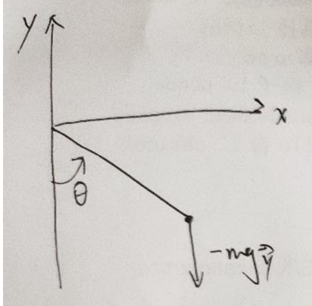
DEVOIR 1

A. Retrouver l'équation du mouvement du pendule simple avec les équations de Lagrange :



$$E_c = \frac{I}{2}\dot\theta^2$$
$$E_p = -mgd\cos\theta + Cte$$
$$\delta W = 0$$
$$L = E_c - E_p = \frac{I}{2}\dot\theta^2 + mgd\cos\theta - Cte$$

équations Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right] - \frac{\partial L}{\partial\theta} = Q_i$$

avec :

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = I\dot\theta$$
$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -mgd\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{I\ddot\theta + mgd\sin\theta = 0}$$
$$Q_i = 0$$

B. Écrire un rapport avec vos lignes de code en Matlab ou Scilab sur l'exercice *Oscillateur conservatif à un degré de liberté :*

1.1

```
syms q;
q=dsolve('D2q+4*pi*pi*q=0','q(0)=1','Dq(0)=0')
```

Résultat :

q = cos(2*pi*t)

1.2

```
Estar=0.5*((2*pi*q)^2+diff(q)^2)
```

Résultat :

Estar =2*pi^2*sin(2*pi*t)^2 + 2*pi^2*cos(2*pi*t)^2

donc Estar=2*pi^2

on peut trouve que Estar est un constant

2.1

$$\ddot q_j + w_0^2 q_j = 0$$
$$\Rightarrow \ddot q_j = -w_0^2 q_j$$

avec $\begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t\,\dot q_j \\ \dot q_{j+1} = \dot q_j + \Delta t\,\ddot q_j \end{cases}$ donc $\dot q_{j+1} = \dot q_j - w_0^2 \Delta t\, q_j$

donc $\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot q_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -w_0^2\Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_j \\ \dot q_j \end{vmatrix}$

2.2

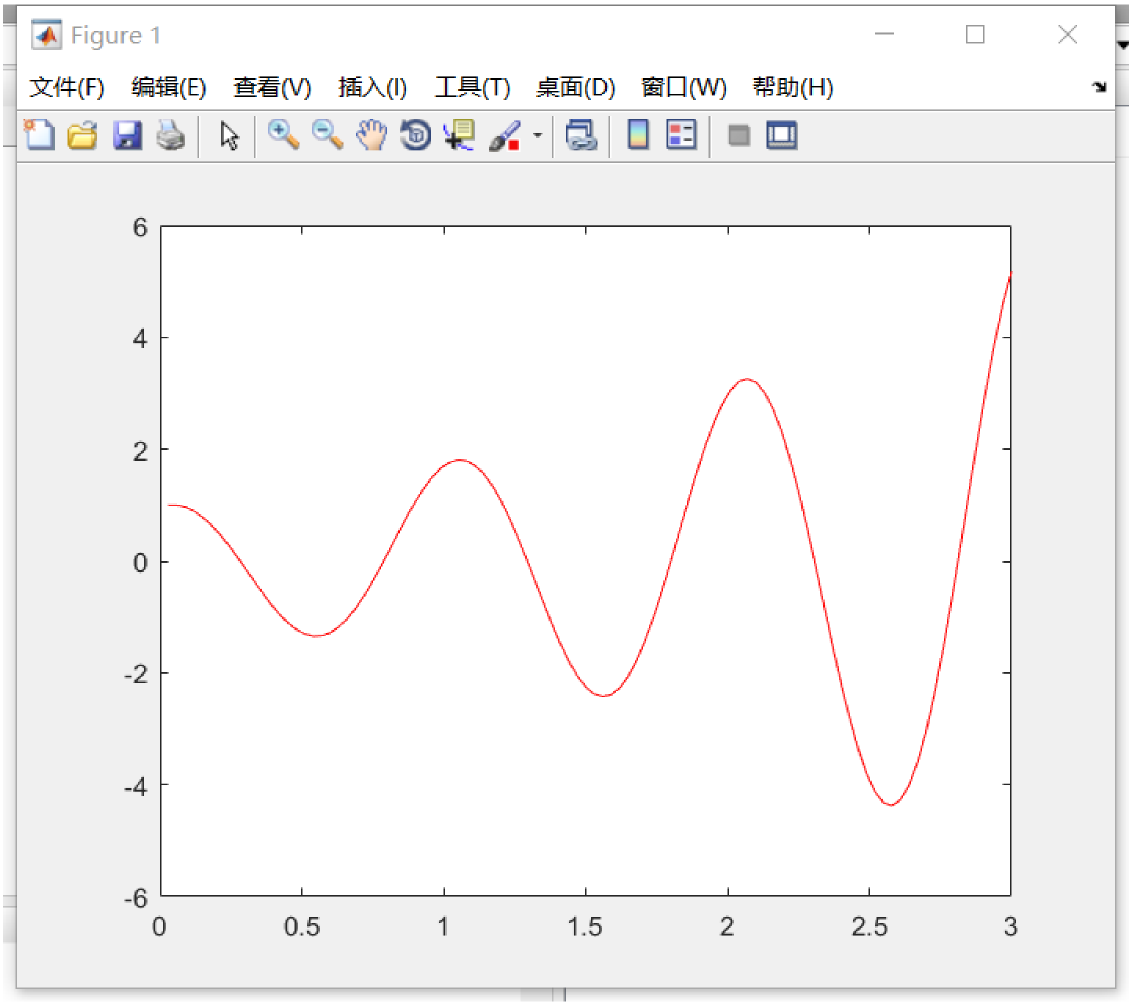
par méthode 1 :

```
q0=1;
d1q0=0;
d2q0=-4*pi^2;
A=[q0,d1q0,d2q0];
deltat=0.003;
w0=2*pi;
t=0.003:0.003:3
for j=2:1000
    A(j,1)=A(j-1,1)+deltat*A(j-1,2);
    A(j,2)=A(j-1,2)+deltat*A(j-1,3);
    A(j,3)=-w0^2*A(j,1);
end;
 plot(t,A(:,1),'r-')
```

