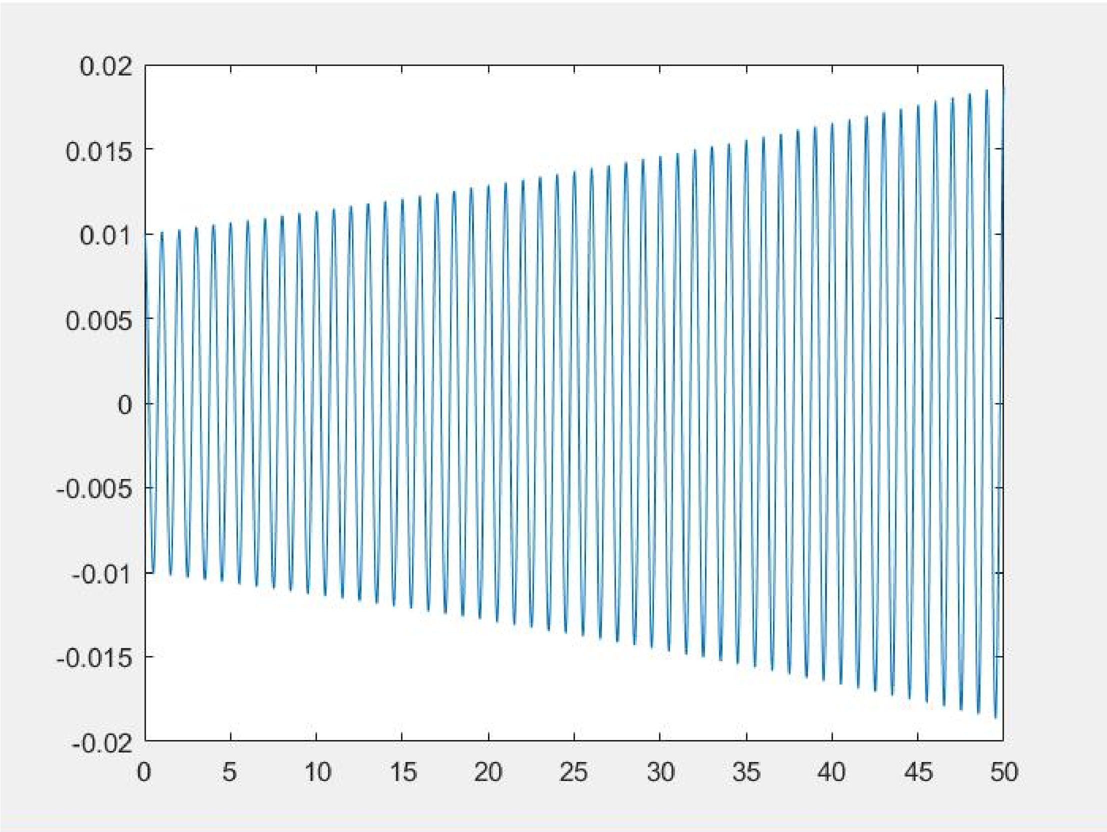
Etude d'un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté

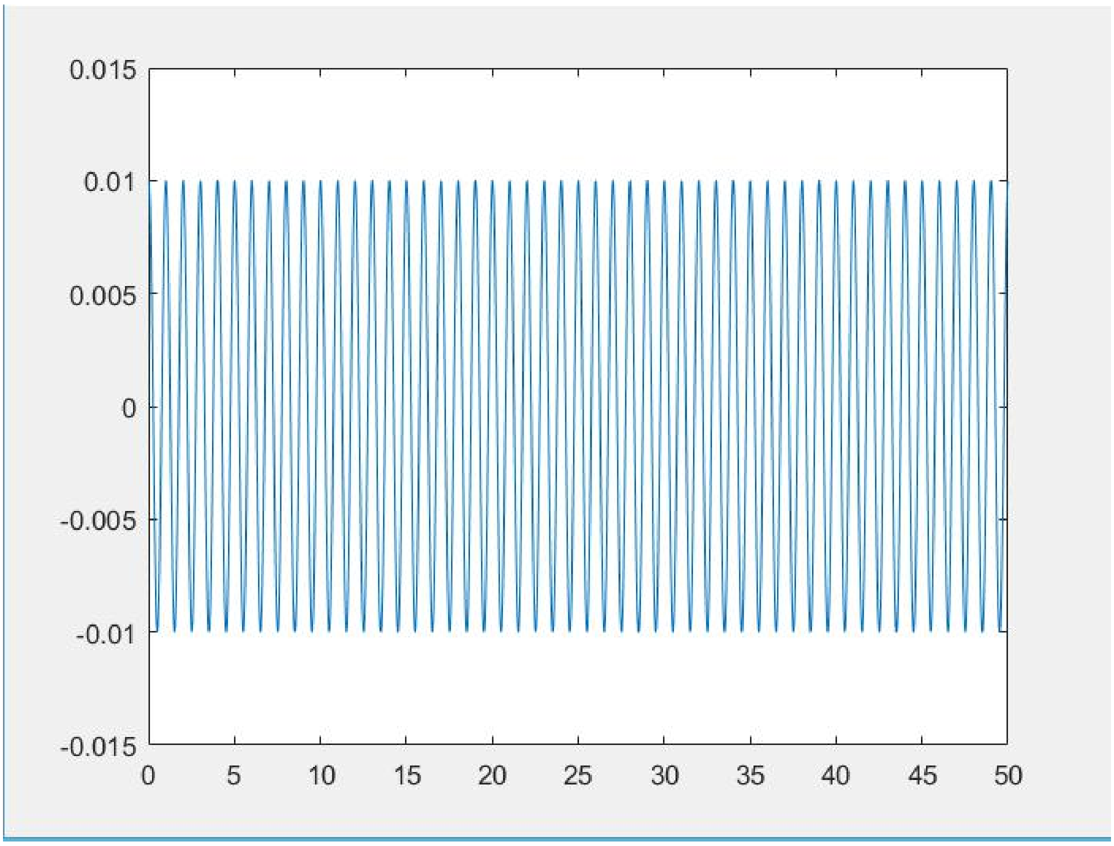
1.1.a

```
clear all;
w = 2*pi;
iption = 0.02;
dt=1.1*2*iption/w;
t=0:dt:10;
qnl=zeros(size(t));
q(1)=0.01;
dq=zeros(size(t));
dq(1)=0;
d2q=zeros(size(t));
d2q(1)=-w^2*q(1);
for i1=2:length(t)
  q(i1)=q(i1-1)+dt*dq(i1-1);
  dq(i1)=dq(i1-1)+dt*d2q(i1-1);
  d2q(i1)=-2*iption*w*dq(i1)-w^2*q(i1);
end
plot(t,q);
```



