Mécanique Numérique DM2

2.1 Démonstration d'Euler explicite avec matrice d'amplification.

+ Démonstrat° d'Euler explicite avec matrice d'amplificat°

D'abord, discrétisat° du temps

$t_0, \dots t_i, \dots t_N$

$\forall i \in [\![0, N-1]\!],\ t_{i+1} - t_i = \Delta t,\ \Delta t \ll 1$

on note $\begin{cases} q(t_j) = q_j \\ \dot{q}(t_j) = \dot{q}_j \\ \ddot{q}(t_j) = \ddot{q}_j \end{cases}$

D'après la définition de dérivée et dérivée seconde,

On a

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \cdot \dot{q}_j$$
$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t \cdot \ddot{q}_j$$

Or $\ddot{q}_j + w_0^2 q_j = 0$

alors $\ddot{q}_j = -w_0^2 q_j$

D'où $\left| \begin{array}{l} q_{j+1} = q_j + \Delta t \cdot \dot{q}_j \\ \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j \cancel{+} - w_0^2 \Delta t q_j \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -w_0^2 \Delta t & 1 \end{pmatrix}}_{=A \text{ : matrice d'Amplification}} \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$$

Donc on obtient l'équat° d'Euler explicite avec matrice d'amplification.

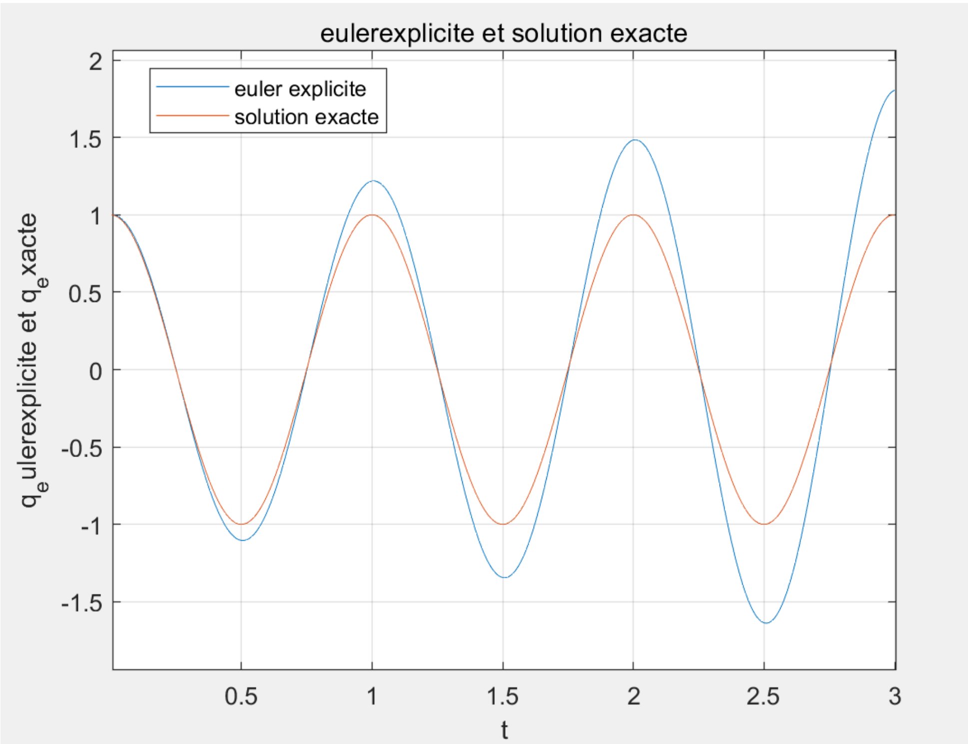
2.2 Programme de la solution du problème à l'aide d'Euler explicite en utilisant la méthode de matrice A

Script Matlab

```
 q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;dt=0.01;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
A=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
```

```
for i=2:nb
   q=A*q;
   q1b(i)=q(1);
end
plot(t,q1b),hold on
plot(t,cos(2*pi*t))
grid on;
xlabel('t');
ylabel('q_eulerexplicite et q_exacte');
title('eulerexplicite et solution exacte')
```

On obtient le dessin dessous :



