Prénom : Maeva Hao Yueming DM n°3 date : 17/03/2020
n°'étudiant : 15241004 / ZY1924108

---

# Séance 3 : Dynamique des Structures, Schémas Euler Implicite et Runge Kutta

**Écrire un rapport avec vos lignes de code en Matlab ou Scilab sur l'exercice Oscillateur conservatif à un degré de liberté . répondre à toutes les questions le schéma Euler explicite, Implicite et Runge Kutta**

## 2.1

$$\begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{bmatrix}$$

$$\ddot{q}_j + W_0^2 q_j = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_j = -W_0^2 q_j$$

alors,

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t \cdot \ddot{q}_j$$

$$= \dot{q}_j - W_0^2 q_j \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -W_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}}_{A \text{ (matrice d'amplication)}} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

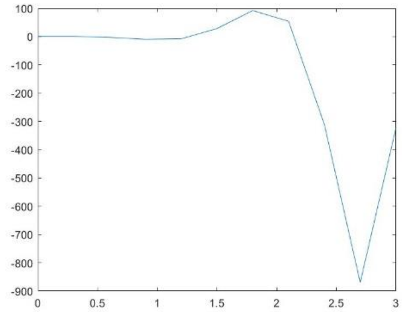
## 2.2

Méthode 2 :

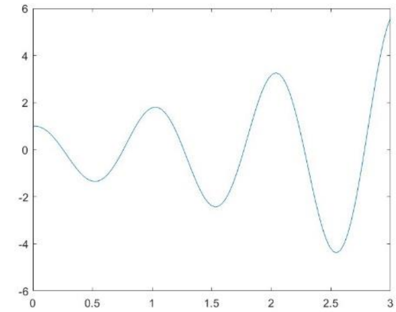
```
clear all
w0=2*pi; q0=1; Dq0=0;
n=1000; T0 = 3; dt = T0/n;
t = 0:dt:T0;
A = [1,dt;-w0^2*dt,1];
U(:,1) = [q0;Dq0];
for j = 2:length(t)
    U(:,j) = A*U(:,j-1);
end
plot(t,U(1,:))
hold on ;
```

## 2.3

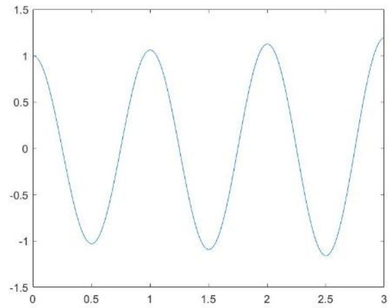
Avec n=10, et Δt=0.3 :



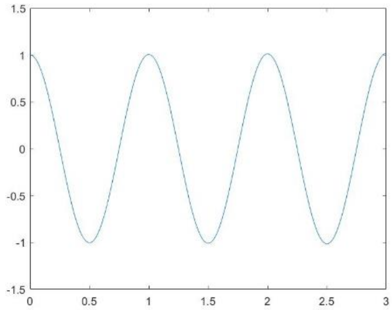

Avec n=100, et Δt=0.03 :




Avec n=1000, et Δt=0.003 :




Avec n=10000, et Δt=0.0003 :



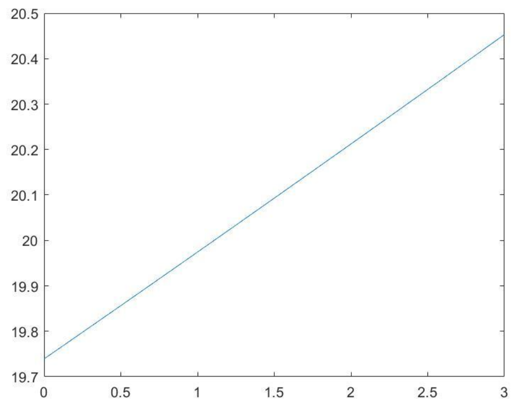

On peut voir que plus le pas de temps Δt est petit, plus la divergence est lente.