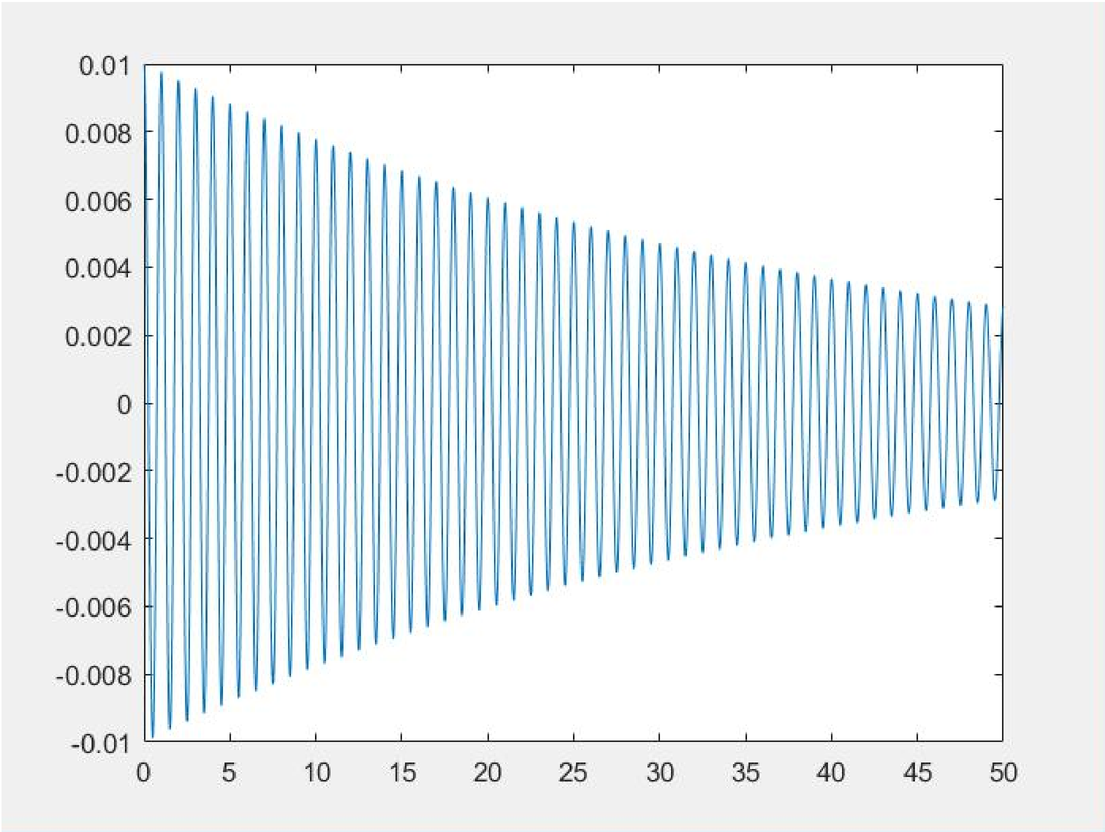
Quand $\Delta t > \frac{2\varepsilon}{w0}$, on a une solution instable et diverge.

1.1.b



Quand $\Delta t = \frac{2\varepsilon}{w0}$, on a une solution quasi instable.

1.1.c

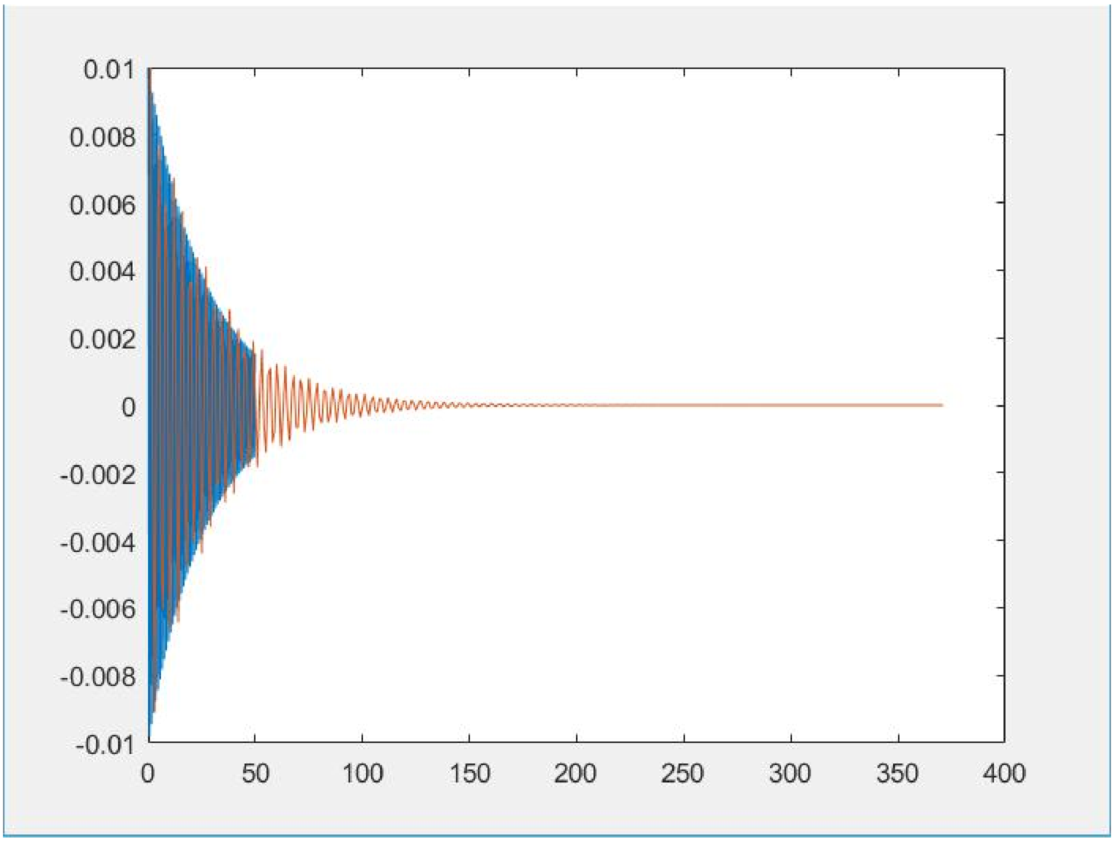


Quand $\Delta t = 0.8 * \frac{2\varepsilon}{w0}$, on a une solution instable. Mais elle diverge plus lantement que ceux avant.

