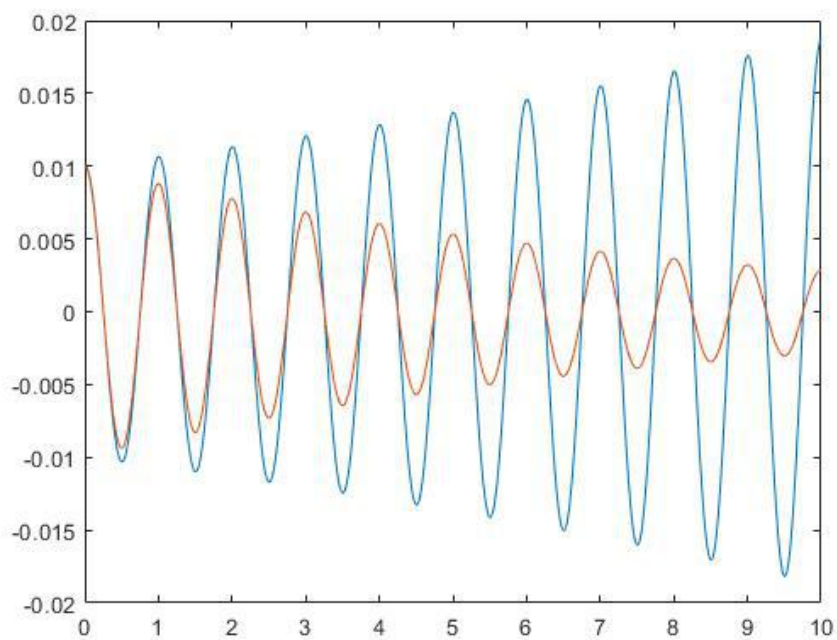


étude d'un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté

```
1.1 clear all;
dt=0.02/pi;
t=0:dt:10;
x(1)=0.01;
dx(1)=0;
d2x(1)=-0.04*pi^2;
for j=1:10/dt
    x(j+1)=x(j)+dt*dx(j);
    dx(j+1)=dx(j)+dt*d2x(j);
    d2x(j+1)=-0.04*pi*dx(j+1)-4*pi^2*x(j+1);
end
plot(t,x);
hold on;
f=exp(-0.04*pi.*t).*(0.01*cos(2*pi*sqrt(1-0.02^2).*t)+0.0004*pi*s
in(2*pi*sqrt(1-0.02^2).*t)/(2*pi*sqrt(1-0.02^2)));
plot(t,f);
```

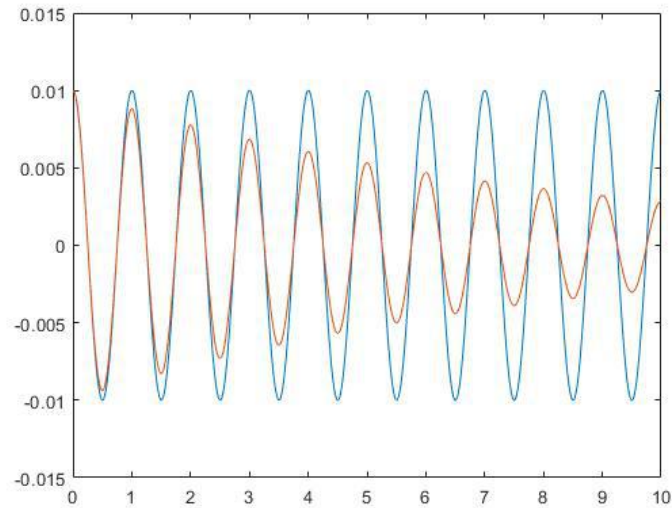
1.1.a) Si on choisit $\frac{2\varepsilon}{w_0} < \Delta t$, on a :



(Courbe bleue est obtenue par le schéma d'EULER explicite, courbe orange est la solution exacte)

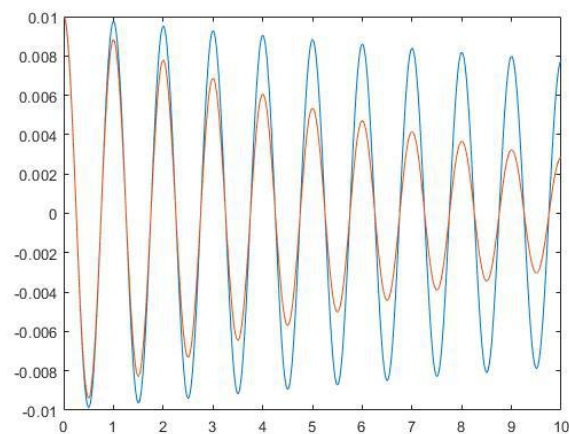
Il diverge.

