Mécanique Numérique——Rapport 1

William
ZY1924114

Retrouver l'équation du mouvement du pendule simple avec les équations de Lagrange

Pendule simple

$$\begin{cases} E_c = \dfrac{m a^2 \dot{\theta}^2}{2} \\ E_p = -m g a \cos\theta + cte \\ \delta W = 0 \end{cases}$$

$$L = E_c - E_p = \frac{m a^2 \dot{\theta}^2}{2} + m g a \cos\theta + cte$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} Q_i \, \delta \theta_i \Rightarrow Q_i = 0$$

D'après l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = Q_i \Rightarrow m a^2 \ddot{\theta} + m g a \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0}$$

Oscillateur conservatif à un degré de liberté

Ex1 Solution analytique de l'équation

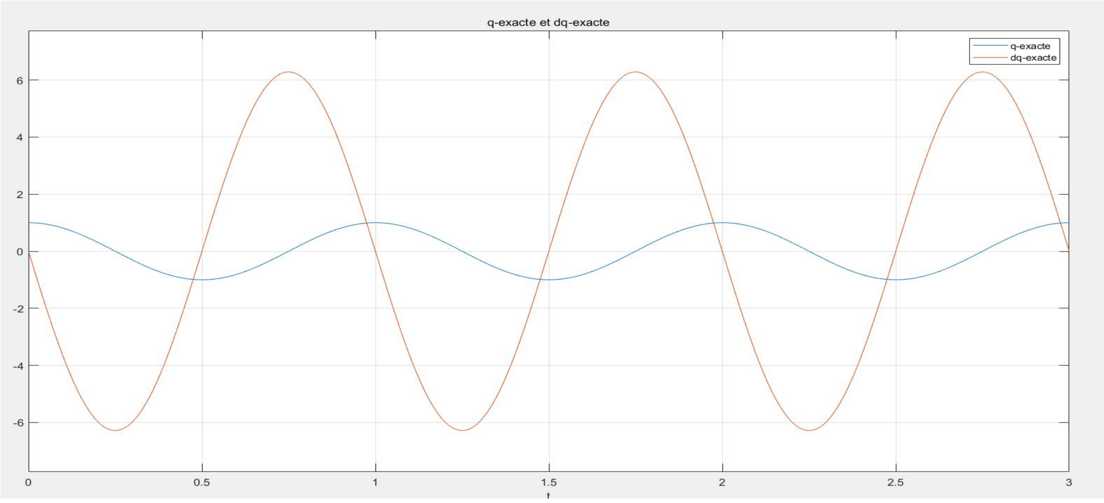
1.1

Programme:

```
clc
clear all
close all

%% Figure de la solution spéciale
syms q t pi
w0=2*pi;
q=dsolve('D2q+(2*pi)^2*q=0','q(0)=1','Dq(0)=0')
q=cos(2*pi*t);
q1=diff(q,t)
figure
ezplot(q,[0,3])
hold on
ezplot(q1,[0,3])
grid on
legend('q-exacte','dq-exacte');
title('q-exacte et dq-exacte');
xlabel('t');
```

Résumé:

q =cos(2*pi*t), q1 =-2*pi*sin(2*pi*t)



1.2

Programme:

```
%% Calcul de E*
E=1/2*(q1^2+w0^2*q^2)
simplify(E)
```

Résumé:

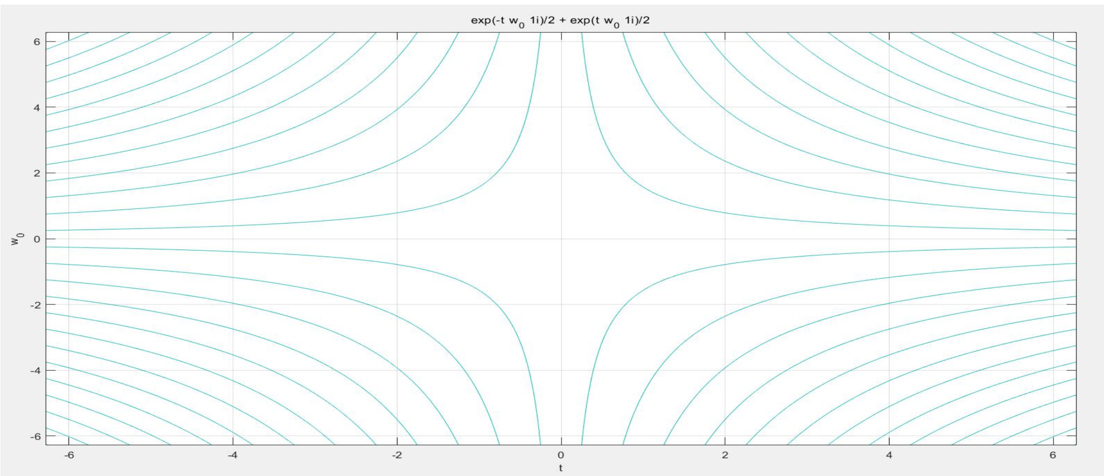
E*=2*pi^2=1/2*w0^2

Remarque:

On peut étudier aussi la solution en fonction de w0 et t.