1.1. d On doit considérer le temps de converge et l'amplitude de la solution.

On doit avoir une solution de Euler explicit avec une erreur d'amplitude plus petit que 0.01 et l'erreur de temps de converge au moin de 0.002 moin de 5s.

Je trouve que quand $\Delta t < 0.7 * \frac{2\varepsilon}{w0}$ on a le bon résultat：



1.2)

Il n’y a pas de temps critique parce que les valeurs propres sont toujours plus petits que 1.

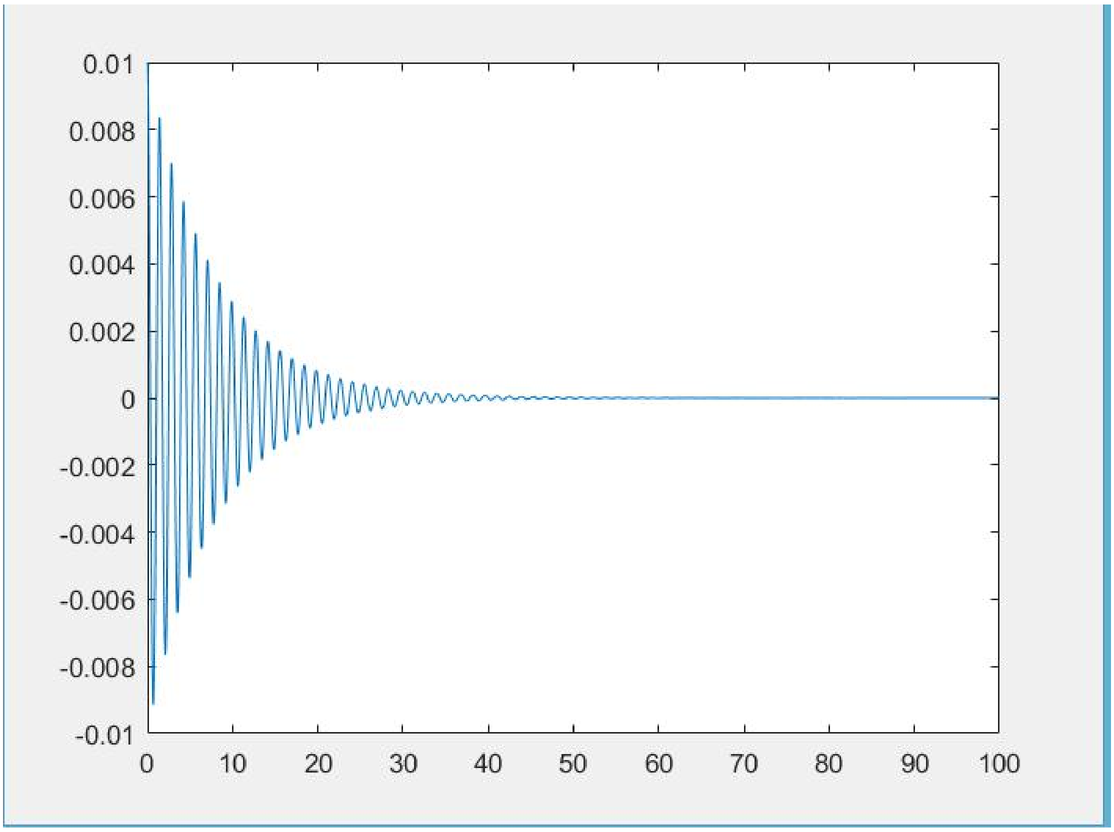
1.3)

1.3.a)

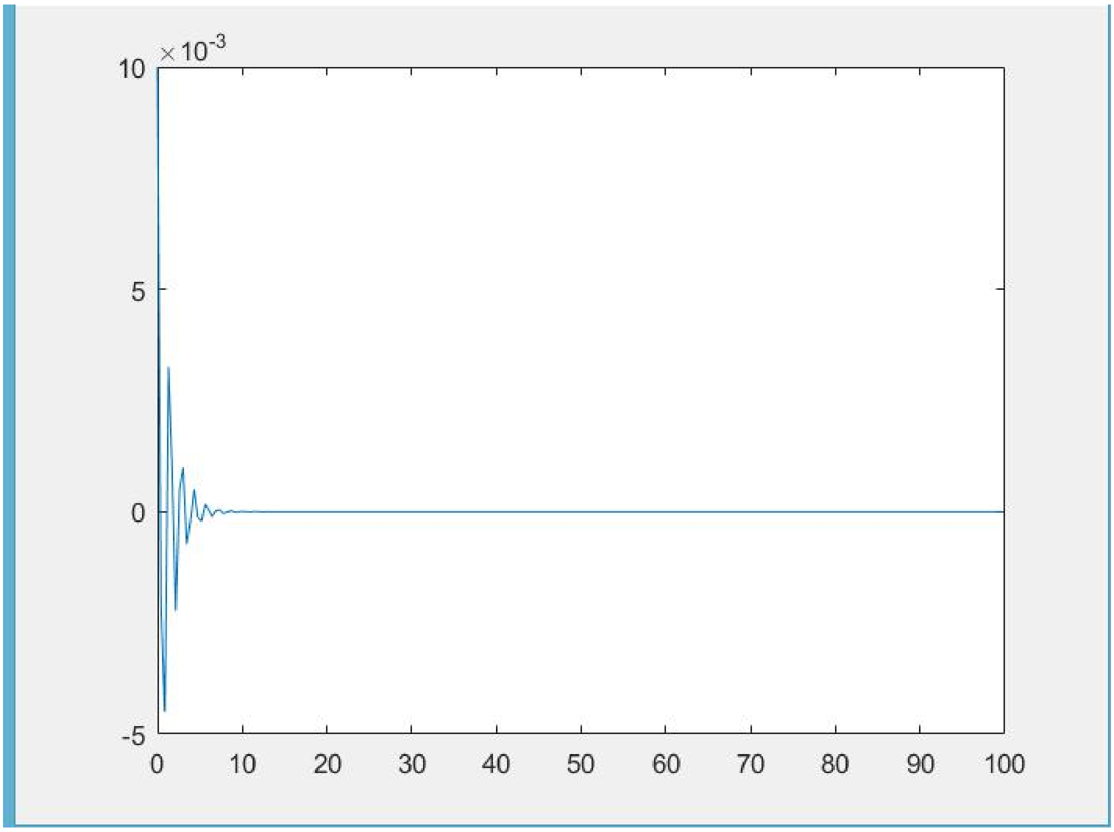
```
clear all;
w = 2*pi;
iption = 0.02;
h=0.04
dt=h*2*2^0.5/w;
t=0:dt:100;
qr=zeros(size(t));
qr(1)=0.01;
dqr=zeros(size(t));
dqr(1)=0;
d2qr=zeros(size(t));
Q=[qr(1);dqr(1)];
for i2=2:length(t)
   x = t(i2-1);
   y = Q;
   k1= cal_f(y,x,0);
   y = Q + dt*k1/2;
   k2 = cal_f(y,x+dt/2,0);
```

```
    y = Q + dt*k2/2;
    k3 = cal_f(y,x+dt/2,0);
    y = Q + dt*k3;
    k4 = cal_f(y,x+dt,0);
    dqr = (k1 + 2 *k2 + 2 * k3 + k4) / 6;
    Q = Q + dqr*dt;
    qr(i2)=Q(1);
    dqr(i2)=Q(2);
end
plot(t,qr);
function [dU]=cal_f(U,T,w0)
dU = zeros(2,1);
dU(1)=U(2);
dU(2)=-2*0.02*2*pi*U(2)-2*pi^2*U(1);
end
```