1.1.b) Si on choisit $\frac{2\varepsilon}{w_0} = \Delta t$, on a :



(Courbe bleue est obtenue par le schéma d'EULER explicite, courbe orange est la solution exacte)
c'est oscillation harmonique.

1.1.c) Si on choisit $0.8 \times \frac{2\varepsilon}{w_0} = \Delta t$, on a :

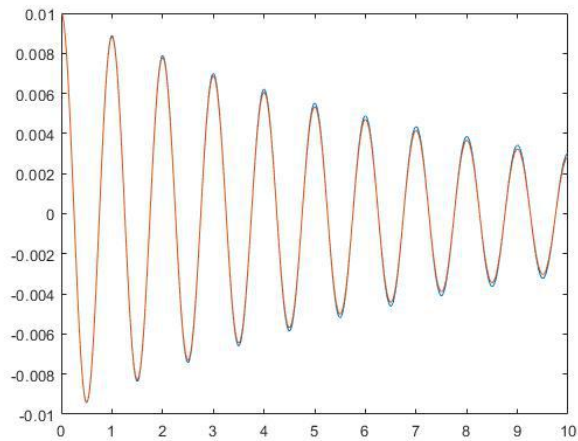


(Courbe bleue est obtenue par le schéma d'EULER explicite, courbe orange est la solution exacte)

Il converge.

1.1.d) La différence entre la solution numérique et la solution exacte est presque nulle, on peut dire la solution numérique est précise.

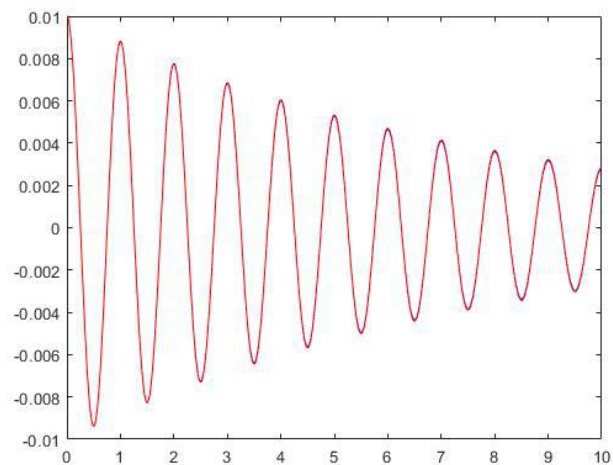
à partir de $\frac{\Delta t}{\frac{2\varepsilon}{w_0}} = 0.05$, la solution est assez précise.



1.2

$\Delta t = 0.0001$

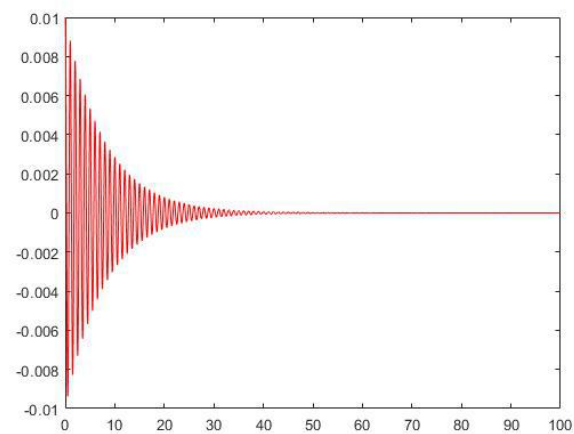
```
clear all;
dt=0.0001;
t=0:dt:10;
x(1)=0.01;
dx(1)=0;
d2x(1)=-0.04*pi^2;
for j=1:10/dt
    x(j+1)=(x(j)+dt*dx(j)/(1+0.08*dt*pi))/(1+4*pi^2*dt^2/(1+0.08*dt*pi));
    dx(j+1)=(dx(j)-4*pi^2*dt*x(j+1))/(1+0.08*dt*pi);
    d2x(j+1)=-0.08*pi*dx(j+1)-4*pi^2*x(j+1);
end
plot(t,x,'b');
hold on;
omega=2*pi*sqrt(1-0.02^2);
f=exp(-0.04*pi*t).*(0.01*cos(omega*t)+0.0004*pi*sin(omega*t)/omega);
plot(t,f,'r');
```



```

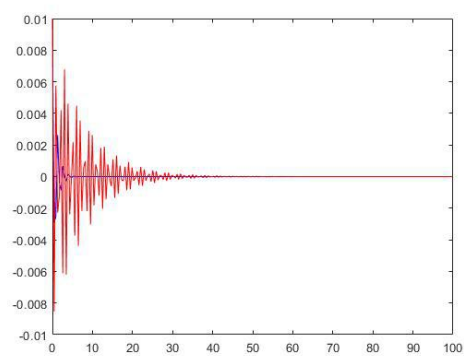
1.3.a)
clear all;
h=0.04;
dt=h*sqrt(2)/pi;
t=0:dt:100;
A=[0 1;-4*pi^2 -0.08*pi];
Y=[0.01;0];
for j=1:100/dt
    y(j)=Y(1);
    dy(j)=Y(2);
    k1=A*Y;
    k2=A*(Y+dt*k1/2);
    k3=A*(Y+dt*k2/2);
    k4=A*(Y+dt*k3);
    K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    Y=Y+K*dt;
end
plot(t(1:100/dt),y)
Quand h =0.04 :

