

Oscillateur conservatif à un degré de liberté

1.1 La solution est $q = \cos(2\pi t)$

1.2 $E^* = \frac{1}{2}(4\pi^2 \sin^2(2\pi t) + 4\pi^2 \cos^2(2\pi t)) = 2\pi^2$ C'est constante, E_p et E_c sont conservatives.

2.1 D'après la relation (1), on a $\ddot{q} = -\omega_0^2 q$, alors la relation (5) devient

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} + \Delta t \times \begin{pmatrix} \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 q_j \end{pmatrix}, \text{ et donc la relation (6) } \begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$$

2.2 $dt=0.01$;

$t=0:dt:3$;

$q(1)=1$;

$dq(1)=0$;

$d2q(1)=-4*\pi^2$;

for $j=1:3/dt$

$q(j+1)=q(j)+dt*dq(j)$;

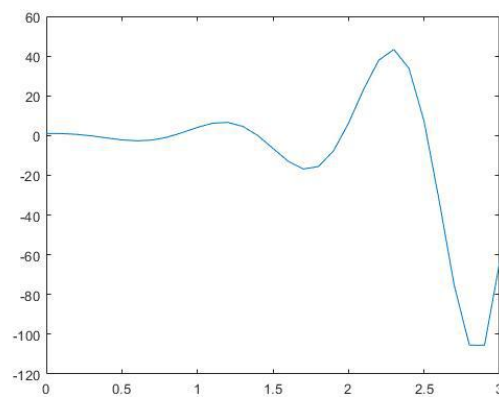
$dq(j+1)=dq(j)+dt*d2q(j)$;

$d2q(j+1)=-4*\pi^2*q(j+1)$;

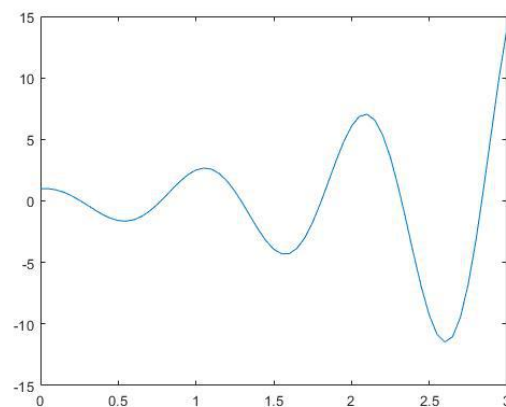
end

$\text{plot}(t,q)$

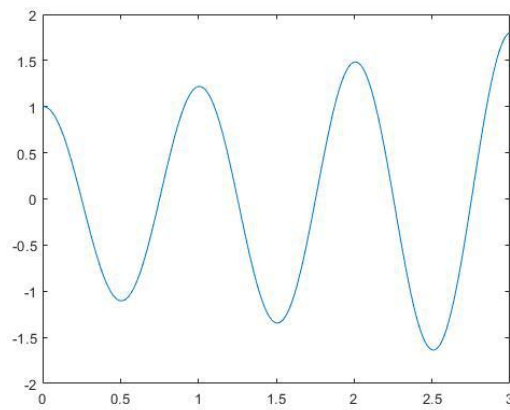
2.3 pour le pas de temps 0.1s :



pour le pas de temps 0.05s :



pour le pas de temps 0.01s :



On voit que plus le pas de temps est petit, le plus la divergence est lente.

2.4 E^* égale à $2\pi^2$ quand $t=0$, et puis diverge. On voit que plus le pas de temps est petit, le plus la divergence est lente.

2.5 Les valeurs propres de la matrice d'amplification sont $1+2\pi i\Delta t$ et $1-2\pi i\Delta t$. Il y a un terme imaginaire, ce qui rend le système instable.