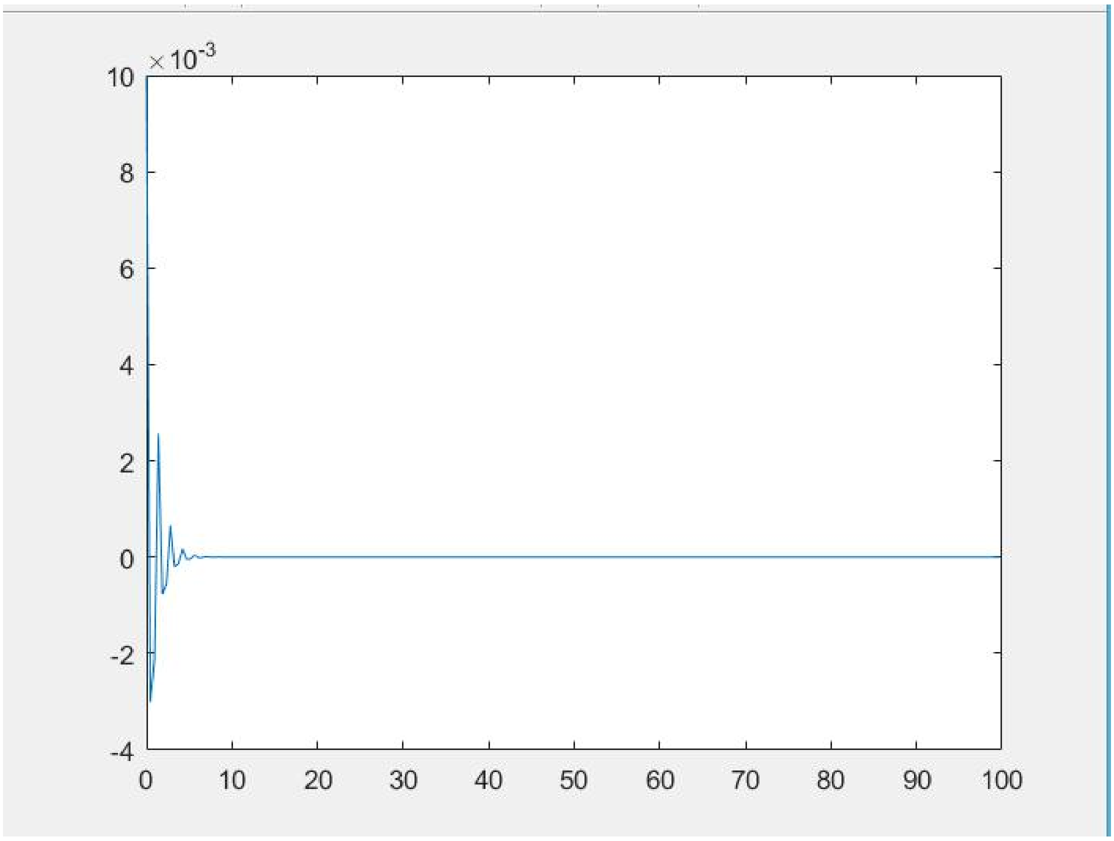
h=0.04



H=0.96



h=1.04



Quand h devient plus grand le résultat converge plus rapidement

Etude d'un double pendule avec l'hypothèse des petits mouvements

1.1) On a déjà sait que l'équation du mouvement :

$$m\,a^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{matrix} \right. + m\,g\,a \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix} \right. \quad = \quad F_0 \sin \omega t \left| \begin{matrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right. \tag{0}$$

On peut le séparer à

$$2\ddot{\theta_1} + \ddot{\theta_2} + \frac{2g\theta_1}{a} = \frac{F_0 \sin wt}{ma} \tag{1}$$

$$\ddot{\theta_2} = \frac{2g\theta_1}{a} - \frac{2g\theta_2}{a} + \frac{(\sqrt{2}-1)F_0 \sin wt}{ma} \tag{2}$$

Donc on a

$$\ddot{\theta_1} = \frac{g\theta_2}{a} - \frac{2g\theta_1}{a} + \frac{(2-\sqrt{2})F_0 \sin wt}{2ma} \tag{3}$$

$$\ddot{\theta_2} = \frac{2g\theta_1}{a} - \frac{2g\theta_2}{a} + \frac{(\sqrt{2}-1)F_0 \sin wt}{ma} \tag{4}$$