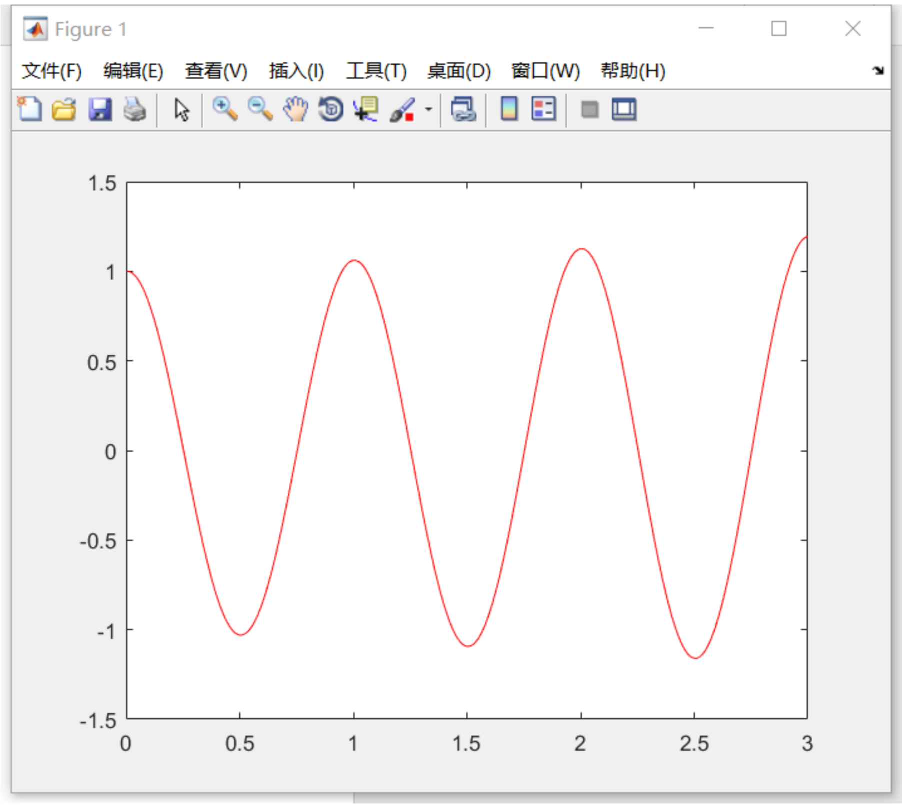
2.3

résultat:

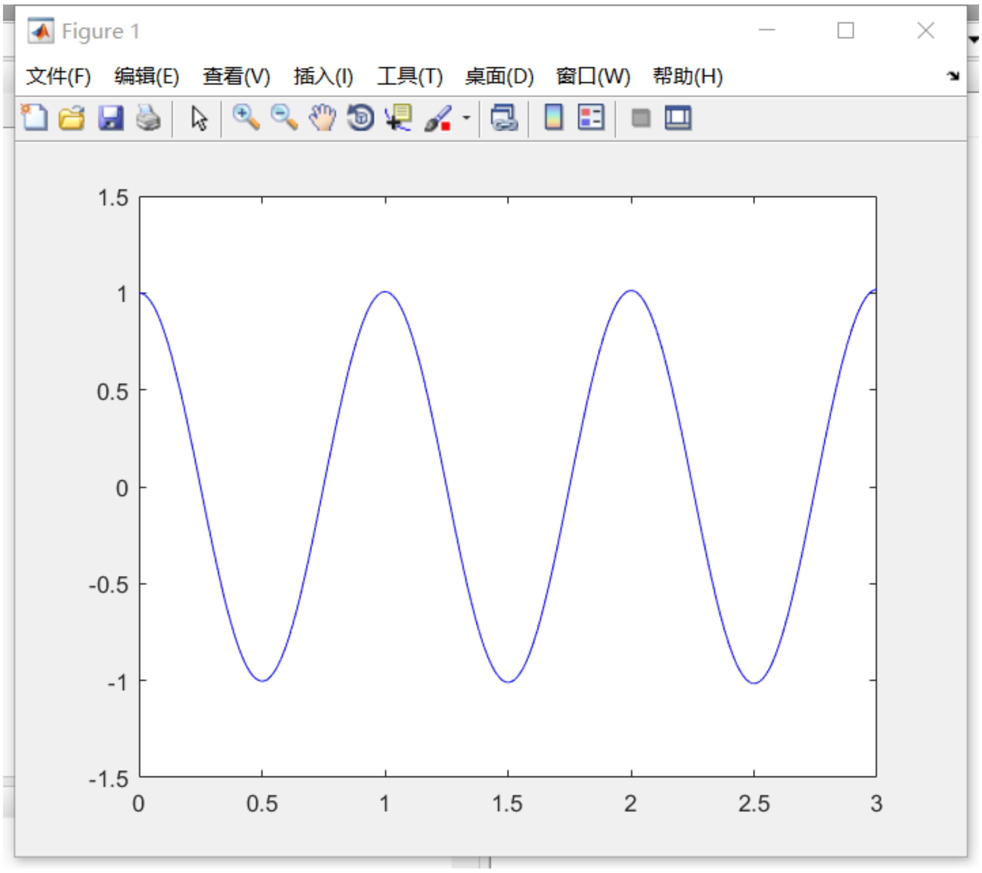
n=100,



n=1000，



n=10000



On peut voir que quand n devient grand c'est-à-dire que dt devient petit, la divergence devient lente.

2.4

Estar(exact)= Estar=2*pi^2=19.7392088

```
E=0.5*(power(2*pi*A(:,1),2)+power(A(:,2),2))
```

n=100:

E — 100x1 double

	1
1	19.7392
2	20.4406
3	21.1668
4	21.9189
5	22.6977
6	23.5041
7	24.3393
8	25.2040
9	26.0996
10	27.0269
11	27.9872
12	28.9816
13	30.0113
14	31.0776
15	32.1818
16	33.3253
17	34.5093

E — 100x1 double

	1
85	370.6940
86	383.8650
87	397.5039
88	411.6275
89	426.2528
90	441.3979
91	457.0810
92	473.3213
93	490.1387
94	507.5536
95	525.5873
96	544.2617
97	563.5996
98	583.6247
99	604.3612
100	625.8345

n=10000

E — 10000x1 double

	1
1	19.7392
2	19.7393
3	19.7393
4	19.7394
5	19.7395
6	19.7396
7	19.7396
8	19.7397
9	19.7398
10	19.7398
11	19.7399
12	19.7400
13	19.7401
14	19.7401
15	19.7402
16	19.7403
17	19.7403

E — 10000x1 double

	1
9984	20.4519
9985	20.4520
9986	20.4521
9987	20.4521
9988	20.4522
9989	20.4523
9990	20.4524
9991	20.4524
9992	20.4525
9993	20.4526
9994	20.4527
9995	20.4527
9996	20.4528
9997	20.4529
9998	20.4529
9999	20.4530
10000	20.4531

on peut voir que Estar diverge,mais n plus grand, il diverge plus lente.

