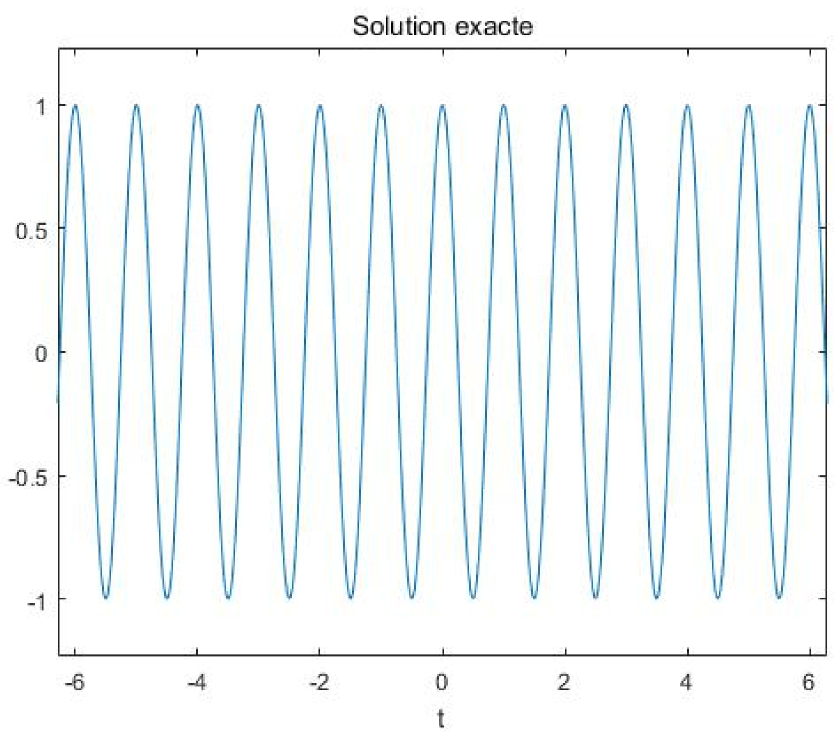
Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

Mathis   Wang Bingchen   15241050   SY1924131

1.1

```
%Solutions analytique de l'equation
w0=2*pi; q0=1; Dq0=0;T0=3;
syms q
eq = 'D2q = -4*pi*pi*q';
q = dsolve(eq, 'q(0) = 1', 'Dq(0) = 0')
ezplot(q)
title('Solution exacte')
```

```
q =
cos(2*pi*t)
```



1.2

```
%Dq = -2*pi*sin(2*pi*t)%Eetoile = 0.5*(Dq*Dq+4*pi*pi*q*q)=2*pi*pi

Eetoile = 2*pi*pi;
```

2.1

On a:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t \times \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix}$$

Donc on a:

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} + \Delta t \times \begin{pmatrix} \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 q_j \end{pmatrix}$$

Bien entendu, on obtient:

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix}$$

2.2

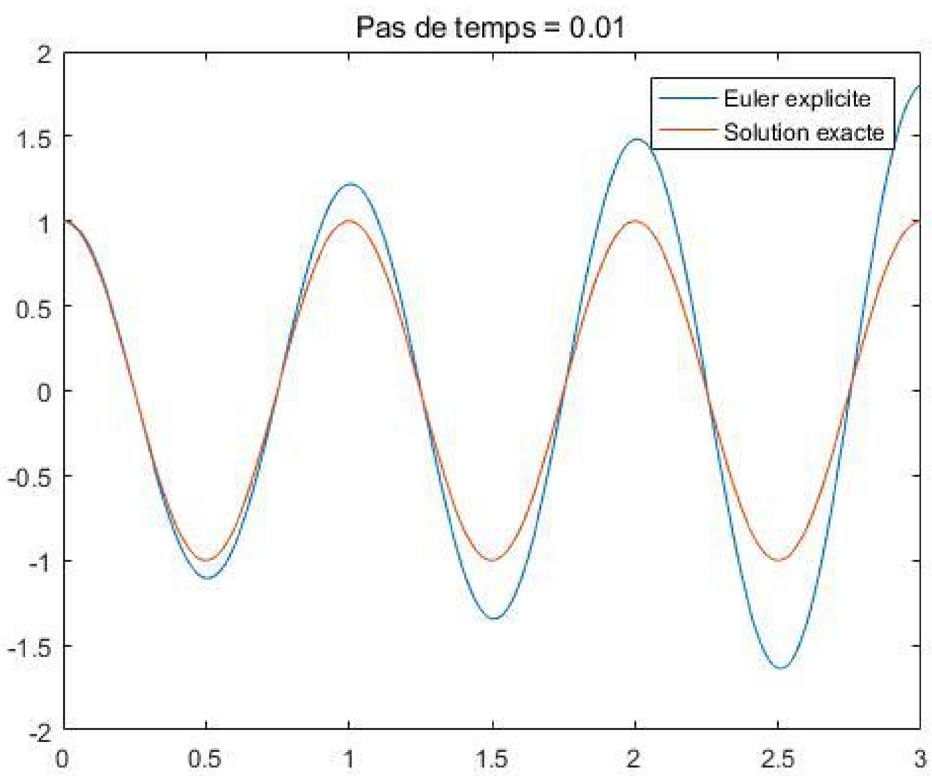
```
%Euler explicite ;

n=300; dt = T0/n;

t = 0:dt:T0;

A1 = [1,dt;-w0*w0*dt,1];

U1(:,1) = [q0;Dq0];for j = 2:length(t)

    U1(:,j) = A1*U1(:,j-1);end

clf;

plot(t,U1(1,:))

hold on ;
```

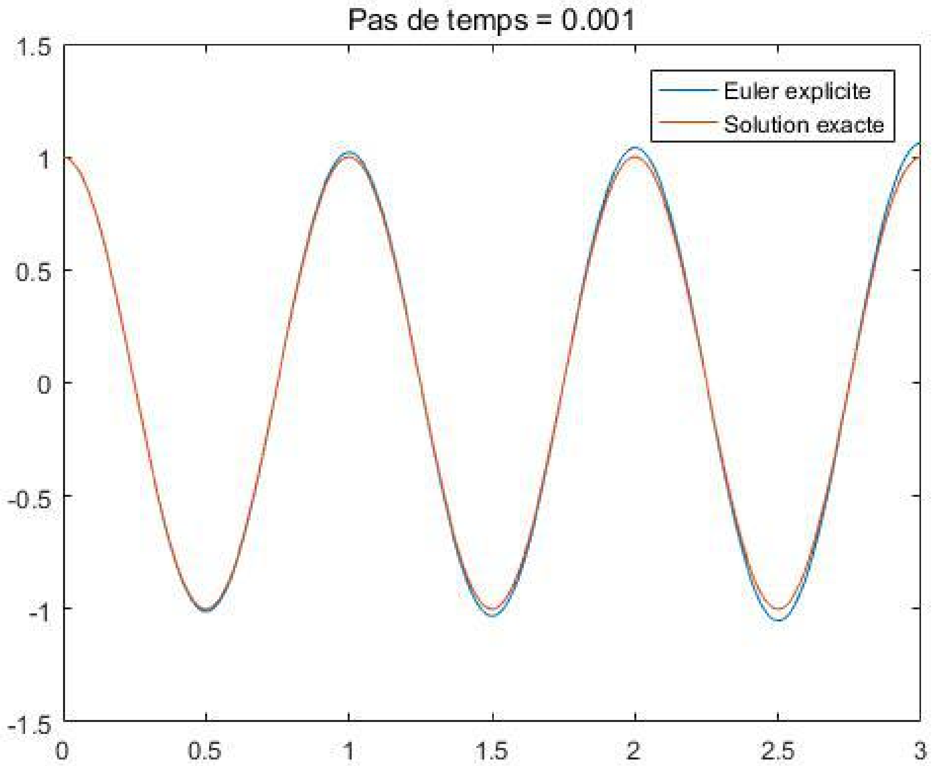
```
plot(t,cos(2*pi*t))

legend('Euler explicite','Solution exacte')
```