## 2.4

Code :

```
for j = 1:length(t)
    Estar(j)=0.5*(U(2,j)^2+ w0^2*U(1,j)^2);
end
plot(t,Estar);
hold on;
```

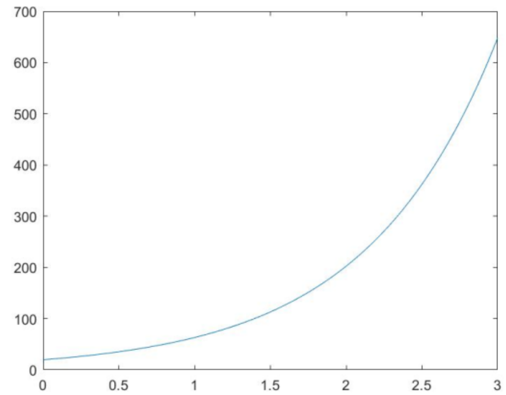
Résultat (avec Δt=0.0003) :



E*(exacte)= Estar=2*pi^2=19.7392

En utilisant cette méthode (avec Δt=0.0003), E* associée au schéma d'EULER explicite est de 19.7392 à 20.4532.

Quand on fait varier Δt, avec Δt=0.03 :



On observe que si Δt n'est pas assez petit, E* se varie rapidement de 19.7392 à 648.0707.
C'est plus loin de E* exact.

## 2.5

Les valeurs propres de A en fonction du pas de temps Δt :

$$\lambda = 1 \pm i\omega_0\Delta t = 1 \pm 2\pi\, i\, \Delta t$$

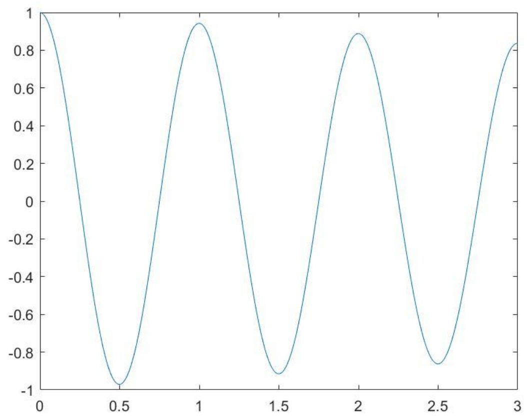
Les modules sont plus grands que 1, donc instable.

## 3.1

Codes :

```
clear all;
w0 = 2*pi; q0 = 1; Dq0 = 0; T0 = 3;
n = 1000;
dt = T0/n;
t = 0:dt:T0;
A = [1,dt;-w0^2*dt,1];
U(:,1) = [q0;Dq0];
for j = 2:length(t)
    U(:,j) = 1/(1 + w0^2 * dt^2)* A * U(:,j-1);
end
plot(t,U(1,:))
hold on ;
```

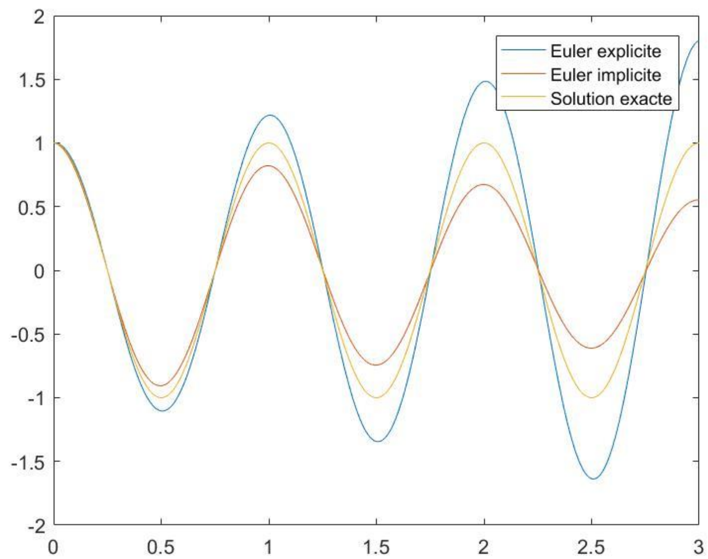
Résultats (Avec n=1000, Δt=0.003) :



## 3.2

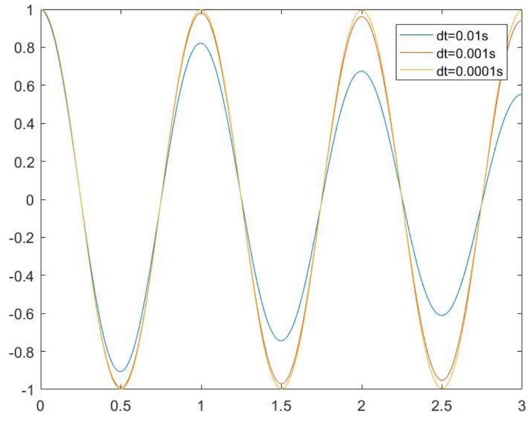
On prend comme pas de temps : $\Delta t = 0.01$s,