2.5 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\Delta t \\ \omega_0^2 \Delta t & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + \omega^2 \Delta t^2$$

$$\lambda = \frac{2 \pm i\omega\Delta t}{2}$$

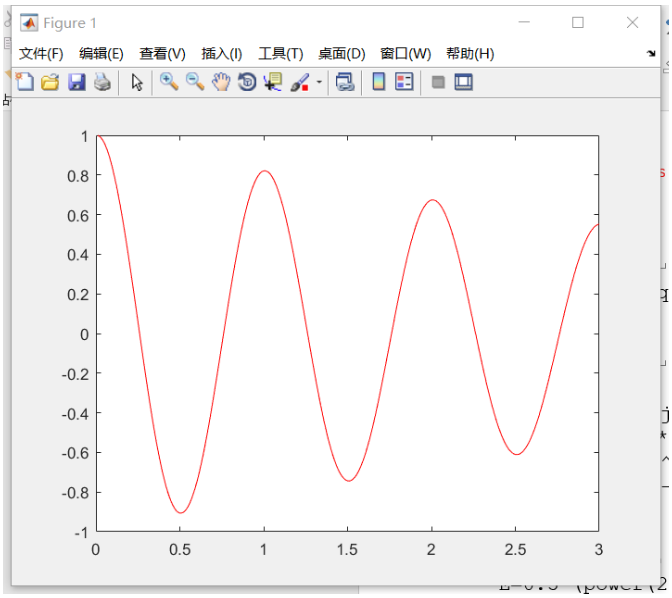
donc, avec deux valeurs propres de parties réelles positives, il est toujours diverge.

3.1 :

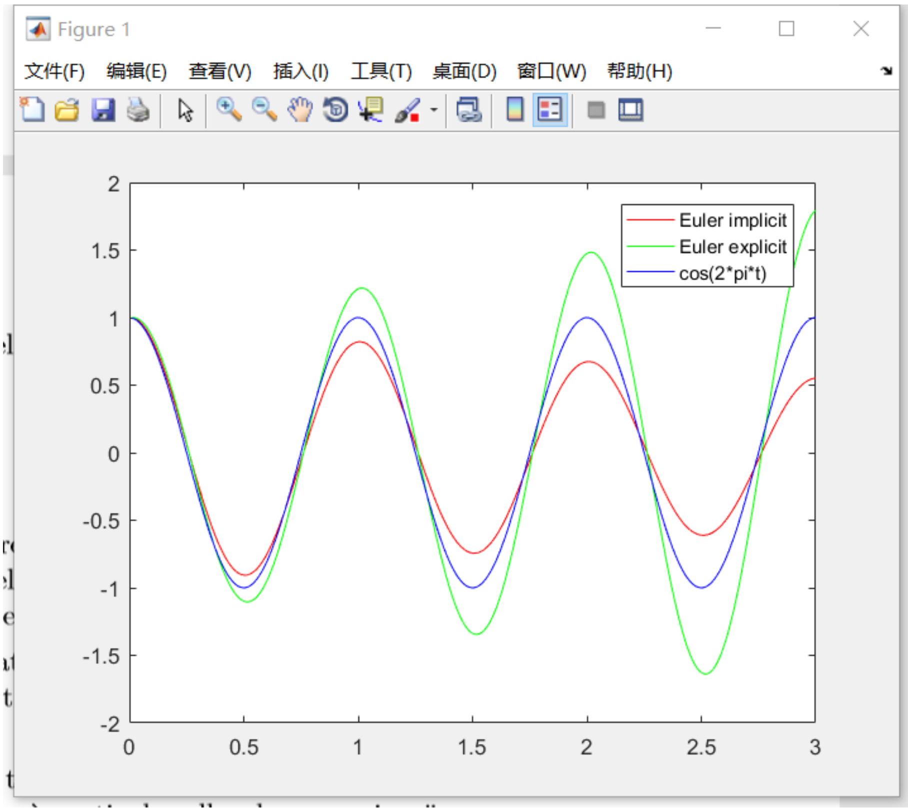
```
q0=1;
d1q0=0;
d2q0=-4*pi^2;
A=[q0,d1q0,d2q0];
deltat=0.01;
w0=2*pi;
t=0.01:0.01:3
for j=2:300
    A(j,1)=(A(j-1,1)+deltat*A(j-
1,2))/(1+w0^2*deltat^2);
    A(j,3)=-w0^2*A(j,1);
    A(j,2)=A(j-1,2)+deltat*A(j,3);
end;

 plot(t,A(:,1),'r-')
E=0.5*(power(2*pi*A(:,1),2)+power(A(:,2),2))
```

résultat :