Pour trouver la matrice d'amplification on donne: $\theta_j\ \dot{\theta}_j\ \ddot{\theta}_j\ \varphi_j\ \dot{\varphi}_j\ \ddot{\varphi}_j$ avec $\theta_2 = \varphi$, β = 0 ,γ = 0.5. Alors on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5dt & 0 & 0 & 0 \\ 2g/a & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5dt \\ 0 & 0 & 1 & g/a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{j+1} \\ \dot{\theta}_{j+1} \\ \ddot{\theta}_{j+1} \\ \varphi_{j+1} \\ \dot{\varphi}_{j+1} \\ \ddot{\varphi}_{j+1} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0.5dt^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5dt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & dt & 0.5dt^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5dt \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ \ddot{\theta}_j \\ \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \\ \ddot{\varphi}_j \end{matrix} +$$

$$\frac{F_0 \sin wt}{ma} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Et d'après les equations (3) et (4), on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{gdt}{a} & 1 & -\frac{0.5gdt}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{gdt}{a} & 0 & \frac{gdt}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{j+1} \\ \dot{\theta}_{j+1} \\ \varphi_{j+1} \\ \dot{\varphi}_{j+1} \end{matrix} + \frac{F_0\, \mathrm{dt}\sin wt}{ma} \begin{bmatrix} 0 \\ (2-\sqrt{2})/4 \\ 0 \\ (\sqrt{2}-1)/2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{gdt^2}{a} & dt & 0.5dt^2+\frac{0.5gdt^2}{a} & 0 \\ -\frac{gdt}{a} & 1 & \frac{0.5dtg}{a} & 0 \\ \frac{gdt^2}{a} & 0 & 1-\frac{gdt^2}{a} & dt \\ \frac{gdt}{a} & 0 & -\frac{gdt}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \end{matrix} + \frac{F_0\,\mathrm{dt}\sin wt}{ma} \begin{bmatrix} \frac{dt(2-\sqrt{2})}{4} \\ (2-\sqrt{2})/4 \\ \frac{dt(\sqrt{2}-1)}{2} \\ (\sqrt{2}-1)/2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

1.2)

```
clear all;
peta =0;
gama =0.5;
m = 2;
a = 0.5;
g = 9.81;
F0 = 20;
w = 2*pi;
dt=0.02;
t=0:dt:3;
th=zeros(size(t));
th(1)=0;
dth=zeros(size(t));
dth(1)=-1.31519275;
d2th=zeros(size(t));
phi=zeros(size(t));
phi(1)=0;
dphi=zeros(size(t));
dphi(1)=-1.85996342;
d2phi=zeros(size(t));
B=[1,0,0,0;g*dt/a,1,-0.5*g*dt/a,0;0,0,1,0;-g*dt/a,0,g*dt/a,1];
C=[1-g*(dt)^2/a,dt,0.5*dt^2+0.5*g*(dt)^2/a,0;-g*dt/a,1,0.5*g*dt/a,0;g*(dt)^2/a,0,1-g*(dt)^2/a,dt;
g*dt/a,0,-g*dt/a,1];
A=inv(B)*C;
[z,d]=eig(A)
real=real(d);
imag=imag(d);
mol=abs(d);
```

Quand dt≤0.01, on peut voir que les modules des valeurs caractéristique de A sont égales à 1 parce que les valeurs de tous les nombres de la matrice mol sont plus petits que 1 la premier fois. Le résultat est comme le suivant :

```
mo1 =

    1.0000         0         0         0
         0    1.0000         0         0
         0         0    1.0000         0
         0         0         0    1.0000
```

Quand dt=0.02, les valeurs de quelques nombres de la matrice mo sont plus grands que 1. Donc le pas de temps critique est 0.016. Le résultat est comme le suivant :

```
mo1 =

    0.9999         0         0         0
         0    0.9999         0         0
         0         0    1.0001         0
         0         0         0    1.0001
```

1.3) On donne $q_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}$ (0) peut s'écrire comme :

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ddot{q_0} + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q_0 = F_0 \sin wt \Big| \begin{matrix} a \\ a/\sqrt{2} \end{matrix} \quad (7)$$

Donc la relation entre $\ddot{q_0}$ et q_0 est:

$$\ddot{q_0} = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_0 + \frac{F_0 \sin wt}{ma} \Bigg| \begin{matrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{matrix} \quad (8)$$

On sait directement q_0 et $\dot{q_0}$

$\theta_1(0) = 0\,\text{rad}$ $\theta_2(0) = 0\,\text{rad}$ $\dot{\theta}_1(0) = -1.31519275\,\text{rad.s}^{-1}$ $\dot{\theta}_2(0) = -1.85996342\,\text{rad.s}^{-1}$

1.4) Si on donne $q_n = \begin{bmatrix} \theta_n \\ \varphi_n \end{bmatrix}$, le schéma Newmark explicite s'écrire comme :

$$\ddot{q_n} = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_n + \frac{F_0 \sin wt_n}{ma} \Bigg| \begin{matrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{matrix} \quad (9)$$

$$q_{n+1} = q_n + dt\dot{q_n} + 0.5dt^2\ddot{q_n} \quad (10)$$

$$\ddot{q_{n+1}} = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_{n+1} + \frac{F_0 \sin wt_{n+1}}{ma} \Bigg| \begin{matrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{matrix} \quad (11)$$

$$\dot{q_{n+1}} = \dot{q_n} + 0.5dt\ddot{q_n} + 0.5dt\ddot{q_{n+1}} \quad (12)$$

1.5)

```
clear all;
peta =0;
gama =0.5;
m = 2;
a = 0.5;
g = 9.81;
F0 = 20;
w = 2*pi;
dt=0.02;
t=0:dt:3;
th=zeros(size(t));
th(1)=0;
dth=zeros(size(t));
dth(1)=-1.31519275;
d2th=zeros(size(t));
phi=zeros(size(t));
phi(1)=0;
dphi=zeros(size(t));
dphi(1)=-1.85996342;
d2phi=zeros(size(t));
for i1=2:length(t)
  d2th(i1-1)=g*phi(i1-1)/a-2*g*th(i1-1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(i1-1))/(2*m*a);
  d2phi(i1-1)=2*g*th(i1-1)/a-2*g*phi(i1-1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(i1-1))/(m*a);
  th(i1)=th(i1-1)+dt*dth(i1-1)+dt^2*0.5*d2th(i1-1);
  phi(i1)=phi(i1-1)+dt*dphi(i1-1)+dt^2*0.5*d2phi(i1-1);
  d2th(i1)=g*phi(i1)/a-2*g*th(i1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(i1))/(2*m*a);
  d2phi(i1)=2*g*th(i1)/a-2*g*phi(i1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(i1))/(m*a);
  dth(i1)=dth(i1-1)+0.5*dt*d2th(i1)+0.5*dt*dth(i1-1);
  dphi(i1)=dphi(i1-1)+0.5*dt*d2phi(i1)+0.5*dt*dphi(i1-1);
end
```

1.6)