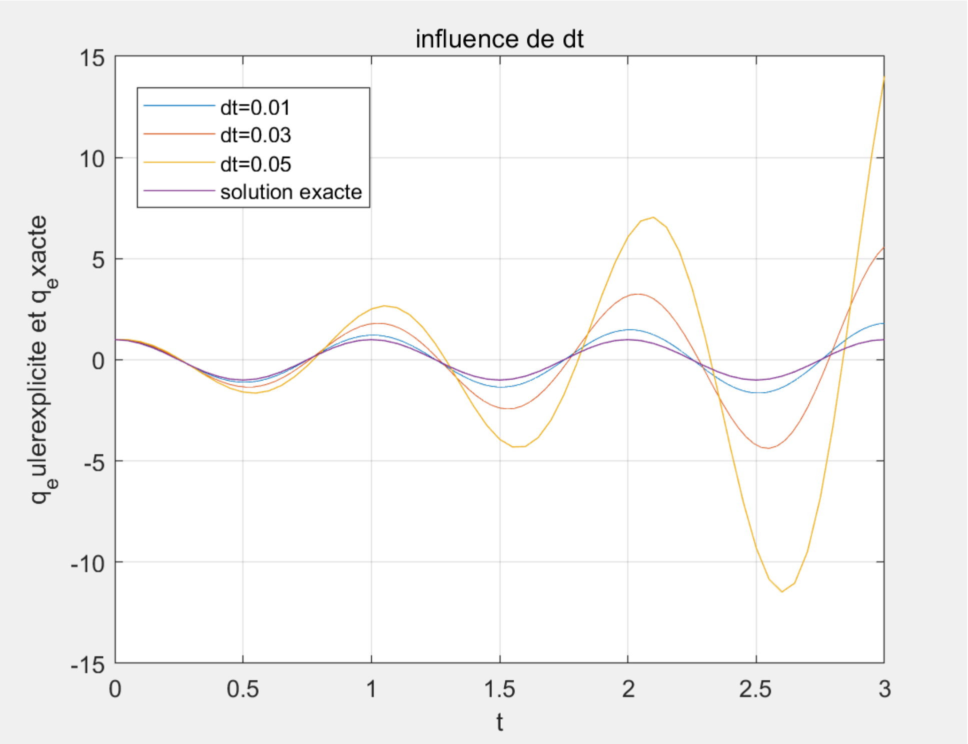
Il y a un décalage entre la solution exacte et la solution obtenue à l'aide d'Euler explicite, et la décalage se propage en fonction du t.

2.3 L'influence du pas de temps

On teste et compare l'influence de 3 pas de temps, dt=0.01, 0.03 et 0.05, script Matlab comme dessous :

```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;
for dt=[0.01 0.03 0.05 ]
   t=(0:dt:T0)';
   nb=size(t,1);
   q=[q0;dq0];
   q1b=zeros(nb,1);
   q1b(1)=q0;
   A=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
   for i=2:nb
      q=A*q;
      q1b(i)=q(1);
   end
   plot(t,q1b),hold on
end
plot(t,cos(2*pi*t))
grid on;
xlabel('t');
ylabel('q_eulerexplicite et q_exacte');
title('influence de dt')
```

Bien entendu, la solution numérique obtenue pas ce schéma d'intégration est divergente. En comparant les lignes dans le dessin dessous, on a donc, le décalage augmente en fonction du pas du temps(dt).