```



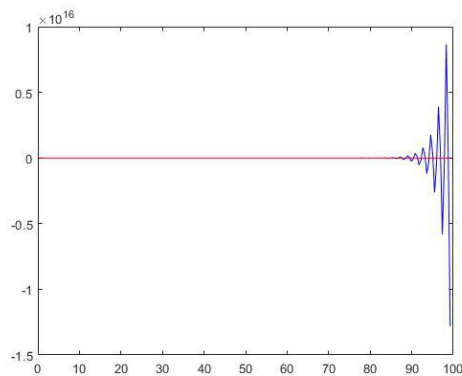
La courbe est coïncidente avec la solution exacte.

Quand h =0.96 :



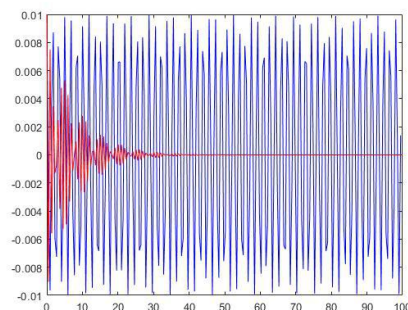
La courbe de Runge Kutta (bleue) s'annule plus vite que la solution exacte (rouge).

Quand $h=1.04$:



La courbe de Runge Kutta diverge.

1.3.b) $h_c = 1.0135$, $\Delta t_c \approx 0.4562$



étude d'un double pendule avec l'hypothèse des petits mouvements.

1.1

$$B = \begin{bmatrix} a + 2\beta g \Delta t^2 & -\beta g \Delta t^2 & 0 & 0 \\ -2\beta g \Delta t^2 & a + 2\beta g \Delta t^2 & 0 & 0 \\ 2\gamma g \Delta t & -\gamma g \Delta t & a + 2\gamma g \Delta t & -\gamma g \Delta t \\ -2\gamma g \Delta t & 2\gamma g \Delta t & -2\gamma g \Delta t & a + 2\gamma g \Delta t \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a - 2(0.5 - \beta)g \Delta t^2 & (0.5 - \beta)g \Delta t^2 & \Delta t & \Delta t \\ 2(0.5 - \beta)g \Delta t^2 & a - 2(0.5 - \beta)g \Delta t^2 & \Delta t & \Delta t \\ -2(1 - \gamma)g \Delta t & (1 - \gamma)g \Delta t & a & a \\ 2(1 - \gamma)g \Delta t & -2(1 - \gamma)g \Delta t & a & a \end{bmatrix}$$

