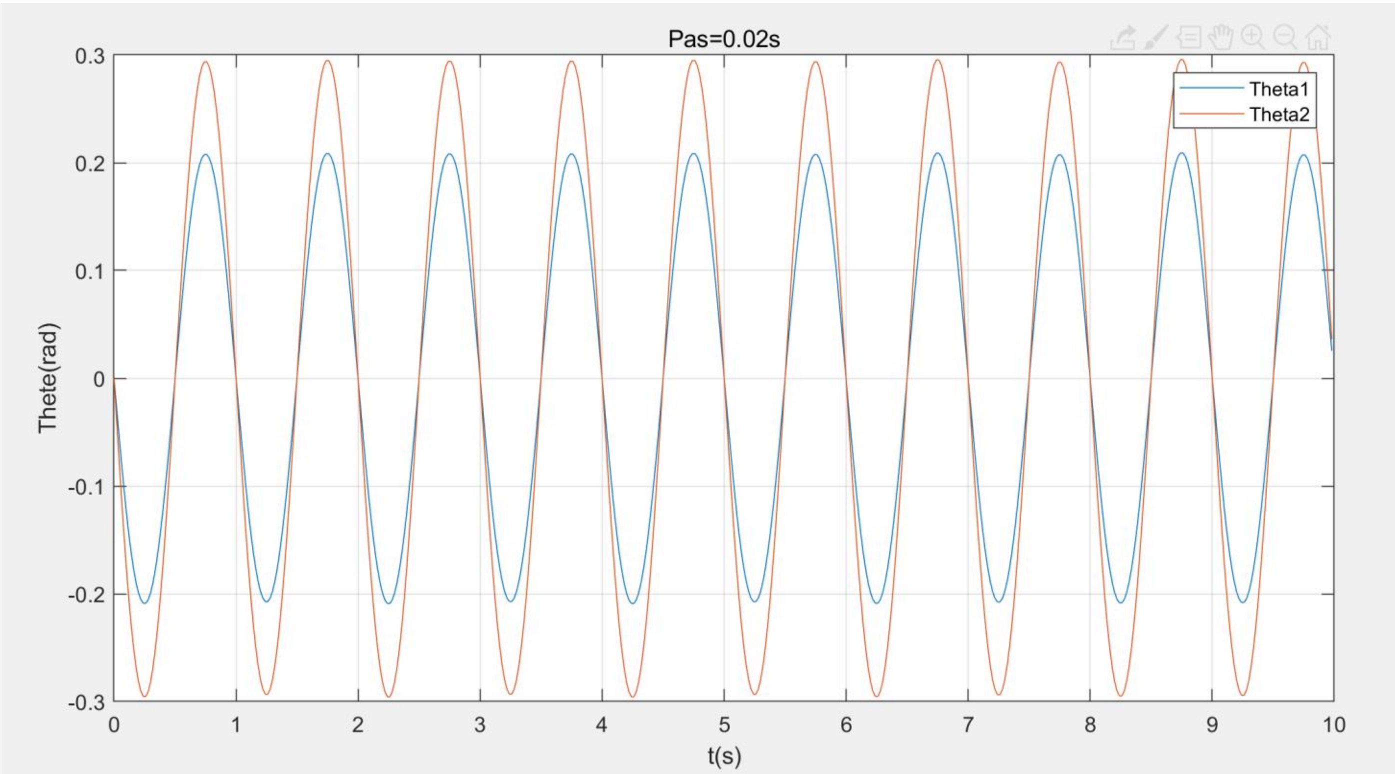
Avec $\mathcal{M} = -\frac{g}{a}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $F(t) = \frac{F}{ma^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sin \omega t \begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3.2.5

Le code de Matlab :

```
clear all;
close all;
m = 2;
a = 0.5;
```

```
g = 9.81;
F0 = 20;
omega = 2*pi;
pas = 0.02;
interval = 10;
time_list = 0:pas:interval-pas;
steps = floor(interval/pas);
M = -g/a*[2 -1; -2 2];
I = eye(2);
B = [I-0.25*pas^2*M I*0;-M*pas/2 I];
C = [I+0.25*M*pas^2 I*pas; pas*M/2 I];
F = [0.25*I*pas^2 0.25*I*pas^2;pas*I/2 pas*I/2];
A = inv(B)*C;
eig(A);
resNM = zeros(4,steps);
resNM(:,1) = [0;0;-1.31519275;-1.85996342];
for i=1:(steps-1)
    Fi0 = F0/(m*a^2)*[1 -1;-1 2]*sin(omega*time_list(i))*[a;a/sqrt(2)];
    Fi1 = F0/(m*a^2)*[1 -1;-1 2]*sin(omega*time_list(i+1))*[a;a/sqrt(2)];
    resNM(:,i+1) = A*resNM(:,i) + inv(B)*F*[Fi0;Fi1];
end
plot(time_list, resNM(1,:), time_list, resNM(2,:))
legend('Theta1','Theta2');
ylabel('Thete(rad)')
xlabel('t(s)')
title('Pas=0.02s')
grid on;
```



3.2.6 $\Delta t = 0.02$

Pour $t = 0s$:

$$q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.3152 \\ -1.8600 \end{pmatrix}$$

Pout $t = \Delta t$:

$$q(t) = \begin{pmatrix} -0.0262 \\ -0.0371 \end{pmatrix} \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.3048 \\ -1.8453 \end{pmatrix}$$

Pour $t = 2\,\Delta t$:

$$q(t) = \begin{pmatrix} -0.0520 \\ -0.0735 \end{pmatrix} \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.2739 \\ -1.8016 \end{pmatrix}$$

Pour $t = 0.5s$:

$$q(t) = \begin{pmatrix} -0.0009 \\ -0.0013 \end{pmatrix} \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} 1.3124 \\ 1.8561 \end{pmatrix}$$