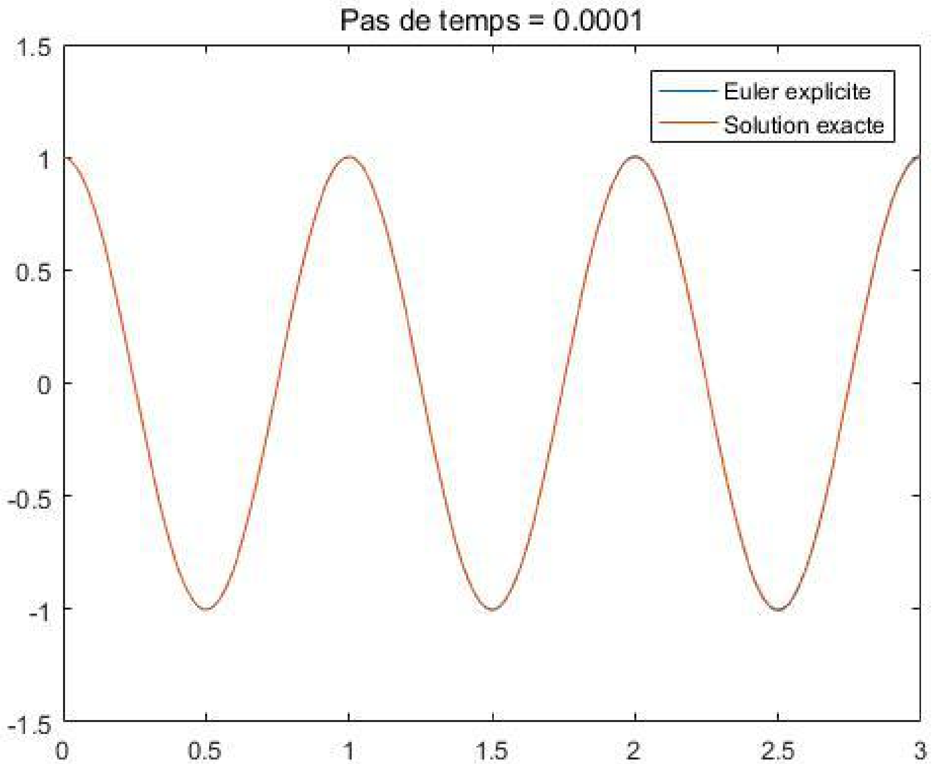
2.3

On teste avec différents pas de temps:

D'après les diagrammes suivantes, on trouve la solution numérique obtenue avec ce schéma d'intégration est divergente , et plus le pas de temps est petit, plus la divergence est lente.