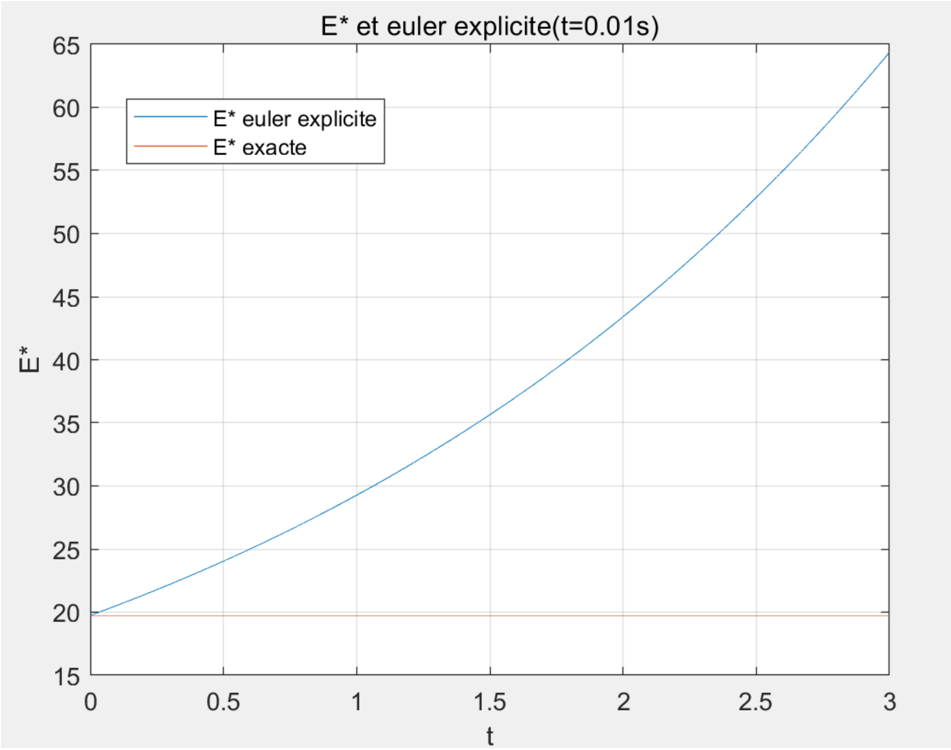
2.4.1 Calcul du E*(dt=0.01) et Comparaison avec E* exacte

Scripte Matlab

```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;dt=0.01;

t=(0:dt:T0)';

nb=size(t,1);

q=[q0;dq0];

q1b=zeros(nb,1);

dq1b=zeros(nb,1);

E_etoile_euler_explicite=zeros(nb,1);
```

```
q1b(1)=q0;
dq1b(1)=dq0;
E_etoile_euler_explicite(1)=2*pi*pi;
A=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
for i=2:nb
    q=A*q;
    q1b(i)=q(1);
    dq1b(i)=q(2);

E_etoile_euler_explicite(i)=1/2*(dq1b(i).*dq1b
(i)+(2*pi*q1b(i))^2);
end
plot(t,E_etoile_euler_explicite),hold on
plot(t,t*0+2*pi*pi)
grid on;
xlabel('t');
ylabel('E*');
title('E* et euler explicite(t=0.01s)')
```

En obtenant le dessin dessous, on sait que E*(dt=0.01)_EE n'est plus un constant, au contraire E*_exacte est un constant, et la différence entre les deux agrandit au cours du temps. Donc il vaut mieux si on choisit un pas de temps(dt) assez pettit.



