

Oscillateur conservatif à un degré de liberté

Ex2 Schéma d'Euler explicite

2.1

Montrer que le schéma explicite avec matrice d'amplification est obtenu à partir du système du premier ordre que l'on discrétise en temps de manière explicite.

Schéma d'Euler explicite

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} + \Delta t \times \begin{pmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{pmatrix}$$

On a $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$, donc

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$$

soit $U_j = \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$

on obtient $U_{j+1} = [A] \cdot U_j$

2.2

Programme:

```
clc
```

```
clear all
```

```
close all
```

```
%% Condition initiale
```

```
w0=2*pi;
```

```
q0=1;
```

```
Dq0=0;
```

```
T0=3;
```

```
%% Euler explicite
```

```
Uexp(1,1)=q0;
```

```
Uexp(2,1)=Dq0;
```

```
Eexp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
```

```
dt=0.01;
```

```
% changer le pas de temps.
```

```
% Plus dt est petit, plus la divergence est lente,
```

```

% et plus la divergence de E est lente
n=floor(T0/dt);
A=[1 dt;-w0^2*dt 1];
for i=2:n
    Uexp(:,i)=A*Uexp(:,i-1);
    Eexp(1,i)=1/2*((Uexp(2,i))^2+w0^2*(Uexp(1,i))^2);
end

%% Solution exacte
t=0:dt:dt*(n-1);
q_exacte=cos(2*pi*t);
dq_exacte=-2*pi*sin(2*pi*t);
Eexacte(1,1:n)=1/2*w0^2;

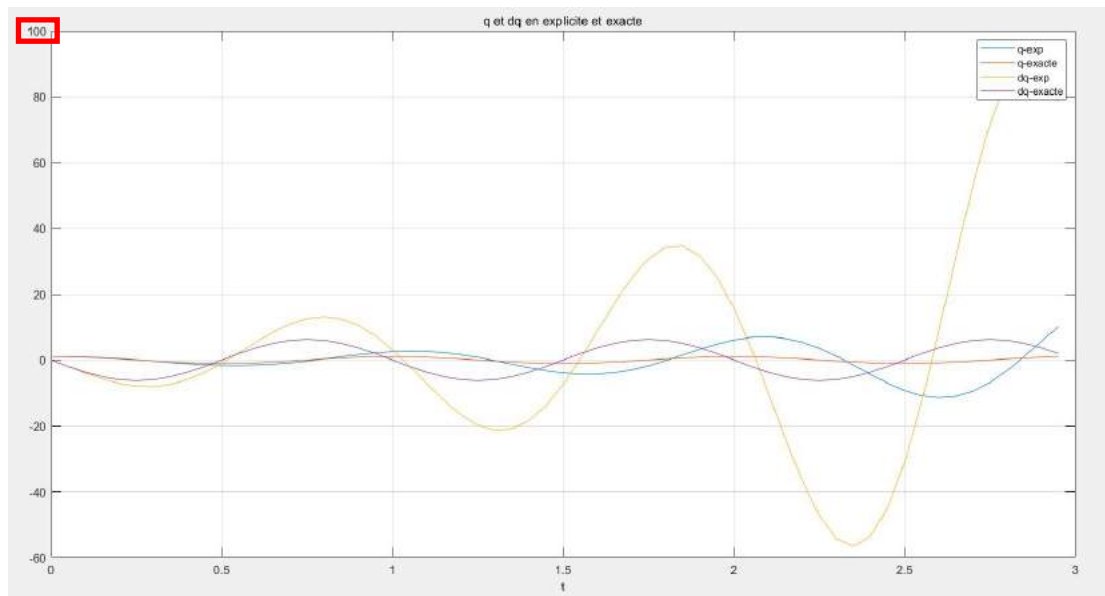
%% Figure exp
figure
plot(t,Uexp(1,:))
hold on
plot(t,q_exacte)
hold on
plot(t,Uexp(2,:))
hold on
plot(t,dq_exacte)
grid on
legend('q-exp','q-exacte','dq-exp','dq-exacte');
title('q et dq en explicite et exacte');
xlabel('t');

%% Figure de E*
figure
plot(t,Eexp(1,:))
hold on
plot(t,Eexacte(1,:))
grid on
legend('E-exp','E-exacte');
title('E-exp et E-exacte');
xlabel('t');

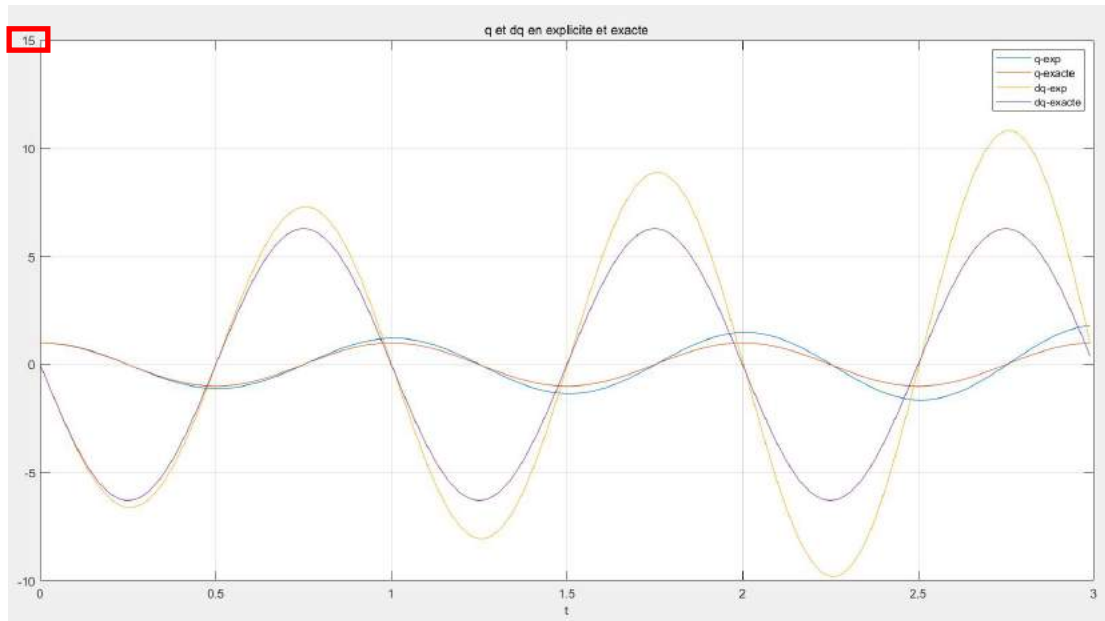
```