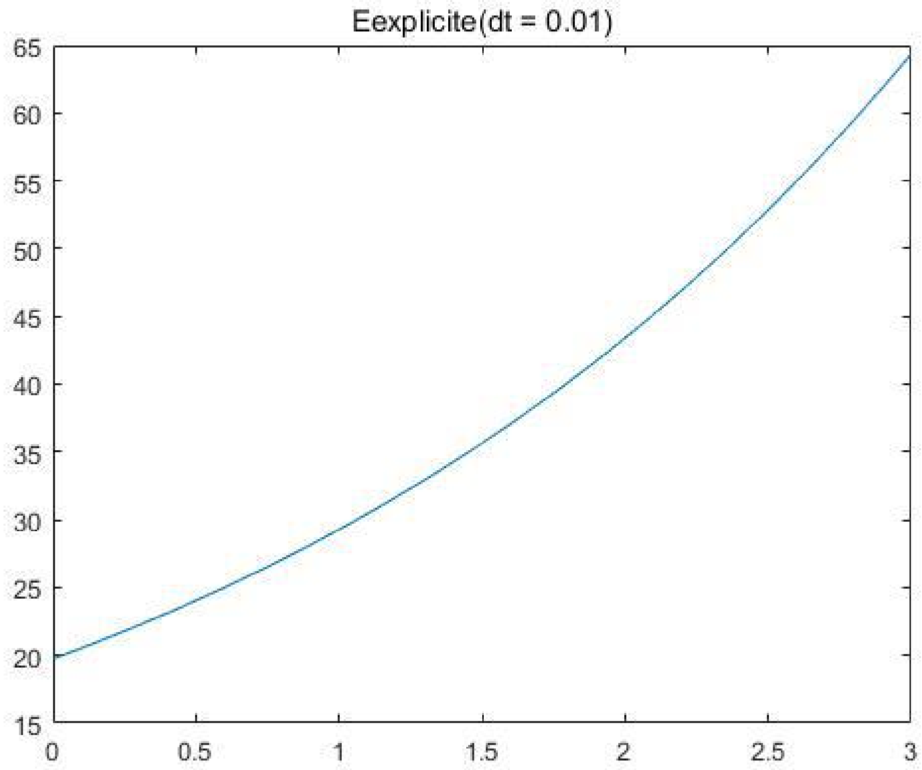


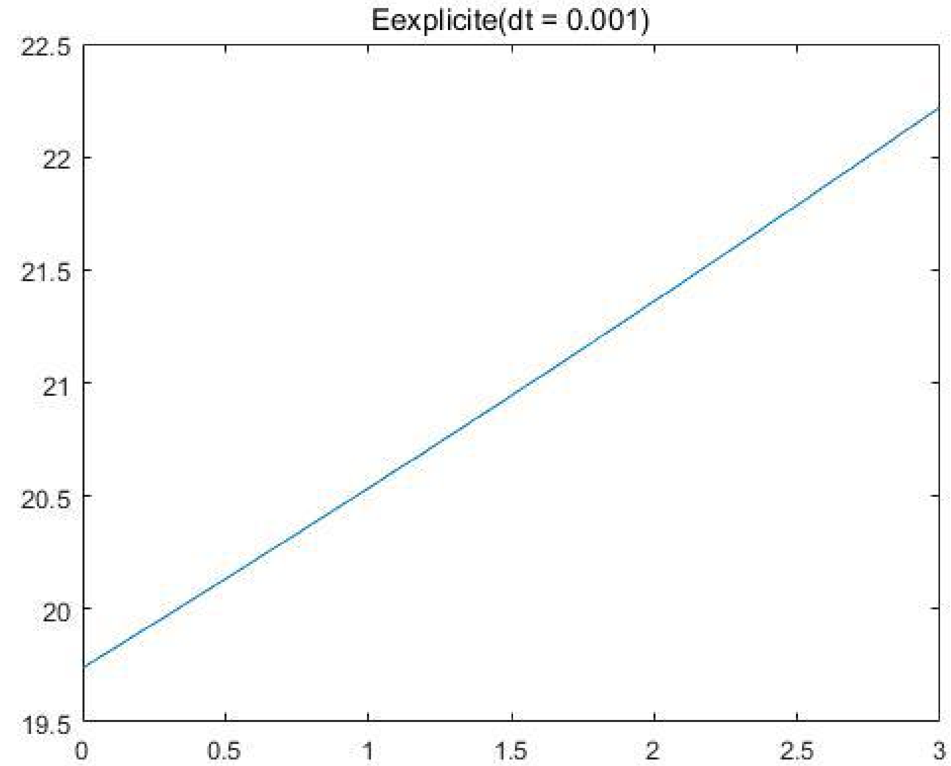

Pas de temps = 0.001
Euler explicite
Solution exacte
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

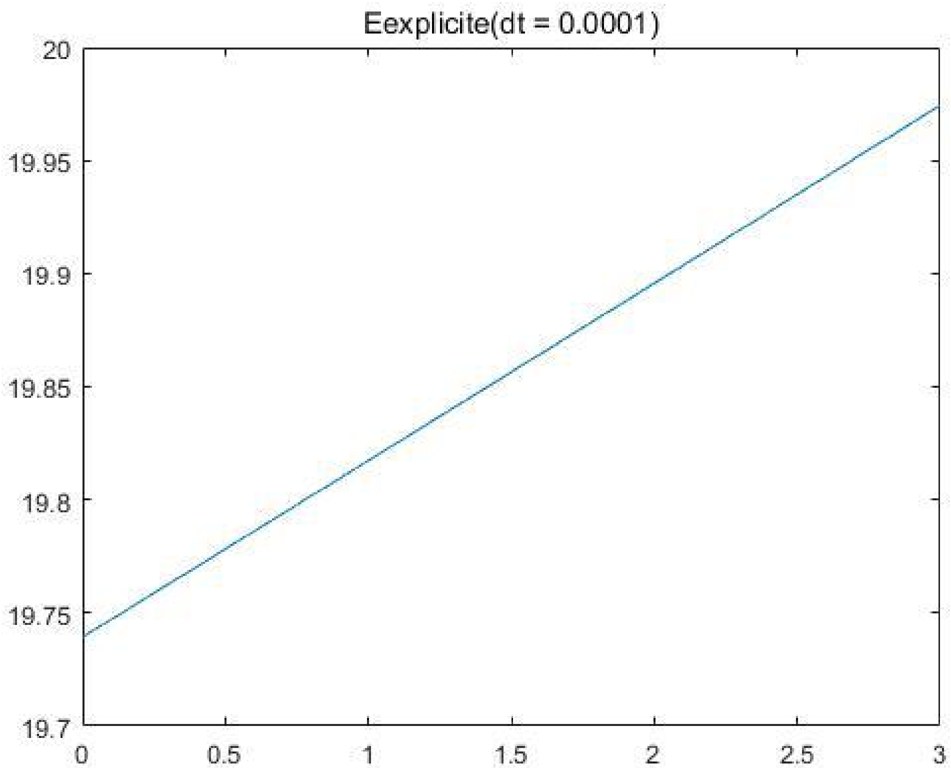

Pas de temps = 0.0001
Euler explicite
Solution exacte
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

2.4

```
for j = 1:length(t)

    Eexplicite(j)=0.5*(U1(2,j)*U1(2,j)+4*pi*pi*U1(1,j)*U1(1,j));end

clf;

plot(t,Eexplicite)

title('Eexplicite')
```







On peut voir que l'énergie de méthode Euler explicite augmente avec le temps , c'est-à-dire l'énergie diverge avec le temps . En comparant les 3 diagrammes, on trouve que plus petit le pas de temps , plus lentement l'énergie diverge .

2.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\Delta t \\ \omega_0^2 \Delta t & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + \omega^2 \Delta t^2$$

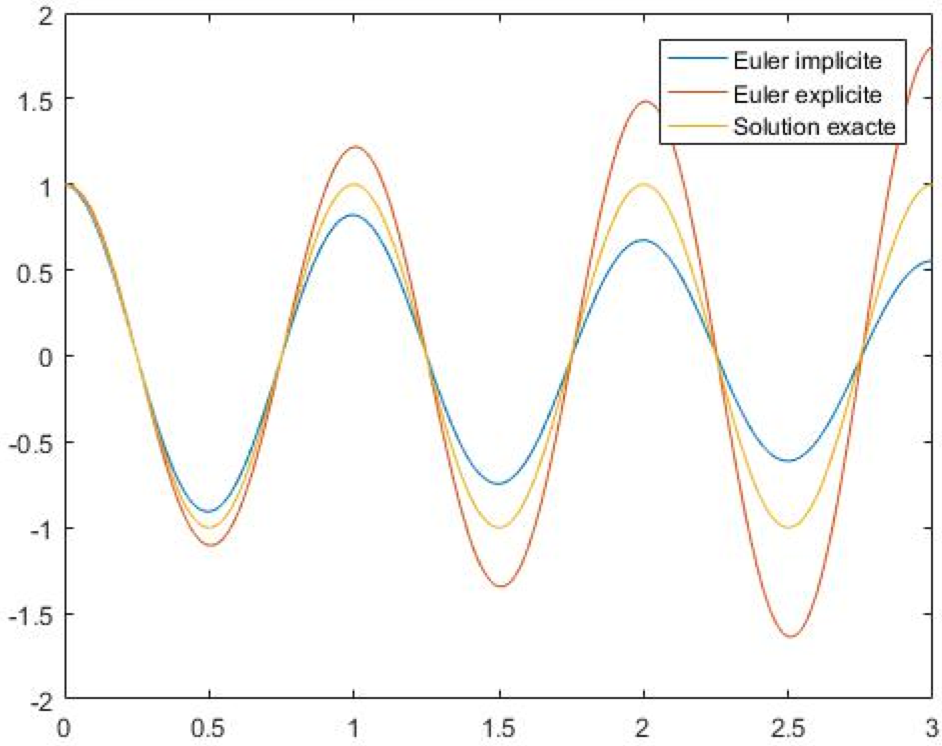
$$\lambda = \frac{2 \pm i\omega\Delta t}{2}$$

3.1

```
%Euler implicite

A2 = [1,-dt;w0*w0*dt,1];

U2(:,1) = [q0;Dq0];

for j = 1:length(t)-1

    U2(:,j+1) = inv(A2)*U2(:,j);

end
```