$$A = B^{-1}C =$$

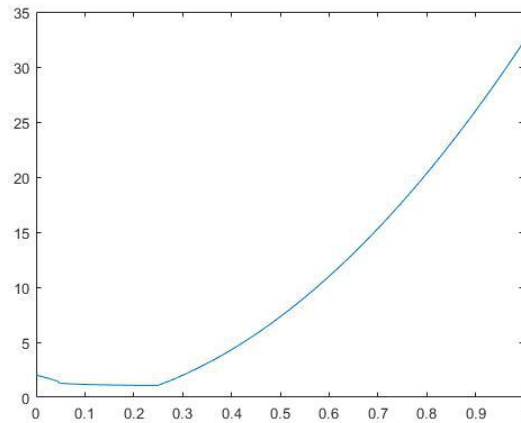
$$\begin{bmatrix} (-g \Delta t^2 + a)/a & (\Delta t^2 g)/(2a) & \Delta t/a & \Delta t/a \\ (\Delta t^2 g)/a & (-g \Delta t^2 + a)/a & \Delta t/a & \Delta t/a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(\Delta t g (4a^2 - 3a \Delta t^2 g + 2a \Delta t g - \Delta t^3 g^2))/(a(2a^2 + 4a \Delta t g + \Delta t^2 g^2)), \\ -(\Delta t g (-4a^2 + 4a \Delta t^2 g + \Delta t^3 g^2))/(2a(2a^2 + 4a \Delta t g + \Delta t^2 g^2)), (2a^3 + 3a^2 \Delta t g - a \Delta t^2 g - \Delta t^3 g^2)/(a(2a^2 + 4a \Delta t g + \Delta t^2 g^2)), (2a^3 + 3a^2 \Delta t g - a \Delta t^2 g - \Delta t^3 g^2)/(a(2a^2 + 4a \Delta t g + \Delta t^2 g^2)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(\Delta t g (-4a^2 + 4a \Delta t^2 g + \Delta t^3 g^2))/(a(2a^2 + 4a \Delta t g + \Delta t^2 g^2)), \\ -(\Delta t g (4a^2 - 3a \Delta t^2 g + 2a \Delta t g - \Delta t^3 g^2))/(a(2a^2 + 4a \Delta t g + \Delta t^2 g^2)), (2a^3 + 3a^2 \Delta t g - a \Delta t^2 g - \Delta t^3 g^2)/(a(2a^2 + 4a \Delta t g + \Delta t^2 g^2)), (2a^3 + 3a^2 \Delta t g - a \Delta t^2 g - \Delta t^3 g^2)/(a(2a^2 + 4a \Delta t g + \Delta t^2 g^2)) \end{bmatrix}$$

$$-(dt \cdot g \cdot (4a^2 - 3a \cdot dt^2 \cdot g + 2a \cdot dt \cdot g - dt^3 \cdot g^2)) / (a \cdot (2a^2 + 4a \cdot dt \cdot g + dt^2 \cdot g^2)), \\ (2a^3 + 4a^2 \cdot dt \cdot g - dt^3 \cdot g^2) / (a \cdot (2a^2 + 4a \cdot dt \cdot g + dt^2 \cdot g^2)), (2a^3 + 4a^2 \cdot dt \cdot g - dt^3 \cdot g^2) / (a \cdot (2a^2 + 4a \cdot dt \cdot g + dt^2 \cdot g^2))]$$

1.2



C'est la courbe des plus grandes valeurs propres de matrice A, on peut voir que quand $dt > 0.24$, la valeur propre devient très grande, quand $dt < 0.24$, la valeur propre est presque 1, donc le pas de temps critique est 0.24.

$$1.3 \quad q_0 = \begin{pmatrix} \theta_1(0) \\ \theta_2(0) \end{pmatrix}, \quad \dot{q}_0 = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{pmatrix}, \quad \ddot{q}_0 = \frac{g}{a} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} q_0$$

$$1.4 \quad \begin{pmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} + F \quad \text{avec} \quad F = \frac{\Delta t F_0 \sin wt}{m} B^{-1} \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Delta t \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Delta t \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{q} = \frac{g}{a} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} q + \frac{F_0 \sin wt}{ma} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