2.3

Quand $dt=0.05$



Quand $dt=0.01$

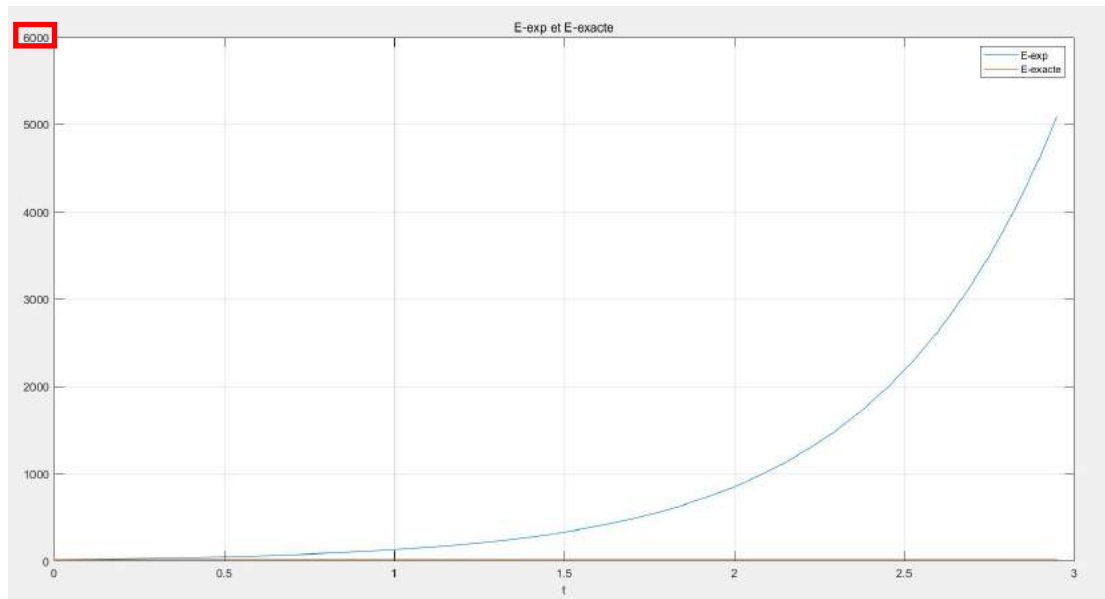


Résumé:

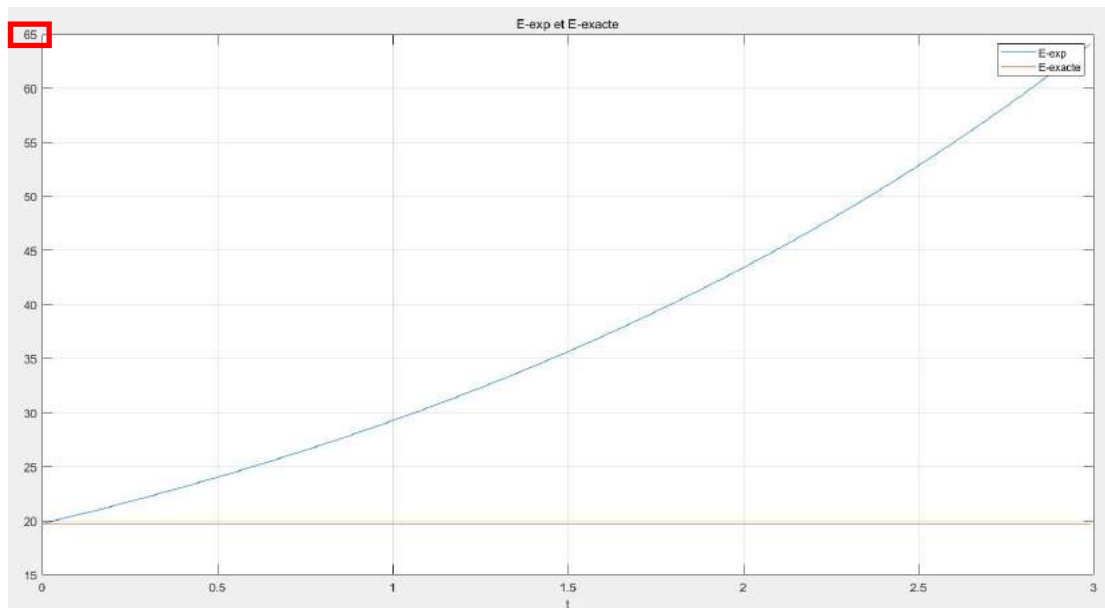
Plus dt est petit, plus la divergence est lente.

2.4

Quand $dt=0.05$



Quand $dt=0.01$



Résumé:

Plus dt est petit, plus la divergence de E^* est lente.

2.5

Programme:

```
%% Matrice A
syms pi dt
w0=2*pi;
A=[1 dt;-w0^2*dt 1];
[V,D]=eig(A)
vp1_module=simplify(norm(D(1,1)))
```

```
vp2_module=simplify(norm(D(2,2)))
```

Résumé:

```
vp1_module=abs(1-pi*dt*2i)
```

```
vp2_module=abs(pi*dt*2i+1)
```

Donc les modules des valeur propre de la matrice d'amplification sont toujours supérieur à 1, ainsi le caractère inconditionnellement instable du schéma d'Euler explicite.