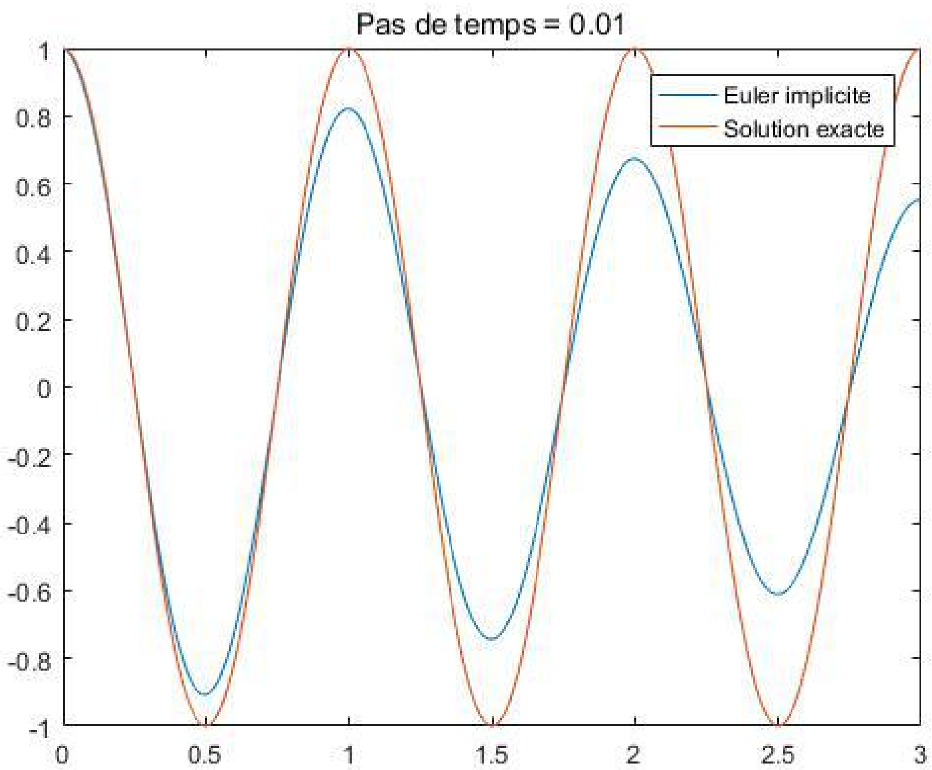
3.2

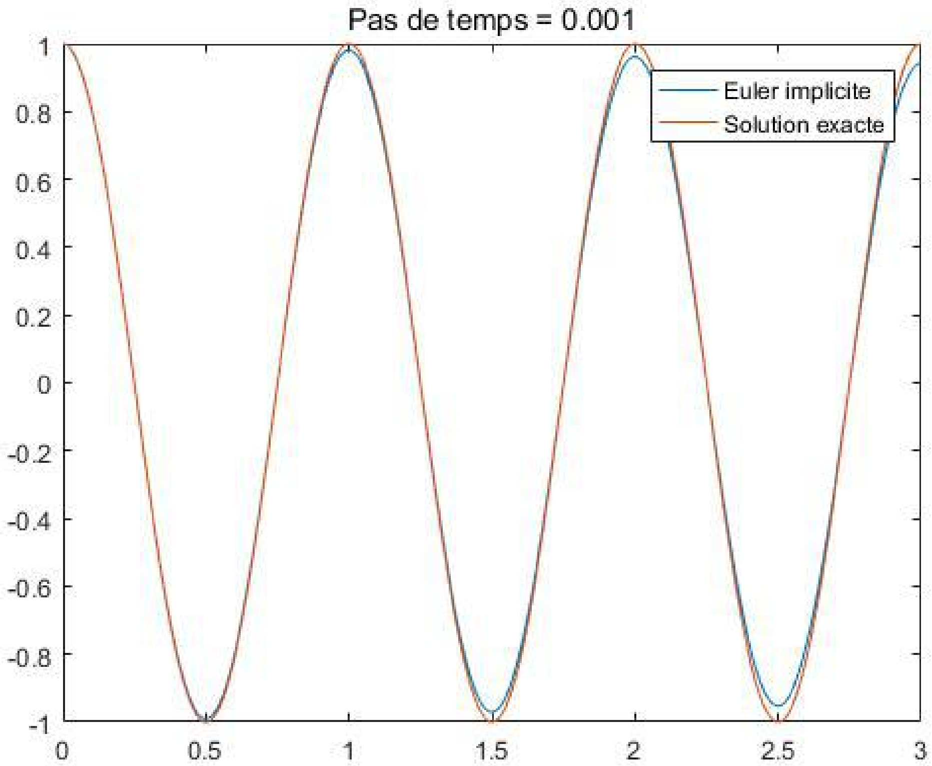
```
clf;

plot(t,U2(1,:))

hold on;

plot(t,U1(1,:))

hold on;

plot(t, cos(2*pi*t))

legend('Euler implicite','Euler explicite','Solution exacte')
```

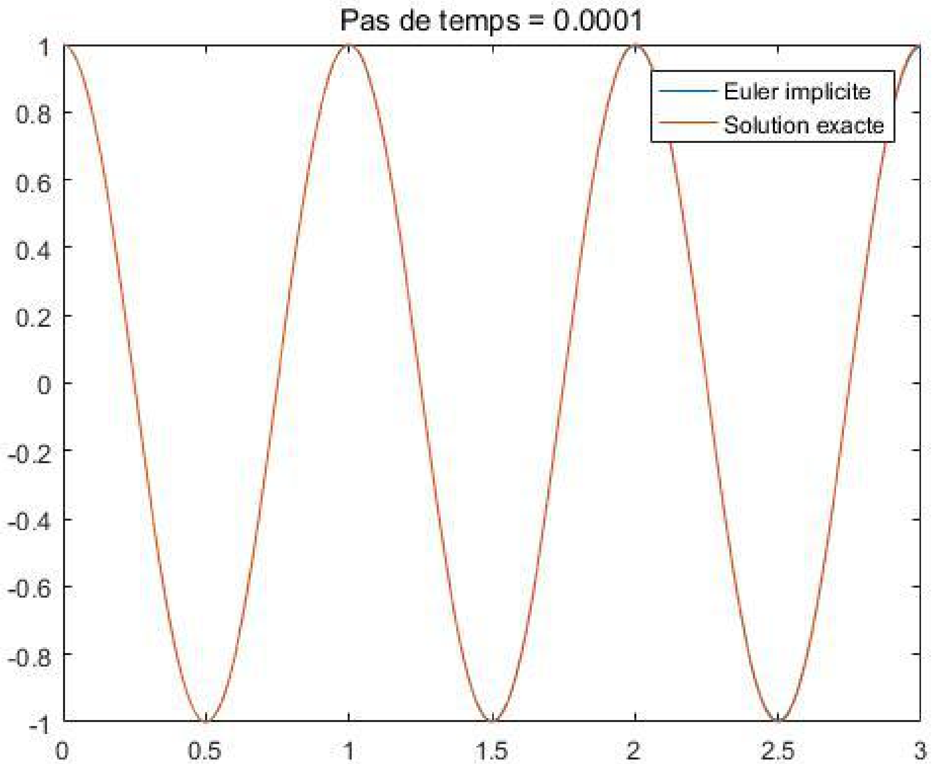


3.3

On observe les figures de pas de temps différents :