Programme:

```
%% Figure en fonction de w0 et t
a=dsolve('D2q+w0^2*q=0','q(0)=1','Dq(0)=0')
figure
ezplot(a)
grid on
```



Ex2 Schéma d'Euler explicite

2.1

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{q} + w_0^2 q = 0 \\ \left|\begin{matrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{matrix}\right. + \Delta t \left|\begin{matrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{matrix}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{matrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{matrix}\right. + \Delta t \left|\begin{matrix} \dot{q}_j \\ -w_0^2 q_j \end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow \left|\begin{matrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{matrix}\right. = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -w_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \left|\begin{matrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{matrix}\right.$$

2.2

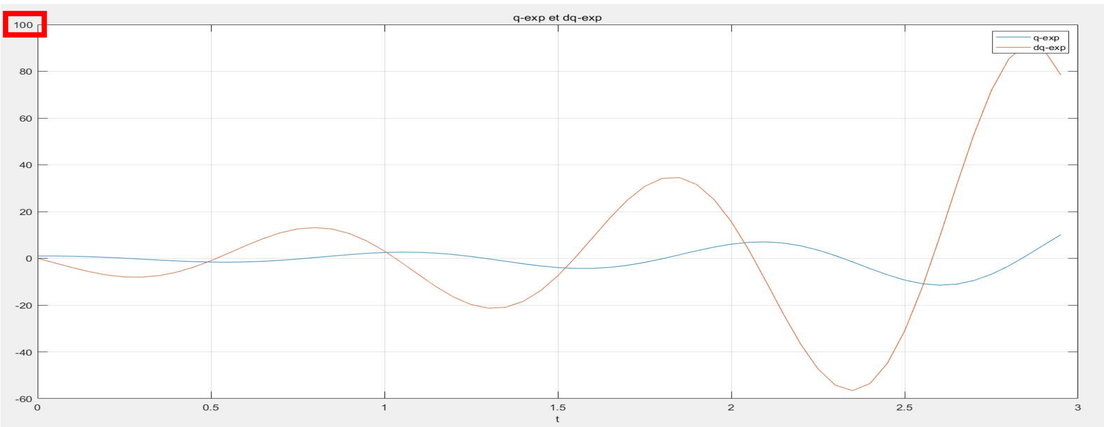
Programme:

```
clc
clear all
close all

%% Condition initiale
w0=2*pi;
q0=1;
Dq0=0;
T0=3;

%% Euler explicite
Uexp(1,1)=q0;
Uexp(2,1)=Dq0;
Eexp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
dt=0.01;
% changer le pas de temps.
% Plus dt est petit, plus la divergence est lente,
% et plus la divergence de E est lente
n=floor(T0/dt);
A=[1 dt;-w0^2*dt 1];
for i=2:n
    Uexp(:,i)=A*Uexp(:,i-1);
    Eexp(1,i)=1/2*((Uexp(2,i))^2+w0^2*(Uexp(1,i))^2);
end
Eexacte(1,1:n)=1/2*w0^2;

%% Figure exp
figure
t=0:dt:dt*(n-1);
plot(t,Uexp(1,:))
```

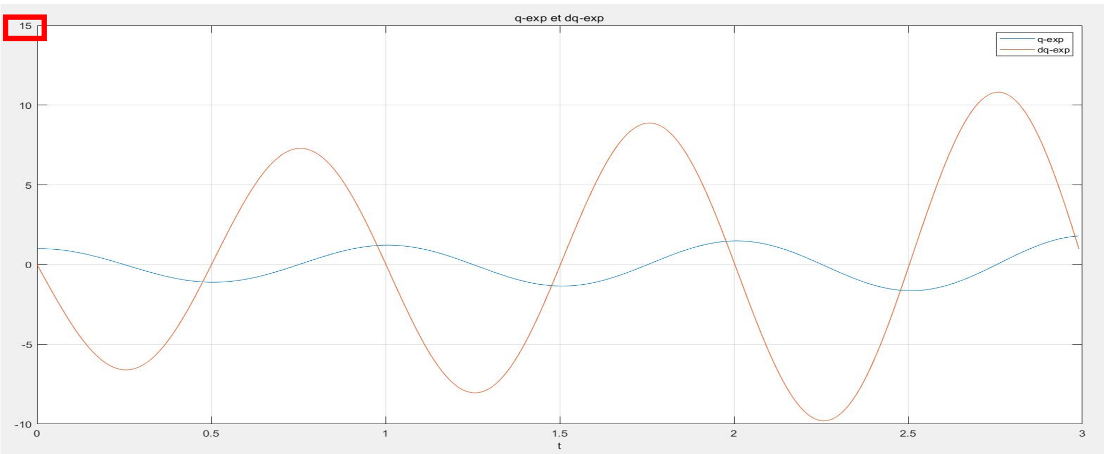
```
hold on
plot(t,Uexp(2,:))
grid on
legend('q-exp','dq-exp');
title('q-exp et dq-exp');
xlabel('t');

%% Figure de E*
figure
plot(t,Eexp(1,:))
hold on
plot(t,Eexacte(1,:))
grid on
legend('E-exp','E-exacte');
title('E-exp et E-exacte');
xlabel('t');
```

2.3

Quand dt=0.05



Quand dt=0.01

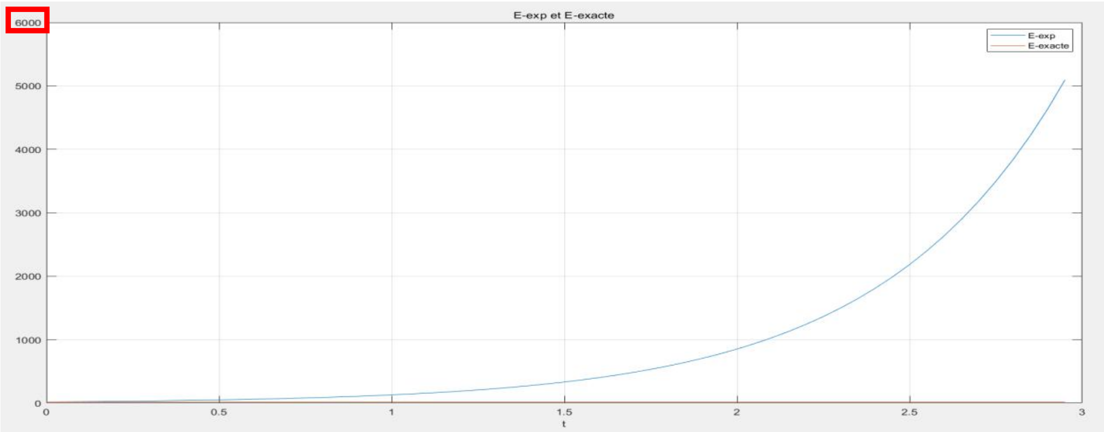


Résumé:

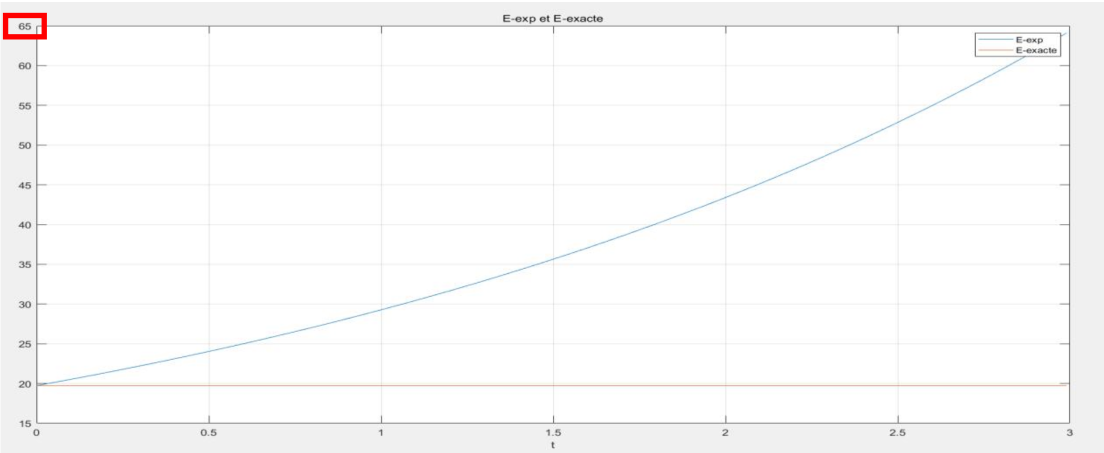
Plus dt est petit, plus la divergence est lente.

2.4

Quand dt=0.05



Quand dt=0.01



Résumé:

Plus dt est petit, plus la divergence de E* est lente.

2.5

Programme:

```
%% Matrice A
syms pi dt
w0=2*pi;
A=[1 dt;-w0^2*dt 1];
[V,D]=eig(A)
vp1_module=simplify(norm(D(1,1)))
vp2_module=simplify(norm(D(2,2)))
```

Résumé:

vp1_module =abs(1 - pi*dt*2i)

vp2_module =abs(pi*dt*2i + 1)

Donc les modules des valeur propre de la matrice d'amplifification sont toujours supérieur à 1, ainsi le caractère inconditionnellement instable du schéma d'Euler explicite.