Ex3 Schéma d'Euler implicite

3.1

Programme:

```
clc
clear all
close all

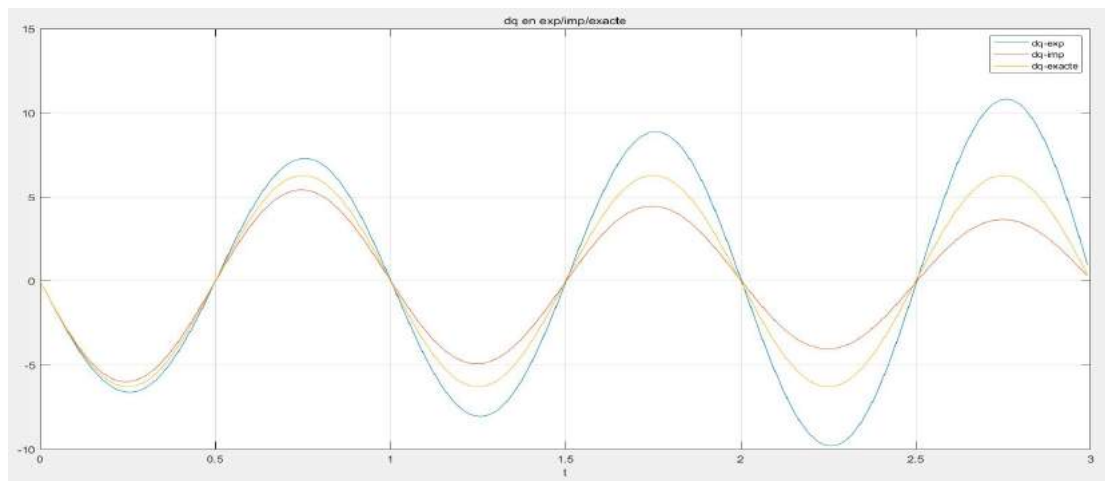
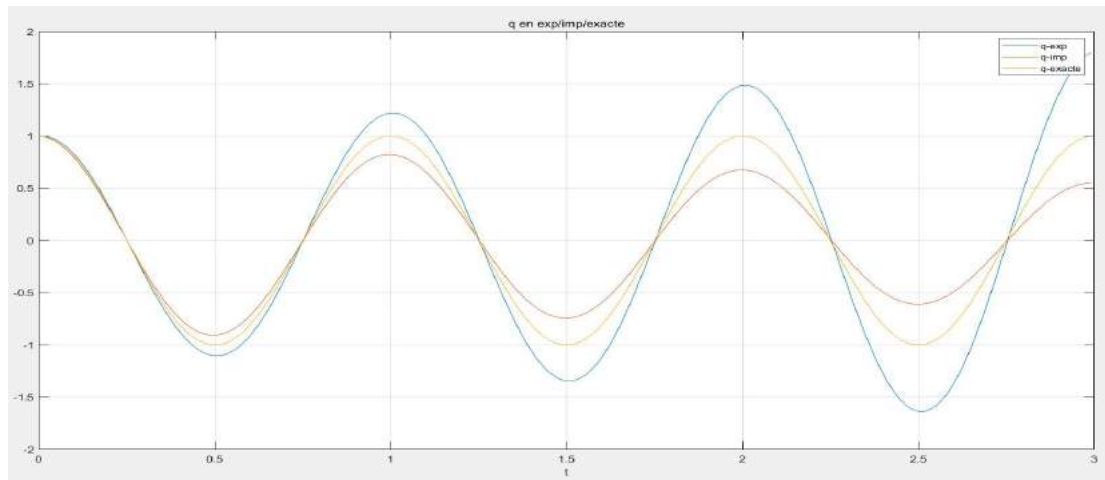
%% Condition initiale
w0=2*pi;
q0=1;
Dq0=0;
T0=3;

%% Euler implicite
Uimp(1,1)=q0;
Uimp(2,1)=Dq0;
Eimp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
dt=0.01;
% changer le pas de temps.
% Plus dt est petit, plus l'atténuation des oscillations
est faible,
% et plus la divergence de Eimp est lente.
n=floor(T0/dt);

A_imp=[1/(1+(w0*dt)^2) , dt/(1+(w0*dt)^2) ;
-(dt*w0^2)/(1+(w0*dt)^2) , 1/(1+(w0*dt)^2)];
for i=2:n
    Uimp(:,i)=A_imp*Uimp(:,i-1);
    Eimp(1,i)=1/2*((Uimp(2,i))^2+w0^2*(Uimp(1,i))^2);
end
```