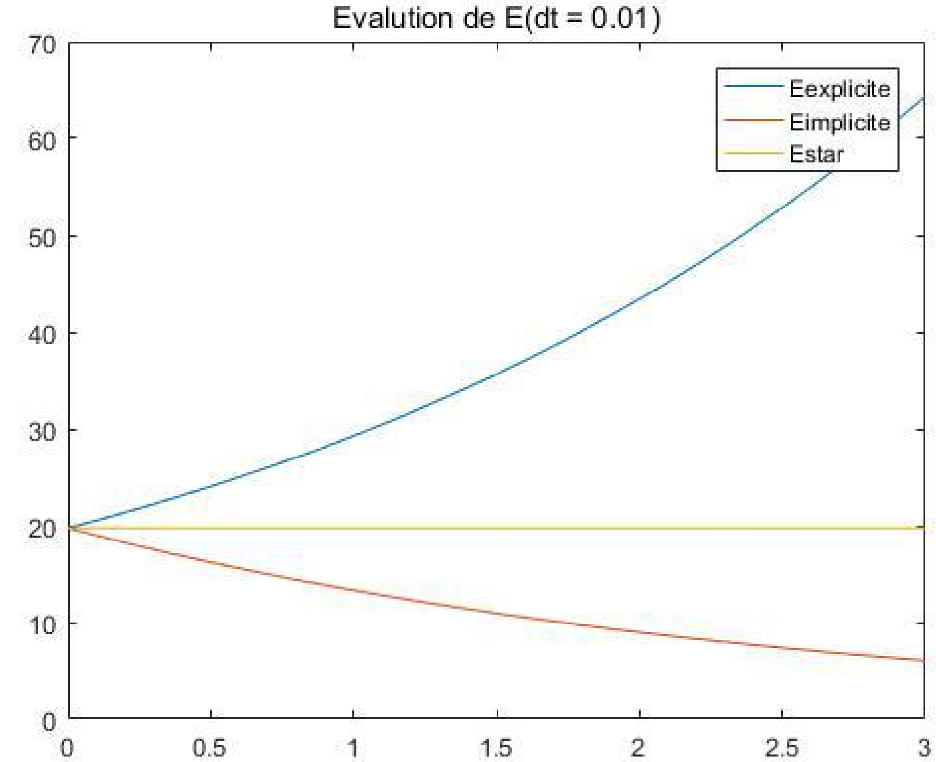


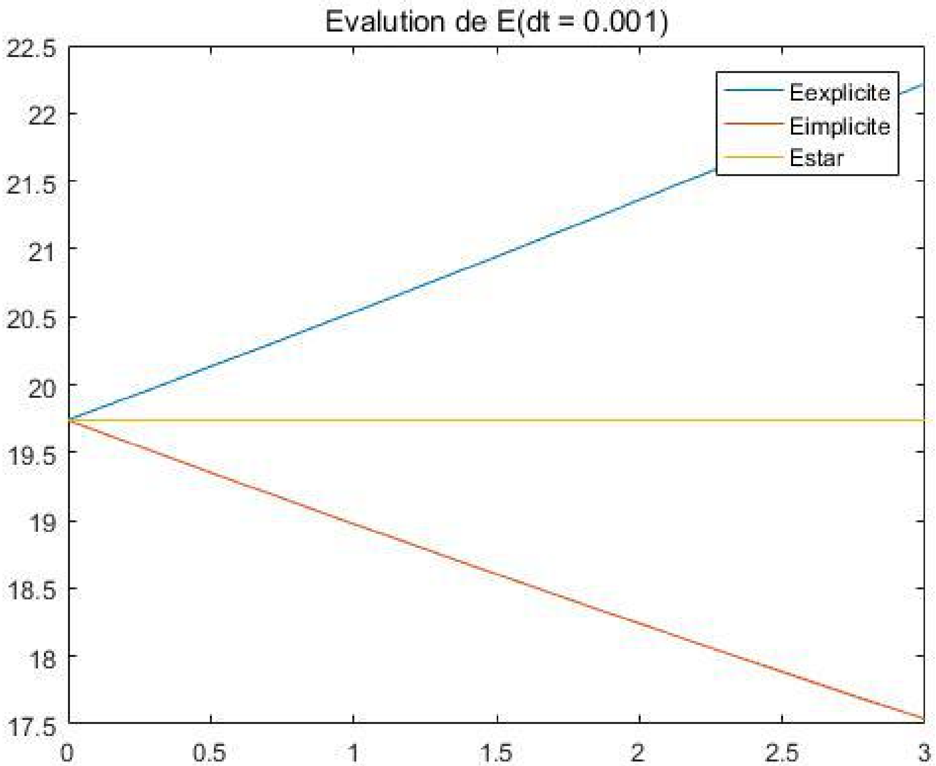


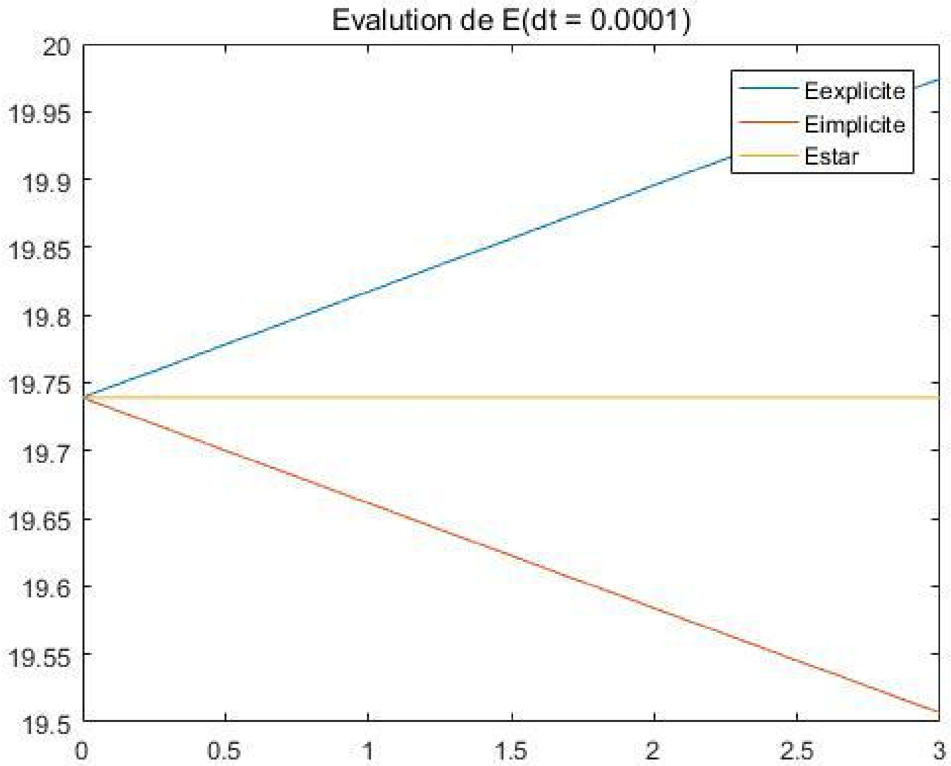


Evidemment , le schéma d’intégration d’EULER implicite introduit un amortissement numérique et plus le pas de temps est petit ,plus l’atténuation est faible .