Ex3 Schéma d'Euler implicite

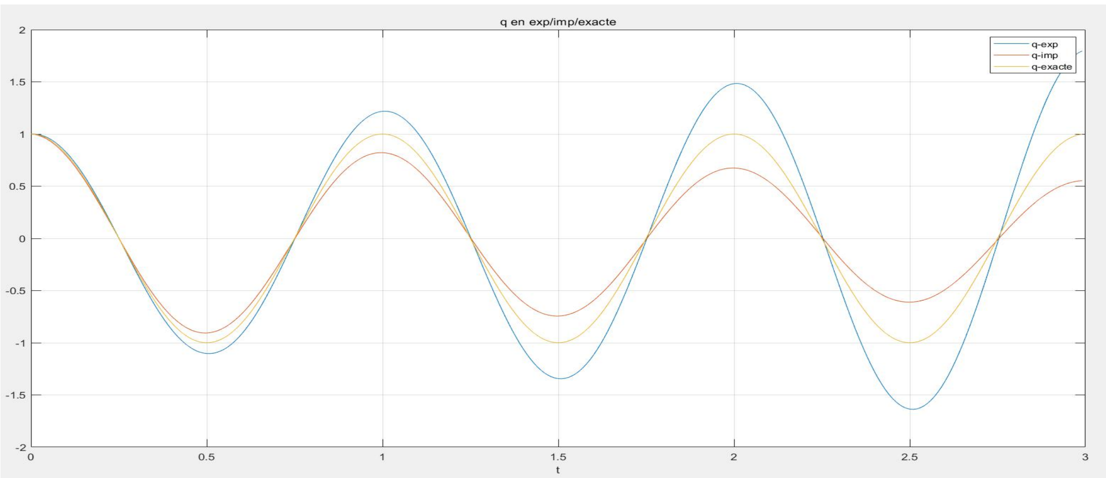
3.1

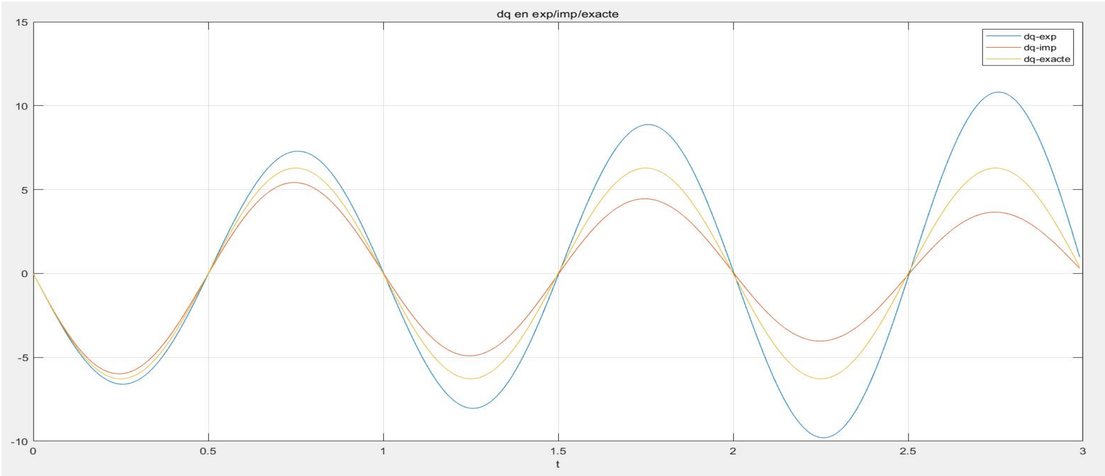
Programme:

```
clc
clear all
close all

%% Condition initiale
w0=2*pi;
q0=1;
Dq0=0;
T0=3;

%% Euler implicite
Uimp(1,1)=q0;
Uimp(2,1)=Dq0;
Eimp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
dt=0.01;
% changer le pas de temps.
% Plus dt est petit, plus l'atténuation des oscillations
est faible,
% et plus la divergence de Eimp est lente.
n=floor(T0/dt);

A_imp=[1/(1+(w0*dt)^2) , dt/(1+(w0*dt)^2) ;
-(dt*w0^2)/(1+(w0*dt)^2) , 1/(1+(w0*dt)^2)];
for i=2:n
    Uimp(:,i)=A_imp*Uimp(:,i-1);
    Eimp(1,i)=1/2*((Uimp(2,i))^2+w0^2*(Uimp(1,i))^2);
end
```