Quand t=0 $q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\dot{q} = \begin{bmatrix} -1.3152 \\ -1.8600 \end{bmatrix}$ $\ddot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Quand t=dt : $q = \begin{bmatrix} -0.0263 \\ -0.0372 \end{bmatrix}$ $\dot{q} = \begin{bmatrix} -1.3180 \\ -1.8639 \end{bmatrix}$ $\ddot{q} = \begin{bmatrix} 1.0365 \\ 1.4658 \end{bmatrix}$

Quand t=2*dt : $q = \begin{bmatrix} -0.0525 \\ -0.0742 \end{bmatrix}$ $\dot{q} = \begin{bmatrix} -1.3106 \\ -1.8534 \end{bmatrix}$ $\ddot{q} = \begin{bmatrix} 2.0597 \\ 2.9128 \end{bmatrix}$

Quand t=0.5s : $q = \begin{bmatrix} -0.3279 \\ -0.4638 \end{bmatrix}$ $\dot{q} = \begin{bmatrix} 0.0892 \\ 0.1261 \end{bmatrix}$ $\ddot{q} = \begin{bmatrix} 4.5033 \\ 6.3686 \end{bmatrix}$

2.1) Avec $\theta_2 = \varphi$, β = 0 ,γ = 0.5. on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.25dt^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5dt & 0 & 0 & 0 \\ 2g/a & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.25dt^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5dt \\ 0 & 0 & 1 & g/a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{j+1} \\ \dot{\theta}_{j+1} \\ \ddot{\theta}_{j+1} \\ \varphi_{j+1} \\ \dot{\varphi}_{j+1} \\ \ddot{\varphi}_{j+1} \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & dt & 0.25dt^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5dt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & dt & 0.25dt^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5dt \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ \ddot{\theta}_j \\ \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \\ \ddot{\varphi}_j \end{matrix} + \frac{F_0 \sin wt}{ma} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Et d'après les equations (3) et (4), on a :

$$\begin{bmatrix} 1+0.5dt^2 g/a & 0 & -0.25dt^2 g/a & 0 \\ \frac{gdt}{a} & 1 & -\frac{0.5gdt}{a} & 0 \\ -0.5dt^2 g/a & 0 & 1+0.5dt^2 g/a & 0 \\ -\frac{gdt}{a} & 0 & \frac{gdt}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{j+1} \\ \dot{\theta}_{j+1} \\ \varphi_{j+1} \\ \dot{\varphi}_{j+1} \end{matrix} + \frac{F_0 dt \sin wt}{ma} \begin{bmatrix} (\sqrt{2}-2)dt/8 \\ (\sqrt{2}-2)/4 \\ (1-\sqrt{2})dt/4 \\ (\sqrt{2}-2)/4 \end{bmatrix} =$$

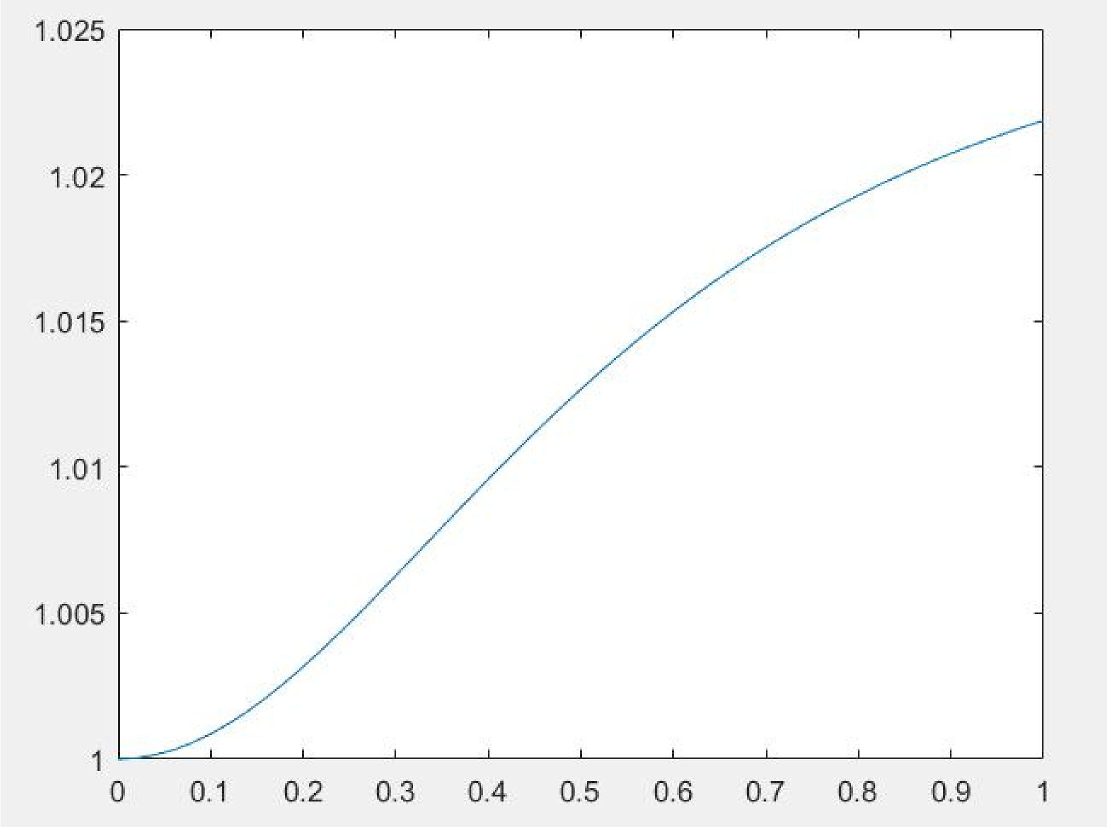
$$\begin{bmatrix} 1-\frac{0.5gdt^2}{a} & dt & 0.25dt^2+\frac{0.25gdt^2}{a} & 0 \\ -\frac{gdt}{a} & 1 & \frac{0.5dtg}{a} & 0 \\ \frac{0.5gdt^2}{a} & 0 & 1-\frac{0.5gdt^2}{a} & dt \\ \frac{gdt}{a} & 0 & -\frac{gdt}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \end{matrix} + \frac{F_0 \sin wt}{ma} \begin{bmatrix} \frac{dt^2(2-\sqrt{2})}{8} \\ (2-\sqrt{2})/4 \\ \frac{dt^2(\sqrt{2}-1)}{8} \\ (\sqrt{2}-1)/4 \end{bmatrix} \tag{14}$$