3.4


Evalution de E(dt = 0.01)
Eexplicite
Eimplicite
Estar
70
60
50
40
30
20
10
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


Evalution de E(dt = 0.001)
Eexplicite
Eimplicite
Estar
22.5
22
21.5
21
20.5
20
19.5
19
18.5
18
17.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3



On trouve que l'énergie de Euler implicite se diminue avec le temps , et plus le pas de temps est petit , plus l'atténuation est faible .

3.5

valeurPropres =

0.9961 + 0.0626i
0.9961 - 0.0626i

Les parties réelles de tout les deux valeurs propres sont inférieures à 1. C'est pourquoi l'énergie diminue .

4.1

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

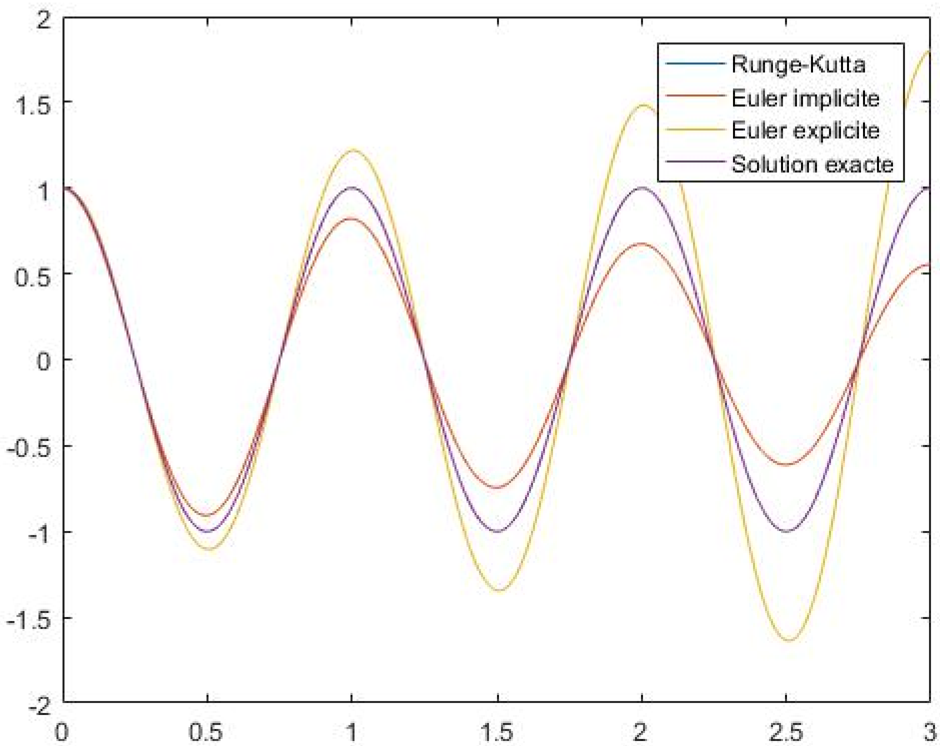
$$\begin{cases} \dot{q} = q \\ \ddot{q} = -\omega_0^2 q \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} \Delta t + \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$$

4.2

```
%Runge Kutta

A3=[0,1;-w0*w0,0];

U3(:,1)=[q0;Dq0];for i=1:length(t)-1

    k1=A3*U3(:,i);

    k2=A3*(U3(:,i)+0.5*dt*k1);

    k3=A3*(U3(:,i)+0.5*dt*k2);

    k4=A3*(U3(:,i)+dt*k3);

    U3(:,i+1)=U3(:,i)+1/6*dt*(k1+2*k2+2*k3+k4);end
```

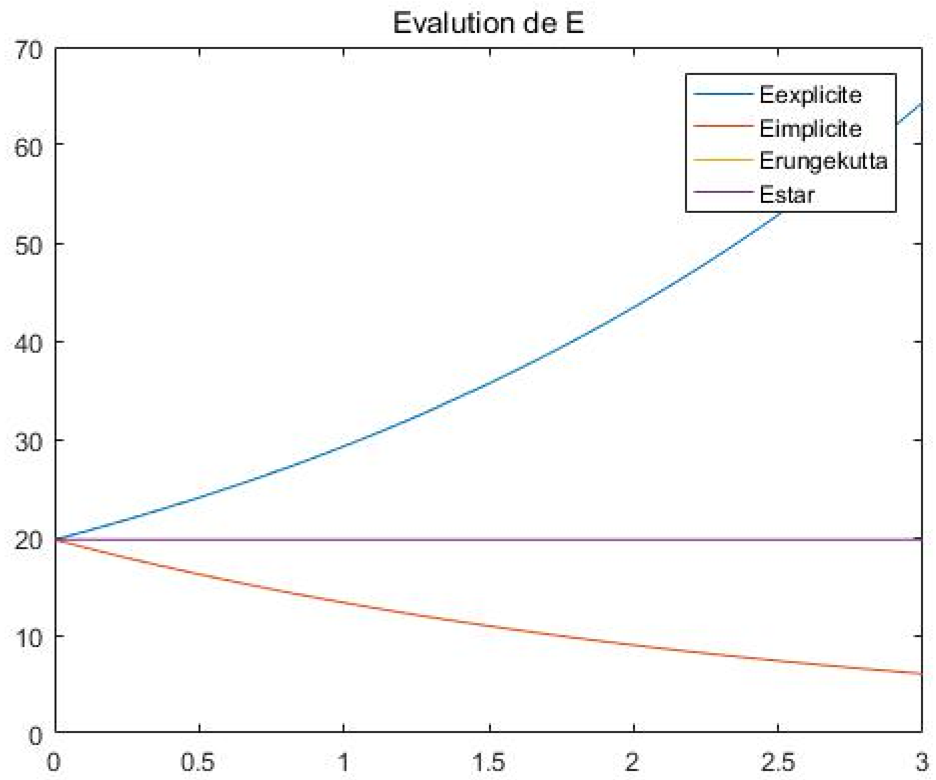
4.3



D’après le figure au dessus , on trouve que le schéma Runge Kutta est beaucoup plus précise que les 2 schémas précédents.

4.4

```
for j = 1:length(t)

    Eexplicite(j)=0.5*(U1(2,j)*U1(2,j)+4*pi*pi*U1(1,j)*U1(1,j));

    Eimplicite(j)=0.5*(U2(2,j)*U2(2,j)+4*pi*pi*U2(1,j)*U2(1,j));

    Erungekutta(j)=0.5*(U3(2,j)*U3(2,j)+4*pi*pi*U3(1,j)*U3(1,j));

    Estar(j)=Eetoile;end

clf;

plot(t,Eexplicite)

hold on;

plot(t,Eimplicite)

hold on;

plot(t,Erungekutta)

hold on;

plot(t, Estar)

title('Evalution de E')

legend('Eexplicite', 'Eimplicite','Erungekutta','Estar'
```



On trouve que l'énergie du schéma Runge luttant est plus précise que les schémas précédents.