3.2

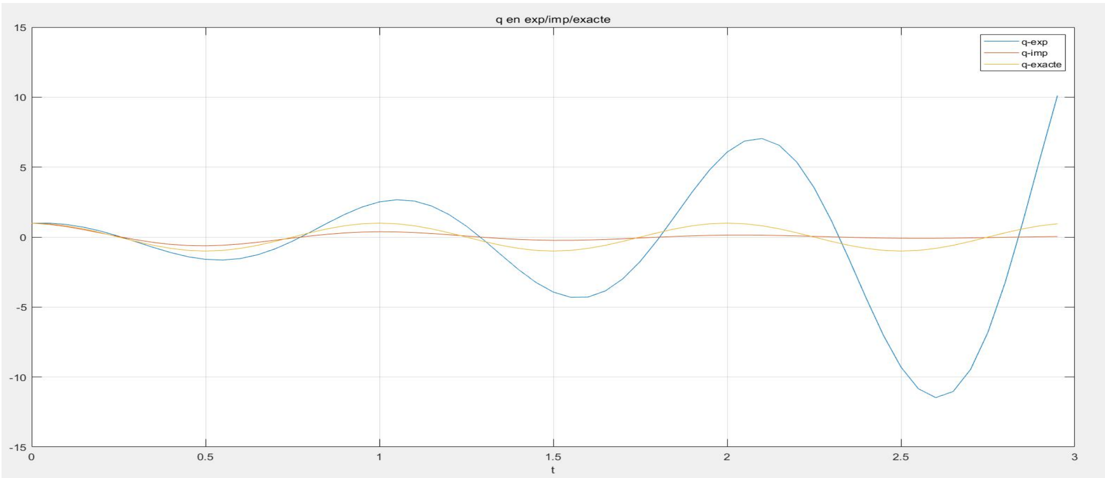
Quand dt=0.01

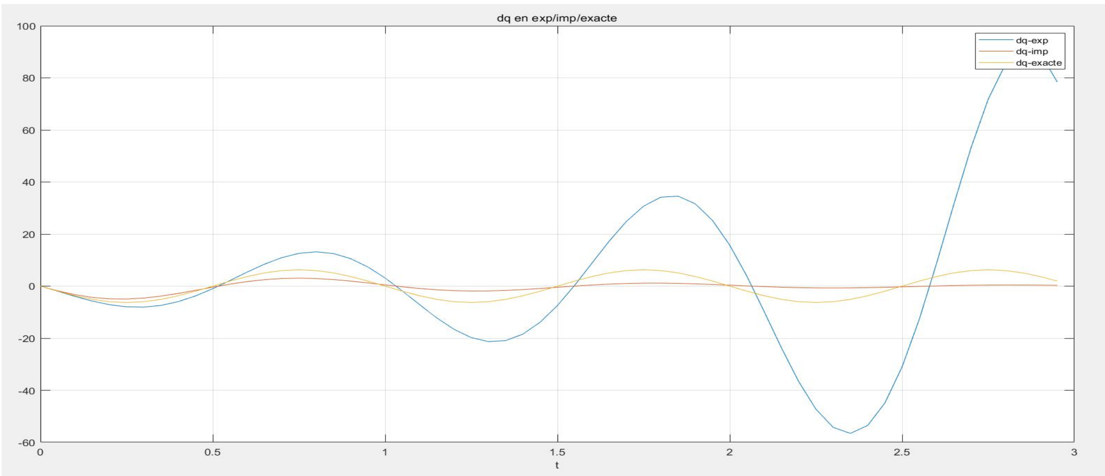




3.3

Quand dt=0.05



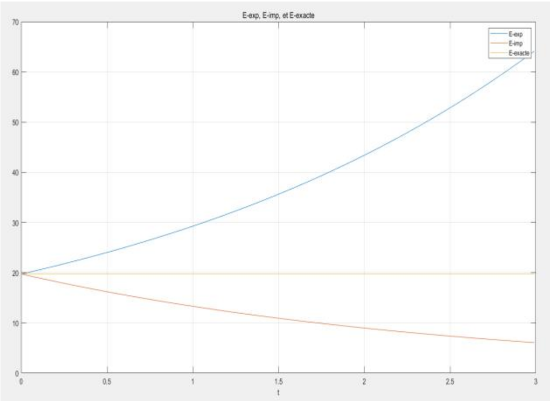


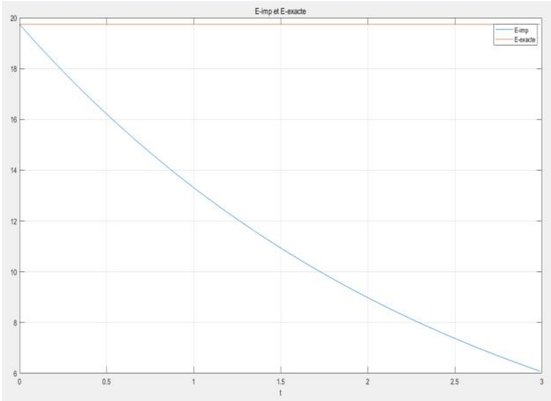
Résumé:

Plus dt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

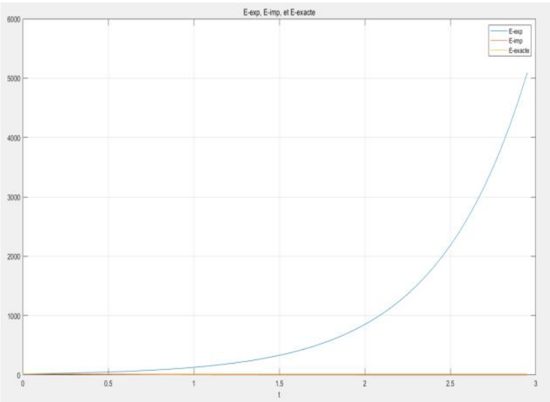
3.4

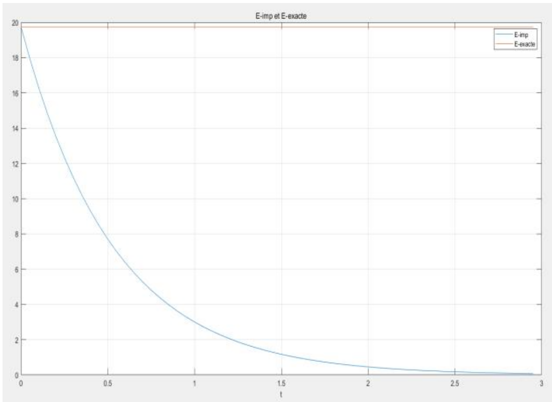
Quand dt=0.01





Quand dt=0.05





Plus dt est petit, plus la divergence de E-imp est lente.

3.5

Programme:

```
%% Matrice A
syms pi dt
w0=2*pi;
A_exp=[1 dt;-w0^2*dt 1];
A_imp=[1/(1+(w0*dt)^2) , dt/(1+(w0*dt)^2) ;
-(dt*w0^2)/(1+(w0*dt)^2) , 1/(1+(w0*dt)^2)];
[V1,D1]=eig(A_exp)
[V2,D2]=eig(A_imp)
vp_exp1_module=simplify(norm(D1(1,1)))
vp_exp2_module=simplify(norm(D1(2,2)))
vp_imp1_module=simplify(norm(D2(1,1)))
vp_imp2_module=simplify(norm(D2(2,2)))
```

Résumé:

vp_exp1_module =abs(1 - pi*dt*2i)

vp_exp2_module =abs(pi*dt*2i + 1)

```
vp_imp1_module =1/abs(2*pi*dt + 1i)
vp_imp2_module =1/abs(pi*dt*2i + 1)
```

Les modules des valeur propre de la matrice d’amplifification d’Euler explicite sont toujours supérieur à 1, ainsi le caractère inconditionnellement instable du schéma d’Euler explicite.
Les modules des valeur propre de la matrice d’amplifification d’Euler implicite sont toujours inférieur à 1, ainsi le caractère inconditionnellement stable du schéma d’Euler implicite.

Contents


```
clc
clear all
close all
```

Condition initiale

```
w0=2*pi;
q0=1;
Dq0=0;
T0=3;
```

Euler implicite

```
Uimp(1,1)=q0;
Uimp(2,1)=Dq0;
Eimp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
dt=0.01;
% changer le pas de temps.
% Plus dt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible,
% et plus la divergence de Eimp est lente.
n=floor(T0/dt);

A_imp=[1/(1+(w0*dt)^2) , dt/(1+(w0*dt)^2) ; -(dt*w0^2)/(1+(w0*dt)^2) , 1/(1+(w0*dt)^2)];
for i=2:n
    Uimp(:,i)=A_imp*Uimp(:,i-1);
    Eimp(1,i)=1/2*((Uimp(2,i))^2+w0^2*(Uimp(1,i))^2);
end
```

Euler explicite

```
Uexp(1,1)=q0;
Uexp(2,1)=Dq0;
Eexp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
n=floor(T0/dt);
% Plus dt est petit, plus la divergence est lente,
% et plus la divergence de Eexp est lente.

A_exp=[1 dt;-w0^2*dt 1];
for i=2:n
```

```
    Uexp(:,i)=A_exp*Uexp(:,i-1);
    Eexp(1,i)=1/2*((Uexp(2,i))^2+w0^2*(Uexp(1,i))^2);
end
```

Solution exacte

```
t=0:dt:dt*(n-1);
q_exacte=cos(2*pi*t);
dq_exacte=-2*pi*sin(2*pi*t);
Eexacte(1,1:n)=1/2*w0^2;
```