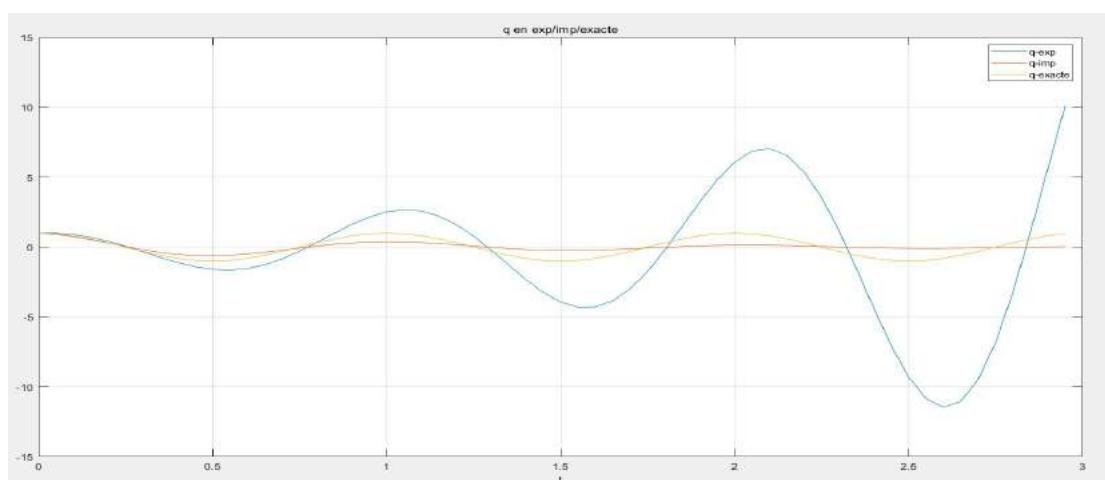
3.2

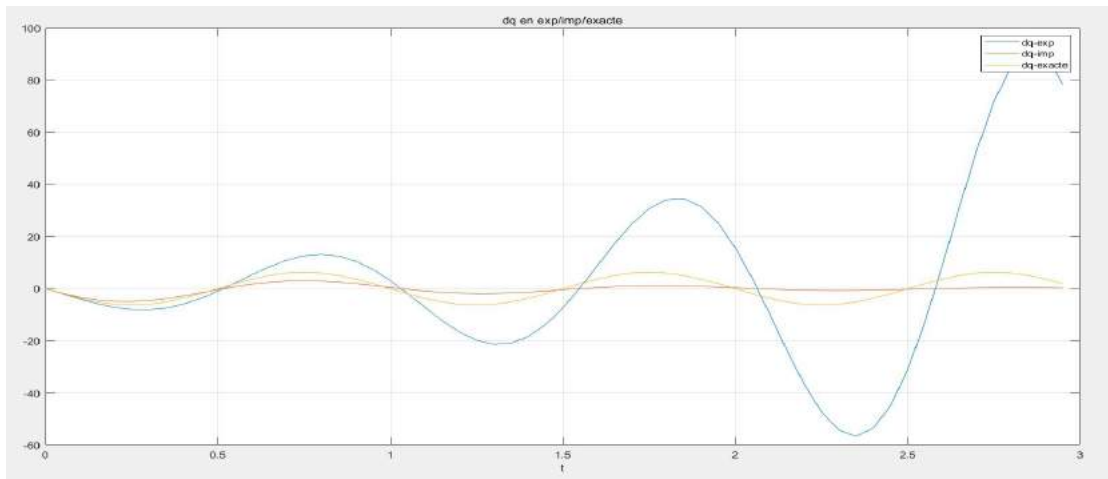
Quand $dt=0.01$



3.3

Quand $dt=0.05$



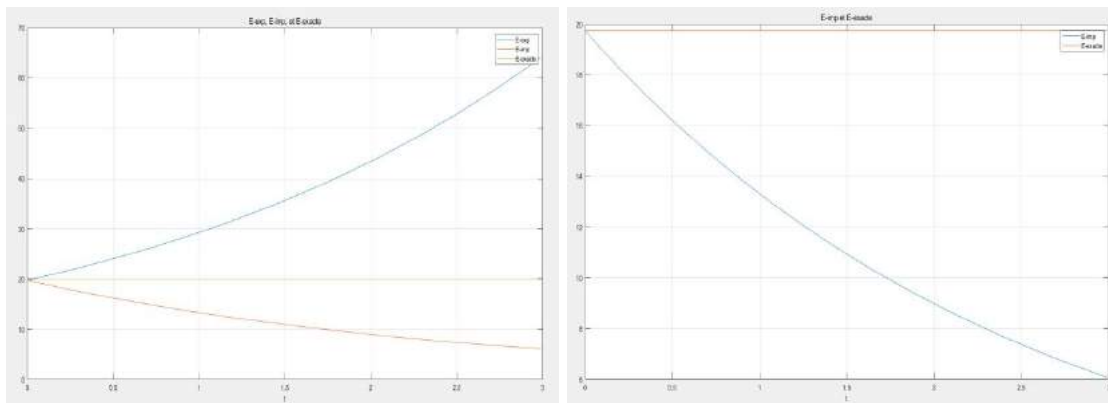


Résumé:

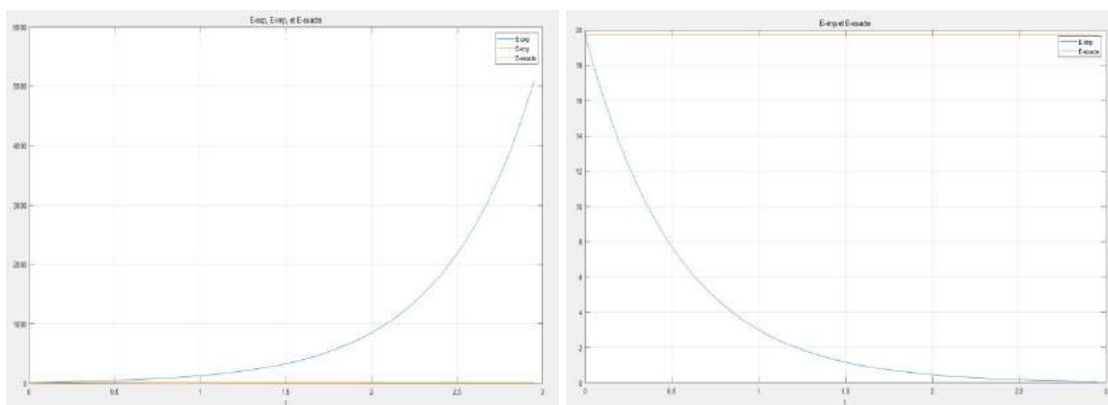
Plus dt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

3.4

Quand dt=0.01



Quand dt=0.05



Plus dt est petit, plus la divergence de E-imp est lente.