2.2)

```
clear all;
peta =0.25;
gama =0.5;
m = 2;
a = 0.5;
g = 9.81;
F0 = 20;
w = 2*pi;
dt=0.02;
t=0:dt:1;
ma =ones(size(t));
for i2 = 2:length(t)
B=[1+0.5*g*t(i2)^2/a,0,-0.25*g*t(i2)^2/a,0;g*t(i2)/a,1,-0.5*g*t(i2)/a,0;-0.5*t(i2)^2*g/a,0,1+0.5*t(i2)^2*g/a,0;-g*t(i2)/a,0,g*t(i2)/a,1];
C=[1-0.5*g*t(i2)^2/a,t(i2),0.25*t(i2)^2+0.25*g*t(i2)^2/a,0;-g*t(i2)/a,1,0.5*g*t(i2)/a,0;0.5*g*t(i2)^2/a,0,1-0.5*g*t(i2)^2/a,t(i2);g*t(i2)/a,0,-g*t(i2)/a,1];
```

```
A=inv(B)*C;
[z,d]=eig(A);
mol=abs(d);
ma(i2)=max(max(mol));
end
plot(t,ma);
```

L'allure est au-dessous :



On peut voir qu toutes les pas de temps entre 0 et 1s, la plus grande valeur propre de cette matrice est plus grande que 1, Elle augmente quand le pas de temps augmente.

2.3)Comme la question 1.3) on donne $q_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}$ (0) peut s'écrire comme :

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ddot{q_0} + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q_0 = F_0 \sin wt \left| \begin{matrix} a \\ a/\sqrt{2} \end{matrix} \right. \quad (7)$$

Donc la relation entre $\ddot{q_0}$ et q_0 est:

$$\ddot{q_0} = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_0 + \frac{F_0 \sin wt}{ma} \left| \begin{matrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{matrix} \right. \quad (8)$$

On sait directement q_0 et $\dot{q_0}$

$$\theta_1(0) \;=\; 0\,\text{rad} \qquad \theta_2(0) \;=\; 0\,\text{rad} \qquad \dot\theta_1(0) \;=\; -1.31519275\,\text{rad.s}^{-1} \qquad \dot\theta_2(0) \;=\; -1.85996342\,\text{rad.s}^{-1}$$

2.4)

Si on donne $q_n = \begin{bmatrix} \theta_n \\ \varphi_n \end{bmatrix}$, le schéma Newmark explicite s'écrire comme :

$$\ddot{q_n} = \frac{g}{a}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_n + \frac{F_0 \sin wt_n}{ma} \begin{vmatrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$q_{n+1} = q_n + dt\dot{q_n} + 0.25dt^2\ddot{q_n} + 0.25dt^2\ddot{q_{n+1}}$$

(15)

$$\ddot{q_{n+1}} = \frac{g}{a}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} q_{n+1} + \frac{F_0 \sin wt_{n+1}}{ma} \begin{vmatrix} (2-\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}-1 \end{vmatrix}$$

(11)

$$\dot{q_{n+1}} = \dot{q_n} + 0.5dt\ddot{q}_n + 0.5dt\ddot{q_{n+1}}$$

(12)

2.5)

```
clear all;
peta =0.25;
gama =0.5;
m = 2;
a = 0.5;
g = 9.81;
F0 = 20;
w = 2*pi;
dt=0.02;
t=0:dt:3;
th=zeros(size(t));
th(1)=0;
dth=zeros(size(t));
dth(1)=-1.31519275;
d2th=zeros(size(t));
phi=zeros(size(t));
phi(1)=0;
dphi=zeros(size(t));
dphi(1)=-1.85996342;
d2phi=zeros(size(t));
q=zeros(2,size(t,2));
q(:,1)=[th(1);phi(1)];
dq=zeros(2,size(t,2));
dq(:,1)=[dth(1);dphi(1)];
d2q=zeros(2,size(t,2));
d2th(1)=g*phi(1)/a-2*g*th(1)/a+(2-2^0.5)*F0*sin(w*t(1))/(2*m*a);
d2phi(1)=2*g*th(1)/a-2*g*phi(1)/a+(2^0.5-1)*F0*sin(w*t(1))/(m*a);
d2q(:,1)=[d2th(1);d2phi(1)];
A=g/a*[2,-1;-2,2];
B=[1,0;0,1];
C=dt^2*peta*A+B;
for i1=2:length(t)
d2q(:,(i1-1))=A*q(:,(i1-1))+(F0*sin(w*t(i1-1))/m*a)*[(2-2^0.5)/2;2^0.5-1];
```

```
q(:,i1)=inv(C)*(q(:,(i1-1))+dt*dq(:,(i1-1))+dt*(0.5-peta)*d2q(:,(i1-1))+dt^2*(F0*sin(w*t(i1))/m*a)
*[(2-2^0.5)/2;2^0.5-1]);
d2q(:,(i1))=A*q(:,i1)+dt^2*(F0*sin(w*t(i1))/m*a)*[(2-2^0.5)/2;2^0.5-1];
dq(:,i1)=dq(:,(i1-1))+dt*(1-gama)*d2q(:,(i1-1))+dt*gama*d2q(:,i1);
end
```

2.6)

Quand t=0 $q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\dot q = \begin{bmatrix} -1.3152 \\ -1.8600 \end{bmatrix}$ $\ddot q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Quand t=dt : $q = \begin{bmatrix} -0.0262 \\ -0.0371 \end{bmatrix}$ $\dot q = \begin{bmatrix} -1.3182 \\ -1.8642 \end{bmatrix}$ $\ddot q = \begin{bmatrix} -0.1176 \\ -0.1663 \end{bmatrix}$

Quand t=2*dt : $q = \begin{bmatrix} -0.0529 \\ -0.0749 \end{bmatrix}$ $\dot q = \begin{bmatrix} -1.3255 \\ -1.8745 \end{bmatrix}$ $\ddot q = \begin{bmatrix} -0.2443 \\ -0.3455 \end{bmatrix}$

Quand t=0.5s : $q = \begin{bmatrix} -1.5819 \\ -2.2371 \end{bmatrix}$ $\dot q = \begin{bmatrix} -4.1581 \\ -5.8804 \end{bmatrix}$ $\ddot q = \begin{bmatrix} -18.1807 \\ -25.7114 \end{bmatrix}$