1.5

2.1 C'est la même matrice que la question 1.1

2.2 La valeur propre est toujours presque égale à 1.

2.3 Ce sont les mêmes relations que la question 1.4.

2.4 C'est la même chose que la question précédente.

2.5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{inv}(A)$$

```

C=inv(A)*B;
syms a;
syms g;
syms b;
syms y;
syms dt;
syms m;
syms w;
syms F0;
syms n;
D=[a+2*b*g*dt^2 -b*g*dt^2 0 0;
    -2*b*g*dt^2 a+2*b*g*dt^2 0 0;
    2*y*g*dt -y*g*dt a+2*y*g*dt -y*g*dt;
    -2*y*g*dt 2*y*g*dt -2*y*g*dt a+2*y*g*dt];
E=[a-2*(0.5-b)*g*dt^2 (0.5-b)*g*dt^2 dt dt;
    2*(0.5-b)*g*dt^2 a-2*(0.5-b)*g*dt^2 dt dt;
    -2*(1-y)*g*dt (1-y)*g*dt a a;
    2*(1-y)*g*dt -2*(1-y)*g*dt a a];
F=inv(D)*E;
F=subs(F,'b',0);
F=subs(F,'y',0.5);

m=2;
a=0.5;
g=9.81;
F0=20;
w=2*pi;
dt=0.02;
v=[];
F=simplify(F)
G=dt*F0*sin(w*n*dt)*inv(D)*[(2-sqrt(2))*dt/4;(sqrt(2)-1)*dt/2;1-sqrt(2)/2;sqrt(2)-1]
S=[0;0;-1.31519275;-1.85996342];
q=[0;0];
dq=[-1.31519275;-1.85996342];
d2q=-9.81/0.5*C*q;
for n=0:(8/dt-1)
    S=eval(F)*S+eval(G);
    q=[q,S(1:2)];
    dq=[dq,S(3:4)];
    d2q=[d2q,eval(-g*C*S(1:2)/a+F0*sin(w*n*dt)*[1-sqrt(2)/2;sqrt(2)-1]/m*a)];
end
t=(0:(8/dt))*dt
plot(t,q(1,:));

```

2.6

q(0)	q(dt)	q(2*dt)	q(0.5)
ans =	ans =	ans =	ans =
0	-2.6075e-02	-5.1836e-02	6.7938e-02
0	-3.6964e-02	-7.3568e-02	1.3633e-02
dq(0)	dq(dt)	dq(2*dt)	dq(0.5)
ans =	ans =	ans =	ans =
-1.3152e+00	-1.3122e+00	-1.2835e+00	1.4235e+00
-1.8600e+00	-1.8557e+00	-1.8236e+00	2.2889e+00

Oscillateur non lineaire a un degre de liberte

1.1

$$\ddot{q}_j = -\omega_0^2 q_j (1 + \alpha q_j^2)$$

$$q_{j+1} = q_j + dt \dot{q}_j + 0.5 dt^2 \ddot{q}_j$$

$$\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 q_{j+1} (1 + \alpha q_{j+1}^2)$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + 0.5 dt \ddot{q}_j + 0.5 dt \ddot{q}_{j+1}$$

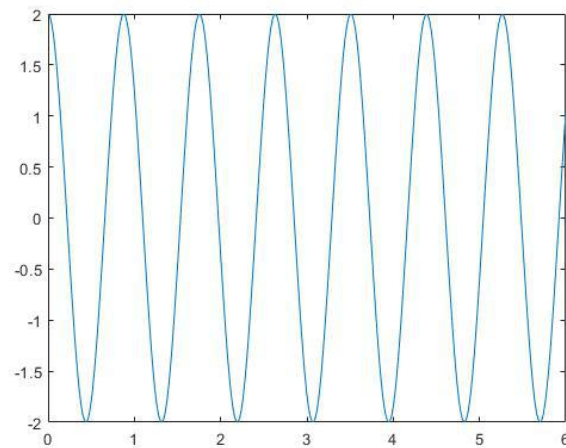
1.2

```

q0=2;
dq0=0;
w0=2*pi;
alpha=0.1;
d2q0=-w0^2*q0*(q+alpha*q0^2);
T0=6;
gamma1=0.5;
beta1=0;
dt1=0.02;
t1=(0:dt1:T0)';
np1=size(t1,1);
q1=zeros(np1,1);
dq1=zeros(np1,1);
d2q1=zeros(np1,1);
e1=zeros(np1,1);
q1(1)=q0;
dq1(1)=dq0;
d2q1(1)=d2q0;
for i=1:(np1-1)
    q1(i+1)=q1(i)+dt1*dq1(i)+dt1^2*0.5*d2q1(i);
    d2q1(i+1)=-w0^2*q1(i+1)*(1+alpha*q1(i+1)^2);
    dq1(i+1)=dq1(i)+0.5*dt1*(d2q1(i)+d2q1(i+1));
end

```

```
plot(t1,q1)
```



C' est la courbe de Newmark explicite quand $dt=0.02$

1.3

à $t=0$, $q=2$;

à $t=dt$, $q=1.9779$;

à $t=2dt$, $q=1.9123$;

à $t=T_0$, $q=1.0329$;

2.1

On a $\beta = 0.25$ $\gamma = 0.5$, on cherche à minimiser l'erreur entre la solution de Newmark implicite et la solution exacte.