Comparons les valeurs de q fournies par les trois solutions：



## 3.3

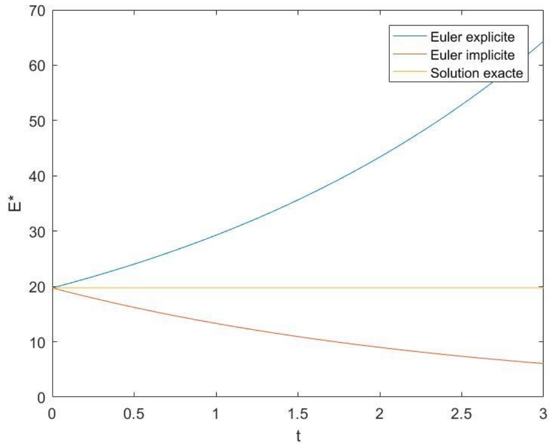
Résultats :



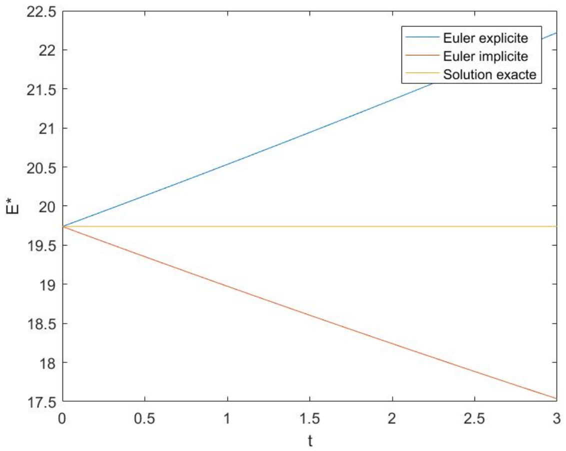

En testant différents pas de temps ($\Delta t = 0.01s$, $\Delta t = 0.001s$, $\Delta t = 0.0001s$), on peut voir sur les résultats que plus le pas de temps $\Delta t$ est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

## 3.4

Résultats ($\Delta t = 0.01s$):




Résultats ($\Delta t = 0.001s$):




On peut observer que en utilisant Euler implicite, E* diminue, et plus $\Delta t$ est petit, plus E* est précise

## 3.5

Les valeurs propres de la matrice d'amplification en fonction du pas de temps $\Delta t$ :

$$\lambda = \frac{1 \pm i\omega_0 \Delta t}{1+\omega_0{}^2 \Delta t^2}$$

Les modules sont plus petits que 1, donc stable.

## 4.1

$$\ddot{q} + w_0^2 q = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{q} = -w_0^2 q$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

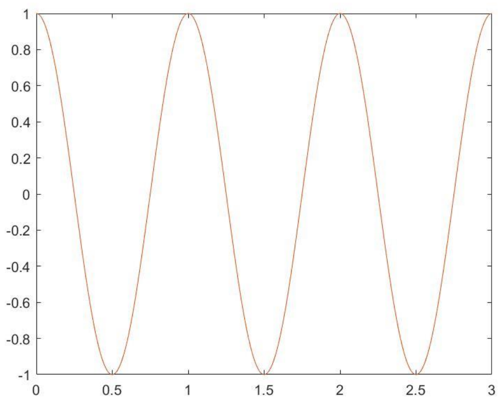
## 4.2

RUNGE KUTTA :

Codes :