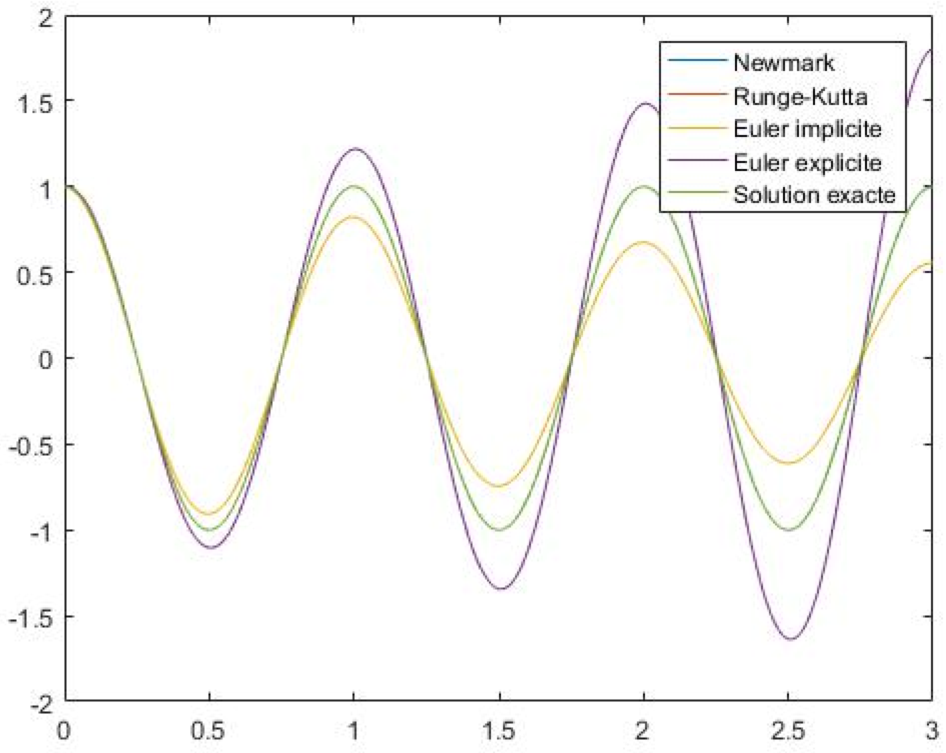
5.1.1

```
gama = 0.5; beta = 0.25;

B = [1+beta*dt*dt*w0*w0,0;gama*dt*w0*w0,1];

C = [1-(0.5-beta)*dt*dt*w0*w0,dt;-(1-gama)*dt*w0*w0,1];

A4 = inv(B)*C;

U4(:,1) = [q0;Dq0];for  j = 2:length(t)

    U4(:,j) = A4*U4(:,j-1);end
```

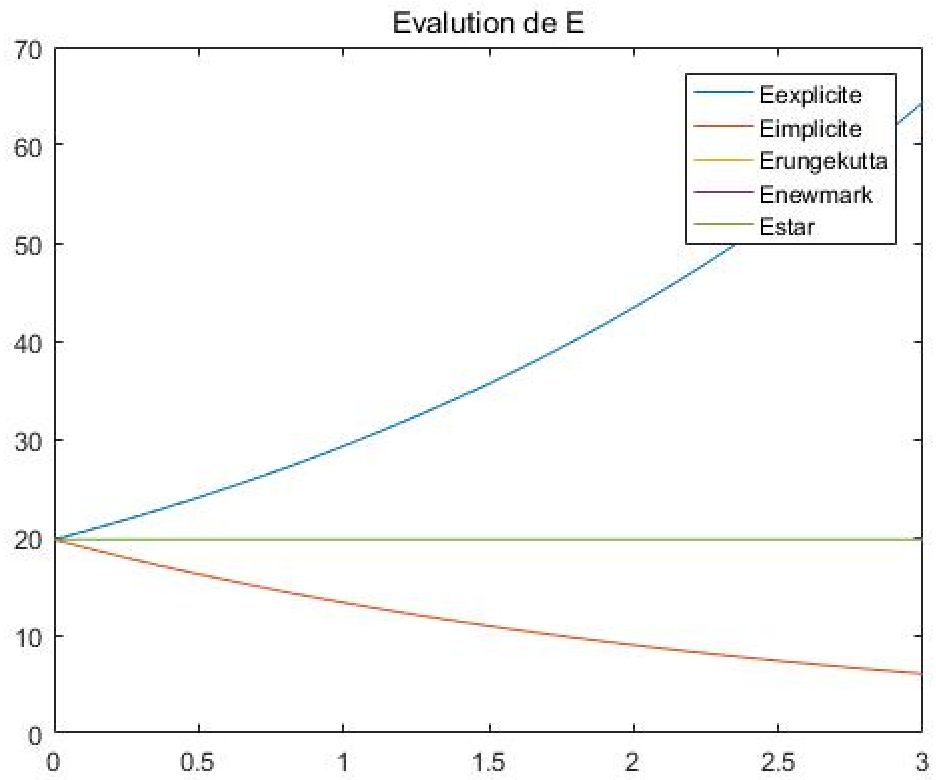
5.1.2

```
clf;

plot(t,U4(1,:))
```

```
hold on;

plot(t,U3(1,:))

hold on ;

plot(t,U2(1,:))

hold on;

plot(t,U1(1,:))

hold on;

plot(t,cos(2*pi*t))

legend('Newmark','Runge-Kutta', 'Euler implicite','Euler explicite','Solution exacte')
```



5.1.3



5.1.4

VPnewmark =

0.9980 + 0.0628i
0.9980 - 0.0628i

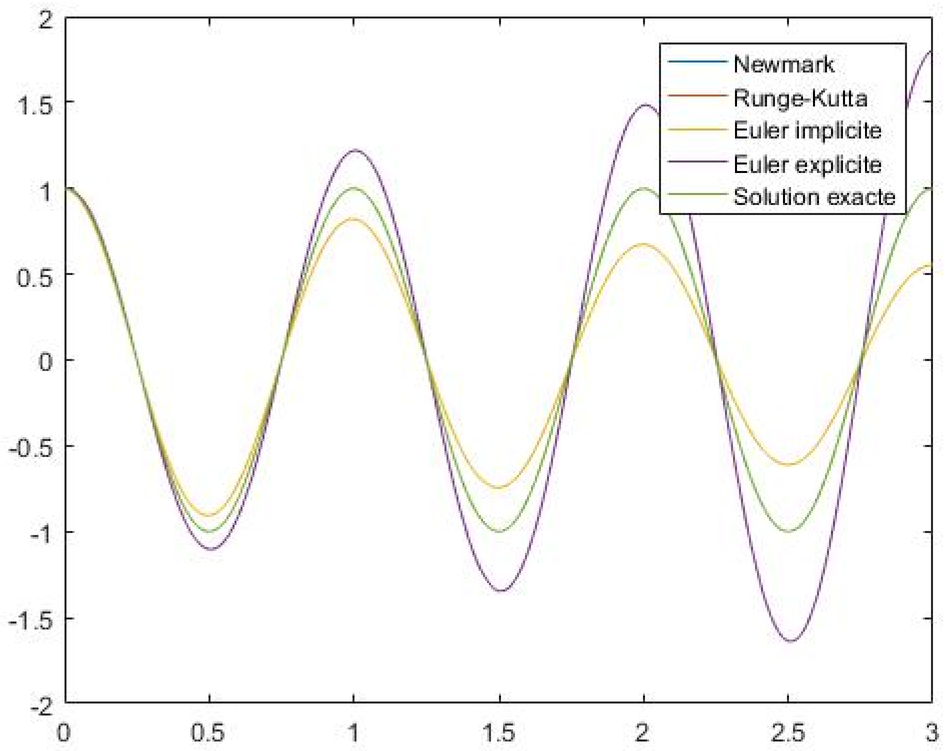
5.2.1

```
gama = 0.5; beta = 0;

B = [1+beta*dt*dt*w0*w0,0;gama*dt*w0*w0,1];

C = [1-(0.5-beta)*dt*dt*w0*w0,dt;-(1-gama)*dt*w0*w0,1];

A4 = inv(B)*C;

U5(:,1) = [q0;Dq0];for j = 2:length(t)

    U5(:,j) = A4*U5(:,j-1);end
```