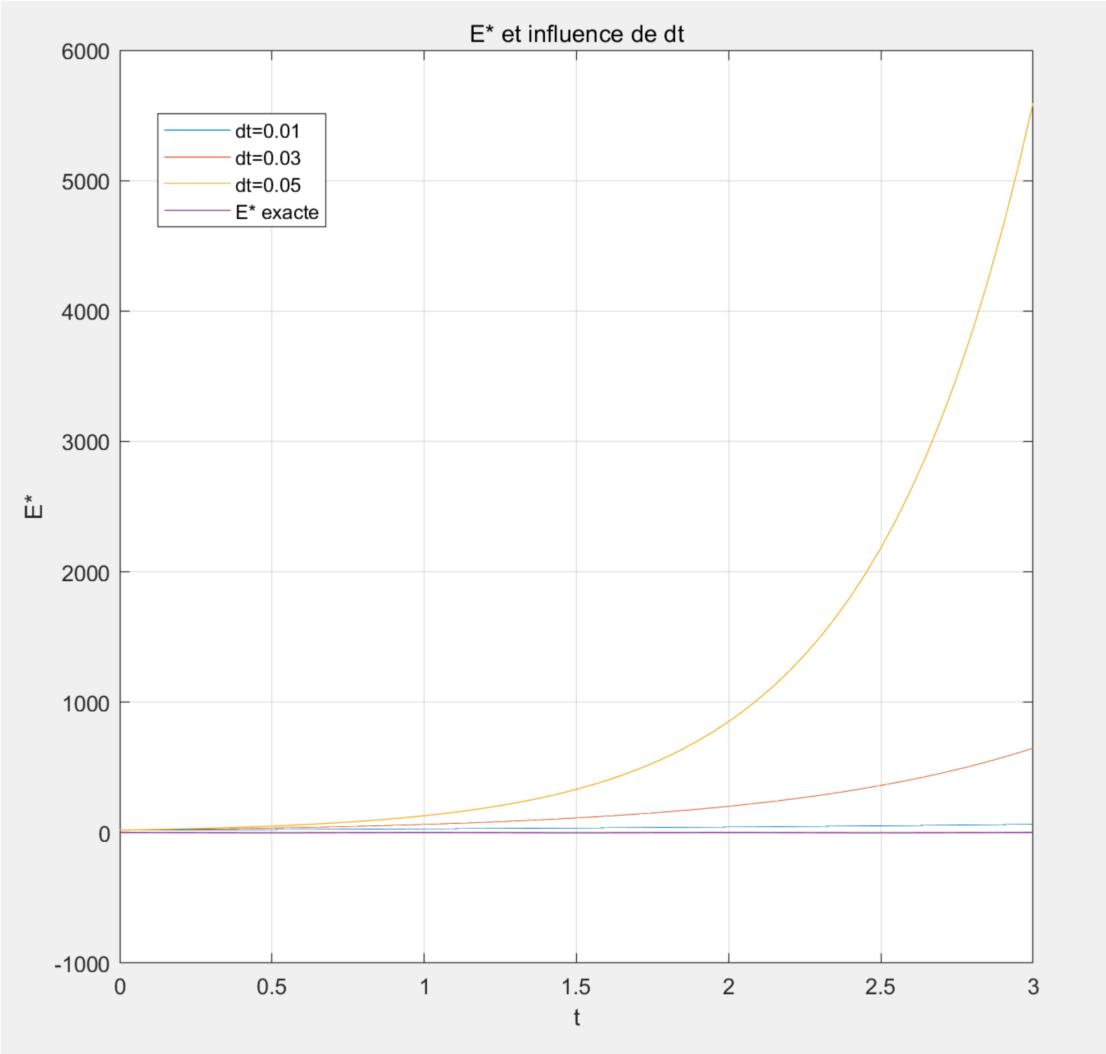
2.4.1 L'influence du dt sur E*

Script Matlab

```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;
for dt=[0.01 0.03 0.05]
  t=(0:dt:T0)';
  nb=size(t,1);
  q=[q0;dq0];
  q1b=zeros(nb,1);
  dq1b=zeros(nb,1);
  E_etoile_euler_explicite=zeros(nb,1);
  q1b(1)=q0;
  dq1b(1)=dq0;
  E_etoile_euler_explicite(1)=2*pi*pi;
```

```
    A=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
    for i=2:nb
      q=A*q;
      q1b(i)=q(1);
      dq1b(i)=q(2);
      E_etoile_euler_explicite(i)=1/2*(dq1b(i).
      *dq1b(i)+(2*pi*q1b(i))^2);
    end
    plot(t,E_etoile_euler_explicite),hold on
  end
  plot(t,t*0+2*pi*pi)
  grid on;
  xlabel('t');
  ylabel('E*');
  title('E* et influence de dt')
```

On obtient le dessin qui indique E* augmente très vite en fonction du dt. Il nous indique que c'est mieux de choisir un pas de temps(dt) assez petit.



2.5 Les valeurs propres de matrice d'amplification

Calcul les valeurs propres de A

```
syms dt w0
A=[1 dt;-w0*w0*dt 1]
[z,d]=eig(A)
mo=abs(d)
```

On a donc les valeurs propres :

d =[1 - dt*w0*1i , 0]

[0 , 1 + dt*w0*1i]

et m0=abs(d)=racine(1+(w0*dt)^2) absolument plus grand que 1.

Or

$[z, d] = eig(A)$

$A = z * d * inv(z)$

$q_{j+1} = A q_j$

$q_{j+k} = A^k q_j$

$= z * d^k * inv(z)$

Or $abs(d) > 1$.

d'où d^k diverge

Donc la solution obtenue par Euler Explicite est inconditionnellement divergente.