Figure de q en exp/imp/exacte

```
figure
plot(t,Uexp(1,:))
hold on
plot(t,Uimp(1,:))
hold on
plot(t,q_exacte)
hold on
grid on
legend('q-exp','q-imp','q-exacte');
title('q en exp/imp/exacte');
xlabel('t');
```

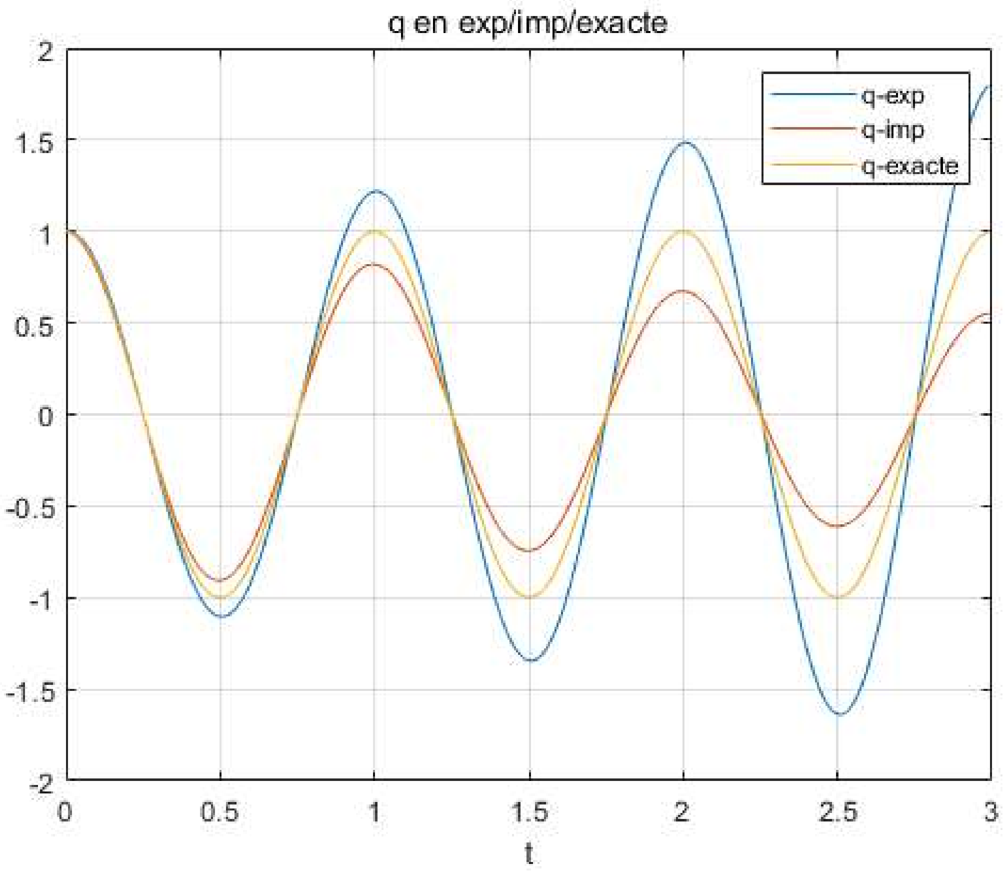


Figure de dq en exp/imp/exacte

```
figure
plot(t,Uexp(2,:))
```

```
hold on
plot(t,Uimp(2,:))
hold on
plot(t,dq_exacte)
grid on
legend('dq-exp','dq-imp','dq-exacte');
title('dq en exp/imp/exacte');
xlabel('t');
```