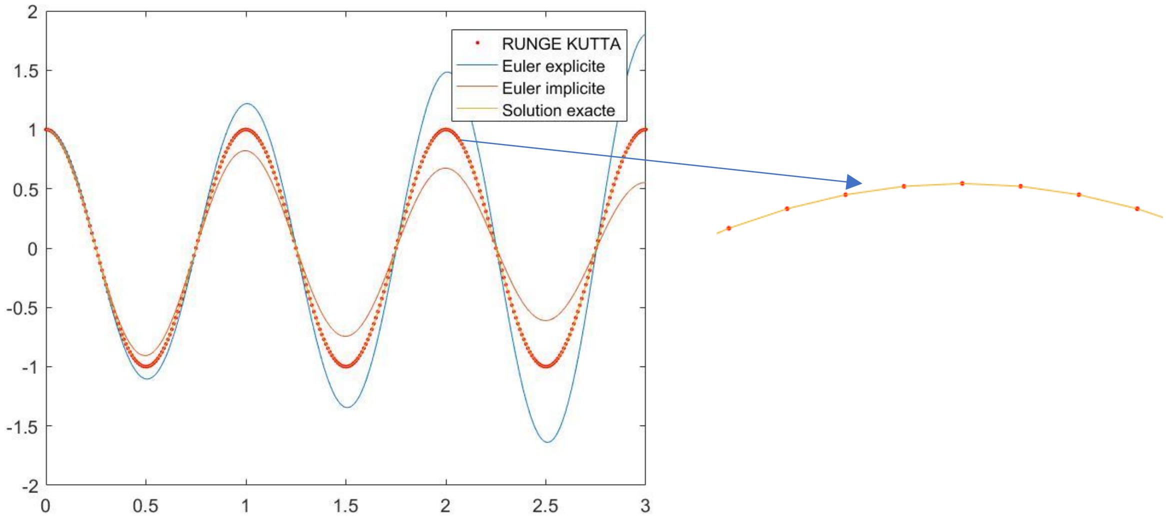
```
w0=2*pi; q0=1; Dq0=0; T0 = 3;
dt = 0.001;
t = 0:dt:T0;
A=[0,1;-w0^2,0];
U(:,1)=[q0;Dq0];
for j=1:length(t)-1
    k1=A*U(:,j);
    k2=A*(U(:,j)+0.5*dt*k1);
    k3=A*(U(:,j)+0.5*dt*k2);
    k4=A*(U(:,j)+dt*k3);
    K=1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    U(:,j+1)=U(:,j)+K*dt;
end
plot(t,U(1,:));
hold on;
```

Résultats ($\Delta t$ = 0.001s):



## 4.3

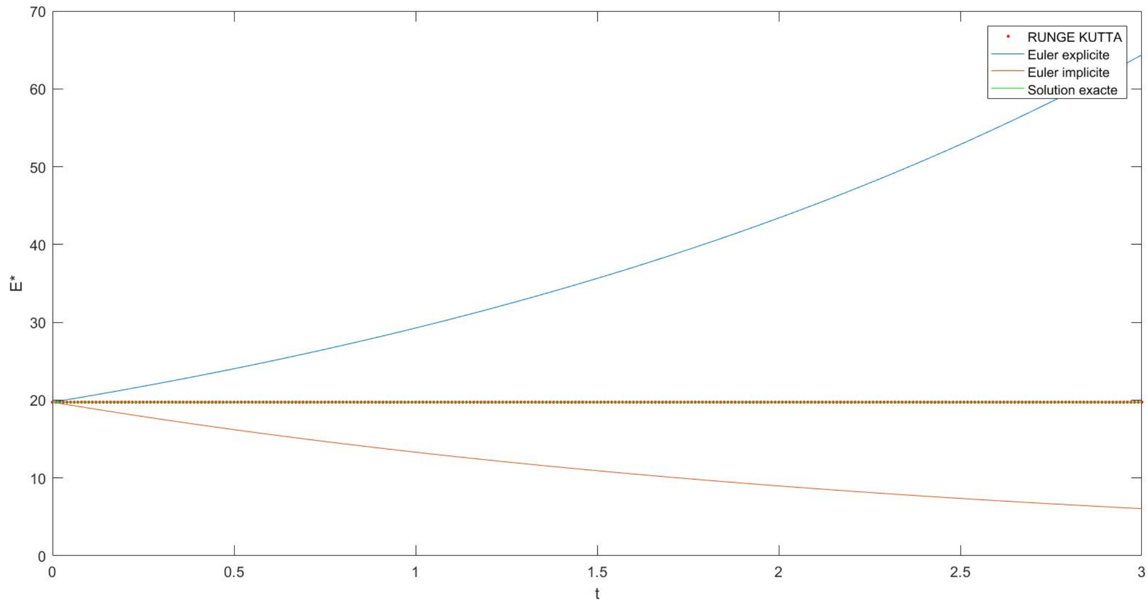
Résultats (Δt = 0.01s):




En comparant les valeurs obtenues, on observe que le résultats de RUNGE KUTTA est la plus précises.

## 4.4

Résultats (Δt = 0.01s):




On peut voir que E* de RUNGE KUTTA est constant, et ils sont les mêmes que E* de solution exacte.