2.2

$$\Delta \ddot{q}_{j+1} = - \frac{f(\ddot{q}_{j+1} + \dot{q}_{j+1} + q_{j+1})}{0.25dt^2 \frac{\partial f}{\partial q_{j+1}} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{q}_{j+1}}} = - \frac{\ddot{q}_{j+1} + \omega_0^2 \dot{q}_{j+1}(1 + aq_{j+1}^2)}{0.25dt^2 \omega_0^2(1 + 3aq_{j+1}^2) + 1}$$

$$\Delta q_{j+1} = 0.25dt^2 \Delta \ddot{q}_{j+1}$$

$$\Delta \dot{q}_{j+1} = 0.5dt \Delta \ddot{q}_{j+1}$$

2.3 et 2.4

```
gamma2=0.5;
```

```
beta2=0.25;
```

```
q2=zeros(n,1);
```

```
dq2=zeros(n,1);
```

```
d2q2=zeros(n,1);
```

```
e2=zeros(n,1);
```

```
q2(1)=q0;
```

```
dq2(1)=dq0;
```

```
d2q2(1)=d2q0;
```

```
e=0.01;
```

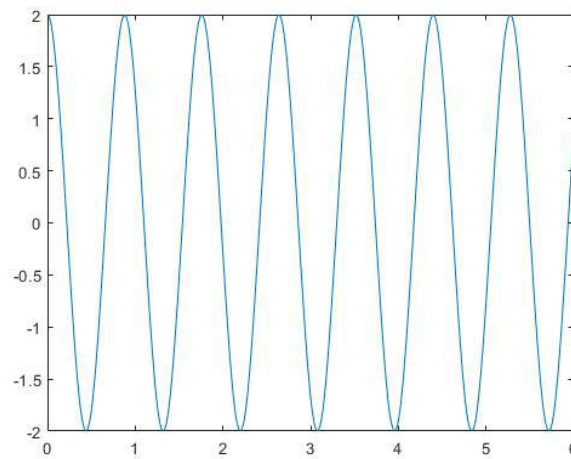
```
for i=1:(n-1)
```

```

q2(i+1)=q2(i)+dt1*dq2(i)+dt1^2*(0.5-beta2)*d2q2(i);
dq2(i+1)=dq2(i)+dt1*(1-gamma2)*d2q2(i);
d2q2(i+1)=0;
while abs(d2q2(i+1)+w0^2*q2(i+1)*(1+alpha*q2(i+1)*q2(i+1)))>e

c3=(-(d2q2(i+1)+w0^2*q2(i+1)*(1+alpha*q2(i+1)*q2(i+1))))/(1+beta2*dt1
^2*(w0^2+3*w0^2*alpha*q2(i+1)*q2(i+1)));
c2=gamma2*dt1*c3;
c1=beta2*dt1^2*c3;
q2(i+1)=q2(i)+c1;
dq2(i+1)=dq2(i)+c2;
d2q2(i+1)=d2q2(i)+c3;
end
end
plot(t1,q2)

```



Newmark implicite, quand $dt=0.02$

2.4

$\dot{A}$ à $t=0$, $q=2$;
à $t=dt$, $q=1.9781$;
à $t=2dt$, $q=1.9131$;
à $t=T_0$, $q=0.8478$;

3.1

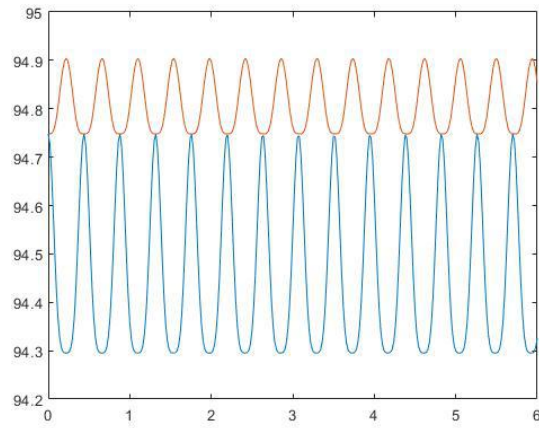
L'énergie cinétique : $0.5\dot{q}^2$

L'énergie potentiel : $0.5\omega_0^2 q^2 + 0.25\alpha\omega_0^2 q^4$

3.2 et 3.3

for $i=1:n$

$e1(i)=0.5*dq1(i)^2+0.5*w0*w0*q1(i)*q1(i)+0.25*alpha*w0*w0*q1(i)^4$;
 $e2(i)=0.5*dq2(i)^2+0.5*w0*w0*q2(i)*q2(i)+0.25*alpha*w0*w0*q2(i)^4$;
end



La courbe rouge est de Newmark implicite, la courbe bleu est de Newmark explicite.
L'énergie implicite est plus grande que l'énergie explicite.