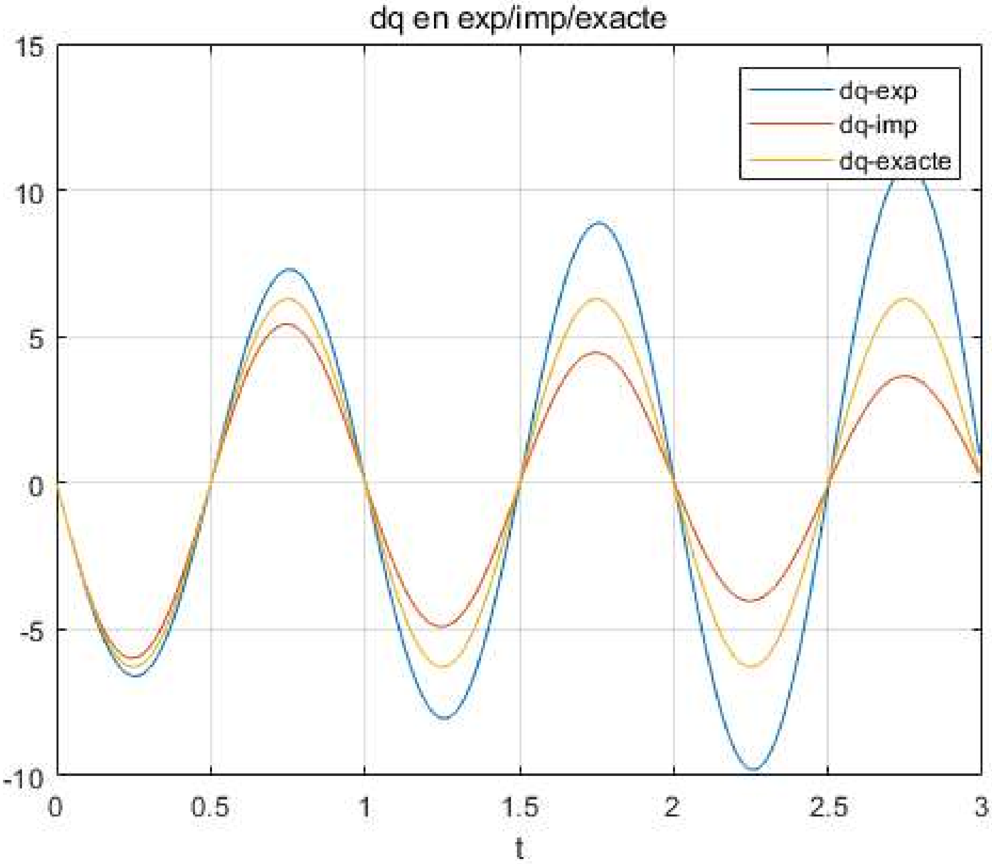
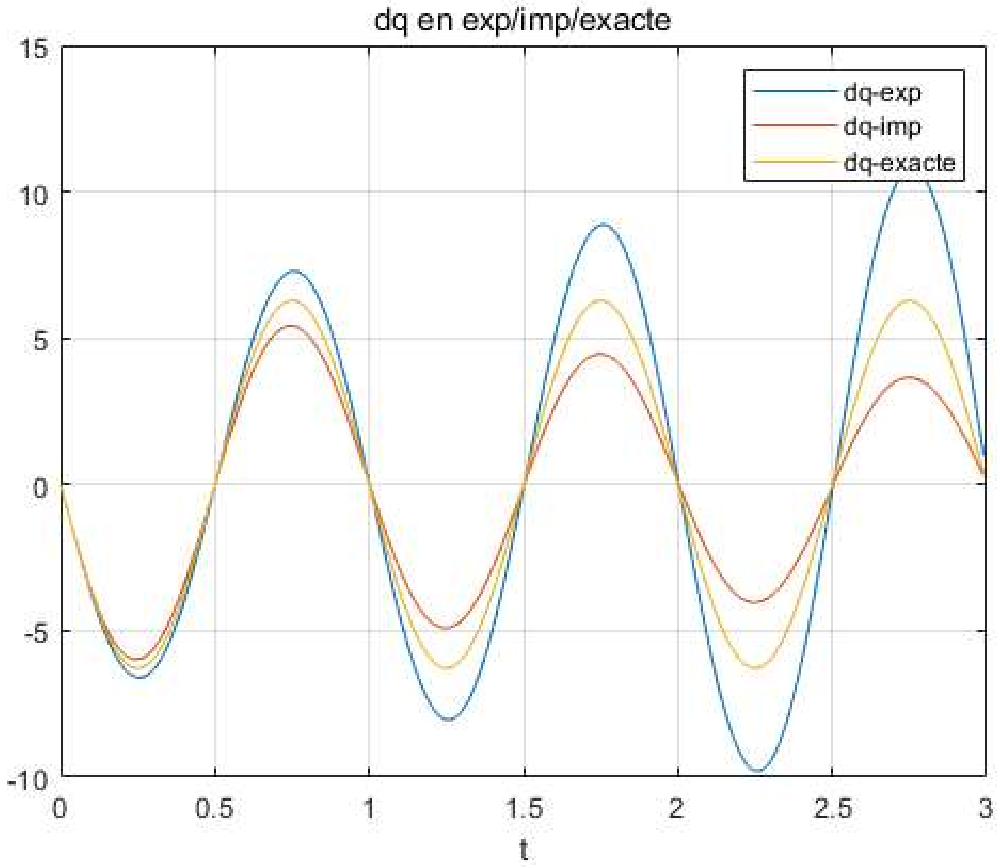


Figure de E*

```
figure
plot(t,Eexp(1,:))
hold on
plot(t,Eimp(1,:))
hold on
plot(t,Eexacte(1,:))
grid on
legend('E-exp','E-imp','E-exacte');
title('E-exp, E-imp, et E-exacte');
xlabel('t');
```