Oscillateur non linéaire à un degré de liberté

1.1) Pour savoir les relations entre q_{j+1} $\dot q_{j+1}$ $\ddot q_{j+1}$ et q_j $\dot q_j$ $\ddot q_j$ on peut utiliser des équations au-dessous :

$$\ddot q_{j+1} + \omega_0^2 \cdot q_{j+1}(1 + a q_{j+1}^2) = 0 \qquad (1)$$

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \cdot \dot q_j + \Delta t^2 \cdot (0.5-\beta)\, \ddot q_j + \beta \Delta t^2 \cdot \ddot q_{j+1} \qquad (2)$$

$$\dot q_{j+1} = \dot q_j + \Delta t (1-\gamma) \cdot \ddot q_j + \gamma \Delta t \cdot \ddot q_{j+1} \qquad (3)$$

$(1) \rightarrow (2) \Rightarrow$ $q_{j+1} = q_j + \Delta t \cdot \dot q_j + \Delta t^2 (0.5-\beta)\, \ddot q_j + \beta \cdot \Delta t^2 \cdot (-\omega_0^2 \cdot q_{j+1}(1 + a q_{j+1}^2))$

$$(1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2) q_{j+1} + \beta \Delta t^2 \cdot \omega_0^2 \cdot a q_{j+1}^3 = q_j + \Delta t \dot q_j + \Delta t^2 (0.5-\beta)\, \ddot q_j$$

$$q_{j+1} \cdot (1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 \cdot q_{j+1}^2) = q_j + \Delta t \dot q_j + \Delta t^2 (0.5-\beta)\, \ddot q_j \qquad (4)$$

Ici β = 0 donc on a

$$\ddot q_j = -\omega_0^2 q_j (1 + a q_j^2) \qquad (1)$$

$$q_{j+1} = q_j + dt\dot{q}_j + 0.5dt^2\ddot{q}_j \tag{2}$$

$$\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 q_{j+1}(1 + aq_{j+1}^2) \tag{3}$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + 0.5dt\ddot{q}_j + 0.5dt\ddot{q}_{j+1} \tag{4}$$

1.2)Avec un schéma de NEWMARK explicite, on peut programmer comme au-dessous

```
clear all;
peta =0;
gama =0.5;
a=0.1;
w = 2*pi;
dt=0.02;
t=0:dt:3;
q=zeros(size(t));
q(1)=2;
dq=zeros(size(t));
dq(1)=0;
d2q=zeros(size(t));
d2q(1)= -q(1)*w^2*(1+a*q(1)^2);
for i1 = 2:length(t)
    q(i1)=q(i1-1)+dt*dq(i1-1)+dt^2*(0.5-peta)*d2q(i1-1)+peta*dt^2*d2q(i1);
    d2q(i1)=-w^2*q(i1)*(1+a*q(i1)^2);
    dq(i1)=dq(i1-1)+dt*(1-gama)*d2q(i1-1)+gama*dt*d2q(i1);
end
```

1.3 ）

Quand t=0 $q = 2$

Quand t=dt : $q = 1.9779$

Quand t=2*dt : $q = 1.9123$

Quand t=6s : $q = 1.0329$

2.1)On doit minimiser l'erreur entre le résultat estimé et le résultat exate.

2.2) L'expression analytique de la correction est :

$$\Delta\ddot{q}_{j+1} = -\frac{f\left(\ddot{q}^*_{j+1}+\dot{q}^*_{j+1}+q^*_{j+1}\right)}{\frac{\partial f}{\partial q^*_{j+1}}0.25dt^2+\frac{\partial f}{\partial \ddot{q}^*_{j+1}}} = -\frac{\ddot{q}^*_{j+1}+\omega_0^2 q^*_{j+1}\left(1+a{q^*_{j+1}}^2\right)}{0.25dt^2\omega_0^2\left(1+3a{q^*_{j+1}}^2\right)+1} \tag{5}$$

$$\Delta q_{j+1} = 0.25dt^2\Delta\ddot{q}_{j+1} \tag{6}$$

$$\Delta\dot{q}_{j+1} = 0.5dt\Delta\ddot{q}_{j+1} \tag{7}$$

2.3)

```
clear all;
peta =0;
```

```
gama =0.5;
a=0.1;
w = 2*pi;
dt=0.02;
t=0:dt:6;
q0=zeros(size(t));
q0(1)=2;
dq0=zeros(size(t));
dq0(1)=0;
d2q0=zeros(size(t));
d2q0(1)= -q0(1)*w^2*(1+a*q0(1)^2);
q1=zeros(size(t));
q1(1)=2;
dq1=zeros(size(t));
dq1(1)=0;
d2q1=zeros(size(t));
d2q1(1)= -q1(1)*w^2*(1+a*q1(1)^2);
for i1 = 2:length(t)
    d2q0(i1)=0;
    dq0(i1)=dq0(i1-1)+dt*(1-gama)*d2q0(i1);
    q0(i1)=q0(i1-1)+dt*dq0(i1-1)+dt^2*(0.5-peta)*d2q0(i1-1);
while abs(d2q0(i1)+w^2*q0(i1)*(1+a*q0(i1)^2))>0.1
    d2q1(i1)=(-d2q0(i1)-w^2*q0(i1)*(1+a*q0(i1)^2))/(0.25*dt^2*w^2*(1+3*a*q0(i1)^2)+1);
    q1(i1)=0.25*dt^2*d2q1(i1);
    dq1(i1)=0.5*dt*d2q1(i1);
    q0(i1)=q1(i1)+q0(i1);
    dq0(i1)=dq1(i1)+dq0(i1);
    d2q0(i1)=d2q1(i1)+d2q0(i1);
end
end
```

2.4)

Quand t=0 $q = 2$

Quand t=dt : $q = 1.9671$

Quand t=2*dt : $q = 1.9137$

Quand t=6s : $q = -0.2438$

3.1)

Energie cinétique : $E_c = \frac{m\dot{q}^2}{2}$

Energie potentielle : $E_p = Fq = kq^2(1 + aq^2)$

Energie mécanique : $E = E_c + E_p = kq^2(1 + aq^2) + \frac{m\dot{q}^2}{2}$

3.2)

E de NEWMARK explicite E = 217.2621
E(i1)=w^2*q(i1)^2*(1+a*q(i1)^2)+dq(i1)^2/2;
E de NEWMARK implicite E= 212.4576
E0(i1)=w^2*q0(i1)^2*(1+a*q0(i1)^2)+dq0(i1)^2/2;
Ils ont presque la même valeur avec environ 2% différence. C'est-à-dire au premier pas, il commence à apparaitre les petites différences sur l'énergie entre les deux types de schémas.