3.5

Programme:

```
%% Matrice A
syms pi dt
```

```

w0=2*pi;
A_exp=[1 dt;-w0^2*dt 1];
A_imp=[1/(1+(w0*dt)^2) , dt/(1+(w0*dt)^2) ;
-(dt*w0^2)/(1+(w0*dt)^2) , 1/(1+(w0*dt)^2)];
[V1,D1]=eig(A_exp)
[V2,D2]=eig(A_imp)
vp_exp1_module=simplify(norm(D1(1,1)))
vp_exp2_module=simplify(norm(D1(2,2)))
vp_imp1_module=simplify(norm(D2(1,1)))
vp_imp2_module=simplify(norm(D2(2,2)))

```

Résumé:

```

vp_exp1_module =abs(1 - pi*dt*2i)
vp_exp2_module =abs(pi*dt*2i + 1)

```

```

vp_imp1_module =1/abs(2*pi*dt + 1i)
vp_imp2_module =1/abs(pi*dt*2i + 1)

```

Les modules des valeur propre de la matrice d'amplification d'Euler explicite sont toujours supérieur à 1, ainsi le caractère inconditionnellement instable du schéma d'Euler explicite.

Les modules des valeur propre de la matrice d'amplification d'Euler implicite sont toujours inférieur à 1, ainsi le caractère inconditionnellement stable du schéma d'Euler implicite.

Ex4 Schéma de RUNGE KUTTA

4.1

$$\ddot{q} + w_0^2 q = 0$$

$$\text{soit } U = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } \dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

$$\text{on suppose que } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc on obtient la forme du premier ordre

$$\dot{U} = A \cdot U$$

4.2

Programme:

RK_45.m

```
function [t,y]=RK_45(fun,dt,y0,a,b)%(f,dt,CI,t0,tf)
y(:,1)=y0;
t(1,1)=0;
n=(b-a)/dt;

for i=1:n
    t(1,i+1)=t(1,i)+dt;
    k1=fun(y(:,i),t(1,i));
    k2=fun(y(:,i)+k1*dt/2,t(1,i)+dt/2);
    k3=fun(y(:,i)+k2*dt/2,t(1,i)+dt/2);
    k4=fun(y(:,i)+k3*dt,t(1,i)+dt);
    K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    y(:,i+1)=y(:,i)+K*dt;
end
end
```

fun_OCL_1ddl.m

```
function dU=fun_OCL_1ddl(U,t)
w0=2*pi;
dU=zeros(2,1);
A=[0 1; -w0^2 0];
dU=A*U;
end
```

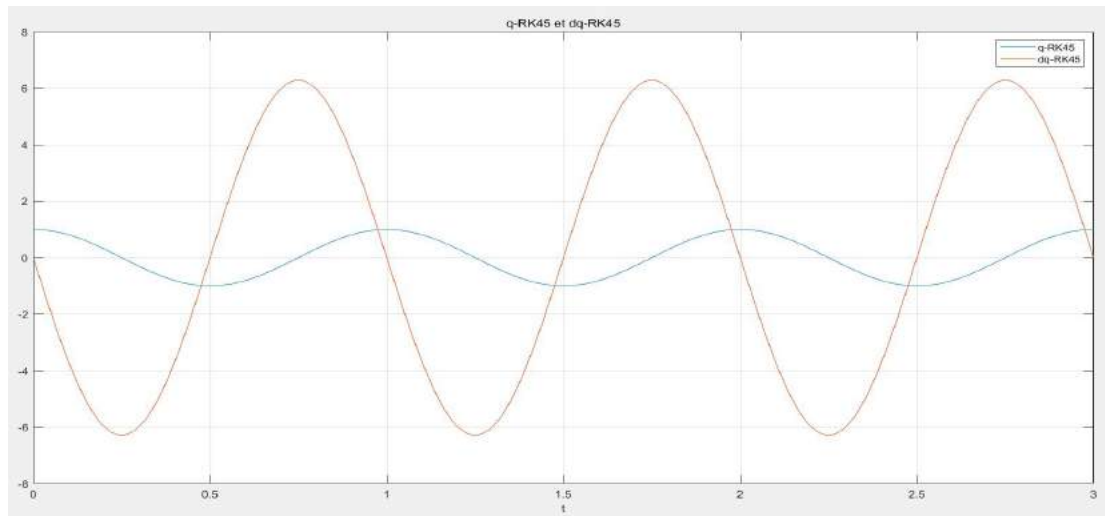
main.m

```
clc
clear all
close all

%% Condition initiale
dt=0.01;
% changer le pas de temps, dt=0.01 ode45=RK45
a=0;
b=3;% T0=3s

%% Figure de RK_45
figure
[t1,q1]=RK_45(@fun_OCL_1ddl,dt,[1 0],a,b);
plot(t1,q1(1,:),t1,q1(2,:));
grid on;
legend('q-RK45','dq-RK45');
```

```
title('q-RK45 et dq-RK45');
xlabel('t');
```