5.2.2

```
clf;
```

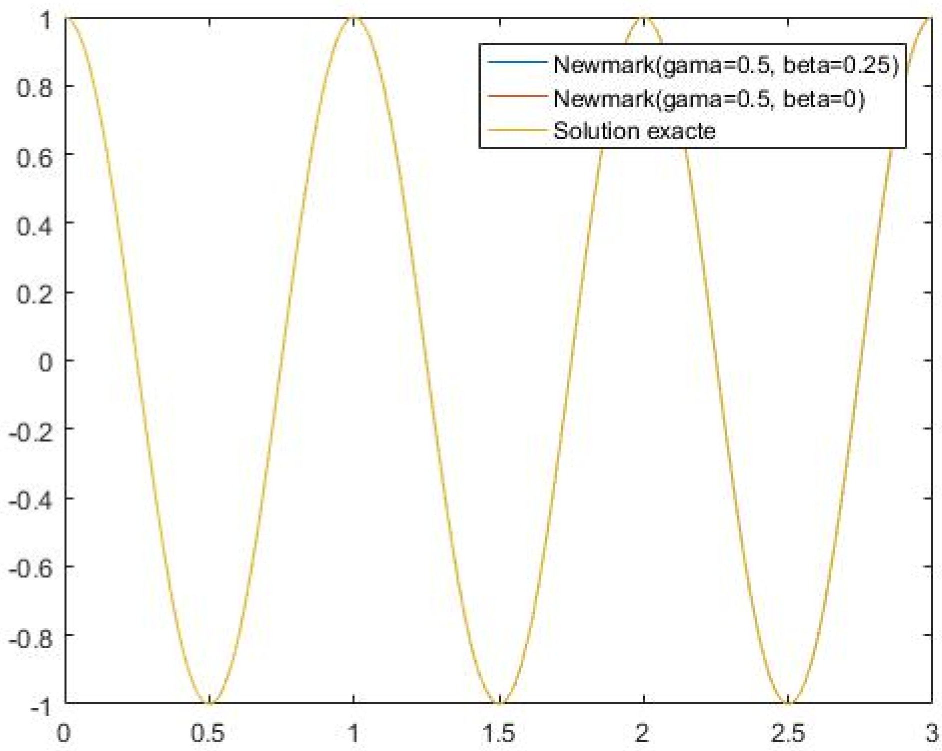
```
plot(t,U5(1,:))

hold on;

plot(t,U3(1,:))

hold on ;

plot(t,U2(1,:))

hold on;

plot(t,U1(1,:))

hold on;

plot(t,cos(2*pi*t))

legend('Newmark','Runge-Kutta', 'Euler implicite','Euler explicite','Solution exacte')
```



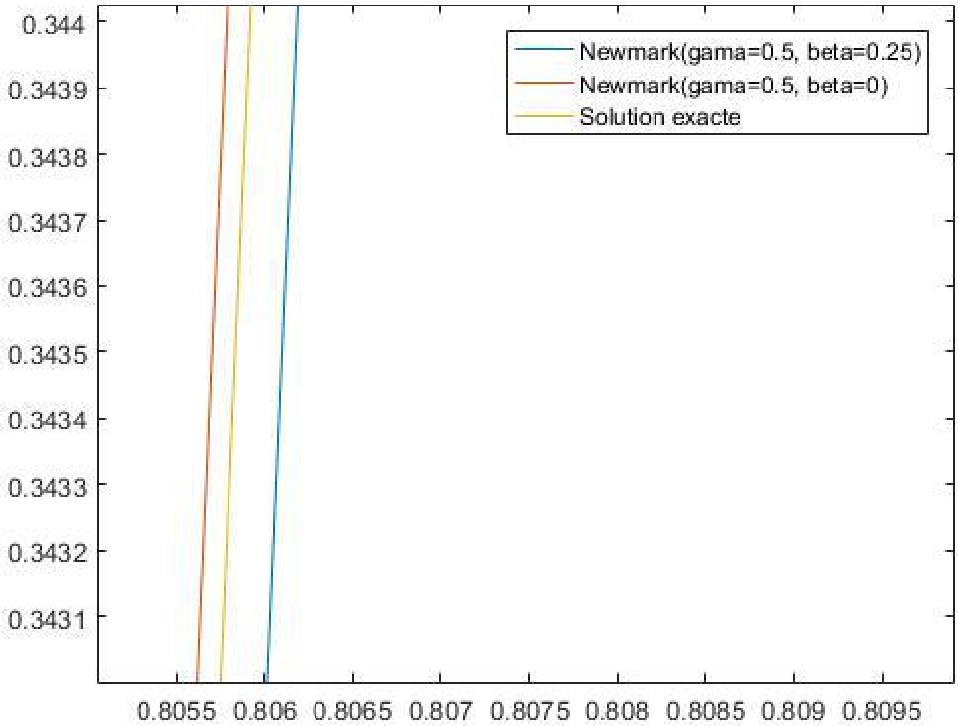
5.2.3

```
clf;
```

```
plot(t,U4(1,:))

hold on;

plot(t,U5(1,:))

hold on;

plot(t,cos(2*pi*t))

legend('Newmark(gama=0.5, beta=0.25)','Newmark(gama=0.5, beta=0)','Solution exacte')
```



On trouve pas de différence dans cette figure , mais si on étudie plus précisément , on peut voir la figure au dessous :la solution de Newmark(beta = 0) est explicite et la solution de Newmark(beta = 0.25) est implicite.



Newmark(gama=0.5, beta=0.25)
Newmark(gama=0.5, beta=0)
Solution exacte
0.344
0.3439
0.3438
0.3437
0.3436
0.3435
0.3434
0.3433
0.3432
0.3431
0.8055
0.806
0.8065
0.807
0.8075
0.808
0.8085
0.809
0.8095