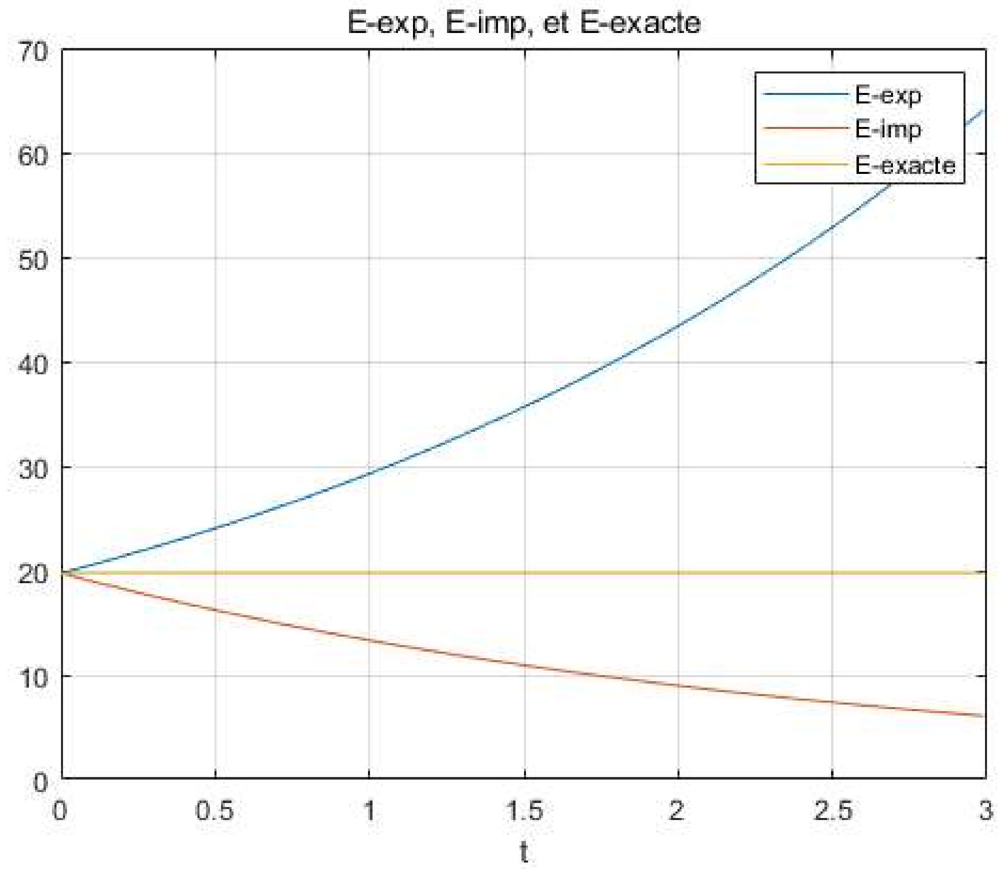
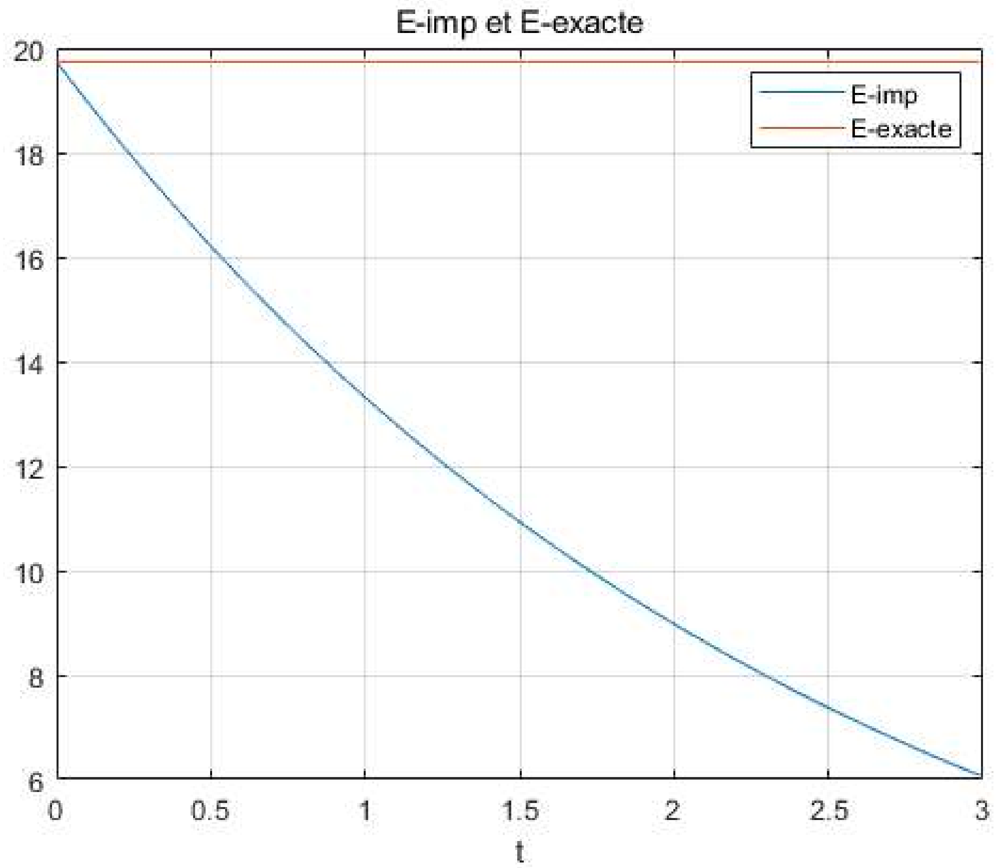


Figure de E*

```
figure
plot(t,Eimp(1,:))
hold on
```

```
plot(t,Eexacte(1,:))
grid on
legend('E-imp','E-exacte');
title('E-imp et E-exacte');
xlabel('t');
```



Matrice A

```
syms pi dt
w0=2*pi;
A_exp=[1 dt;-w0^2*dt 1];
A_imp=[1/(1+(w0*dt)^2) , dt/(1+(w0*dt)^2) ; -(dt*w0^2)/(1+(w0*dt)^2) , 1/(1+(w0*dt)^2)];
[V1,D1]=eig(A_exp)
[V2,D2]=eig(A_imp)
vp_exp1_module=simplify(norm(D1(1,1)))
vp_exp2_module=simplify(norm(D1(2,2)))
vp_imp1_module=simplify(norm(D2(1,1)))
vp_imp2_module=simplify(norm(D2(2,2)))
```

```
V1 =

[ 1/(4*dt*pi^2) + (pi*dt*2i - 1)/(4*dt*pi^2), 1/(4*dt*pi^2) - (pi*dt*2i + 1)/(4*dt*pi^2)]
[                                          1,                                          1]


D1 =

[ 1 - pi*dt*2i,            0]
[            0, pi*dt*2i + 1]
```

```
V2 =

[ 1/(4*dt*pi^2) - ((4*pi^2*dt^2 + 1)*1i)/(4*dt*pi^2*(2*pi*dt + 1i)), 1/(4*dt*pi^2) - (4*pi
^2*dt^2 + 1)/(4*dt*pi^2*(pi*dt*2i + 1))]
[                                                                  1,
                                     1]


D2 =

[ 1i/(2*pi*dt + 1i),                0]
[                 0, 1/(pi*dt*2i + 1)]


vp_exp1_module =

abs(1 - pi*dt*2i)


vp_exp2_module =

abs(pi*dt*2i + 1)


vp_imp1_module =

1/abs(2*pi*dt + 1i)


vp_imp2_module =

1/abs(pi*dt*2i + 1)
```