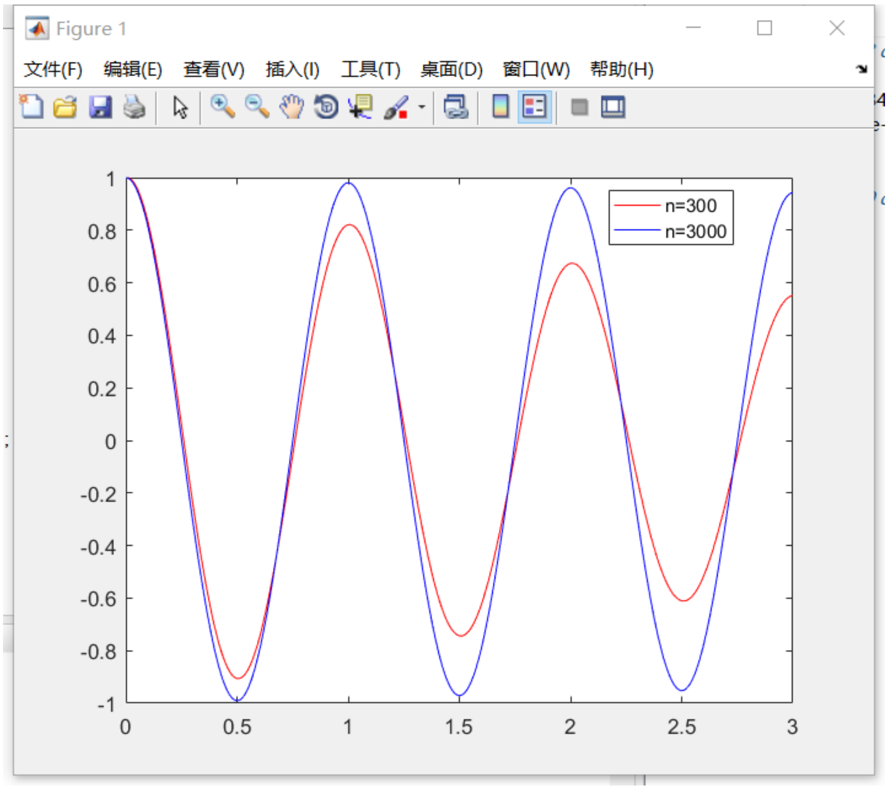


3.2



Comme on voit, la solution exacte est la plus bonne, EULER explicite diverge et EULER implicite converge.

3.3



Comme on voit, pour Euler implicite,si n plus grand, plus l'att´enuation des oscillations est faible.

3.4 :

E300 | 300x1 douk — E300 | 300x1 doul

	1		1
1	19.7392	285	6.4471
2	19.6616	286	6.4217
3	19.5843	287	6.3965
4	19.5073	288	6.3713
5	19.4306	289	6.3463
6	19.3541	290	6.3213
7	19.2780	291	6.2965
8	19.2022	292	6.2717
9	19.1267	293	6.2470
10	19.0515	294	6.2225
11	18.9766	295	6.1980
12	18.9020	296	6.1736
13	18.8276	297	6.1494
14	18.7536	298	6.1252
15	18.6799	299	6.1011
16	18.6064	300	6.0771
17	18.5332		

n=300,deltat=0.01s, Comme on voit que, la valeur de Estar de EULER implicite diminue.

E3000 | 3000x1 doul — E3000 | 3000x1 douk

	1		1
1	19.7392	2983	17.5470
2	19.7384	2984	17.5463
3	19.7377	2985	17.5456
4	19.7369	2986	17.5450
5	19.7361	2987	17.5443
6	19.7353	2988	17.5436
7	19.7345	2989	17.5429
8	19.7338	2990	17.5422
9	19.7330	2991	17.5415
10	19.7322	2992	17.5408
11	19.7314	2993	17.5401
12	19.7306	2994	17.5394
13	19.7299	2995	17.5387
14	19.7291	2996	17.5380
15	19.7283	2997	17.5373
16	19.7275	2998	17.5366
17	19.7267	2999	17.5359

n=3000,deltat=0.001s,quand deltat est plus petit,il diminue plus lente.

3.5 :

```
B=inv([1 -deltat;w0^2*deltat 1]);
```

```
[X2,B1]=eig(B)
```

résultat :

X2 =

0.0000 - 0.1572i   0.0000 + 0.1572i

0.9876 + 0.0000i   0.9876 + 0.0000i

B1 =

0.9961 + 0.0626i   0.0000 + 0.0000i

0.0000 + 0.0000i   0.9961 - 0.0626i

stable.