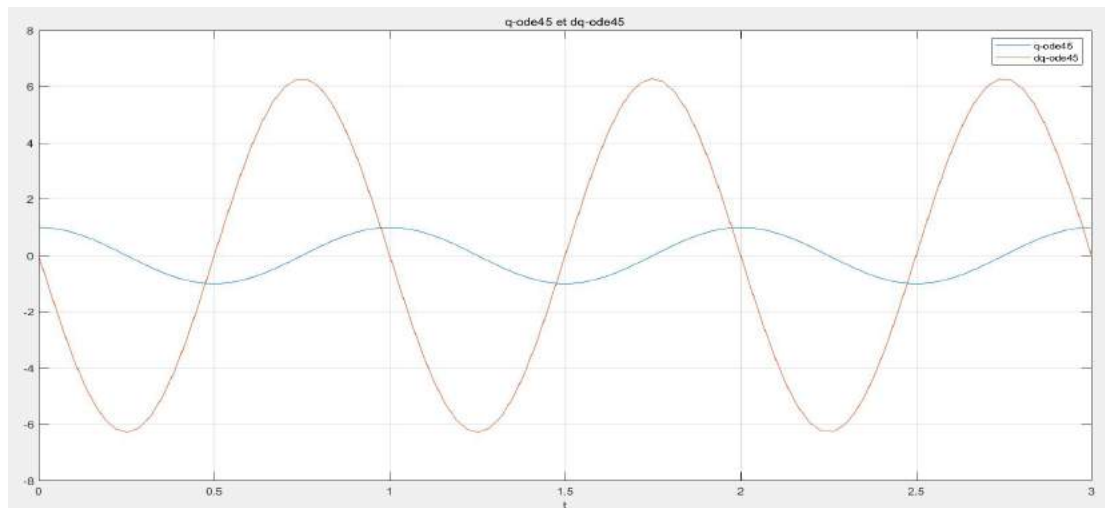
Remarque: changer le pas de temps, quand $dt=0.01$ ode45=RK45

OCL_1ddl.m

```
function dq=OCL_1ddl(t,q)
w0=2*pi;
dq=zeros(2,1);
dq(1)=q(2);
dq(2)=-w0^2*q(1);
end
```

main.m

```
%% Figure de ode_45
figure
[t2,q2]=ode45('OCL_1ddl',[0 3],[1 0]);
plot(t2,q2(:,1),t2,q2(:,2));
grid on;
legend('q-ode45','dq-ode45');
title('q-ode45 et dq-ode45');
xlabel('t');
```



4.3

Programme:

```
clc
clear all
close all

%% Condition initiale
dt=0.01;
% changer le pas de temps, dt=0.01 ode45=RK45
a=0;
b=3;% T0=3s

%% Comparaison de la solution et E*
w0=2*pi;
q0=1;
Dq0=0;
T0=3;
n=(b-a)/dt;

Eexp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
Uexp(1,1)=q0;
Uexp(2,1)=Dq0;

Eimp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
Uimp(1,1)=q0;
Uimp(2,1)=Dq0;

ERK45(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);

Eexacte(1,1:n)=1/2*w0^2;
for i=2:n
    Uexp(1,i)=Uexp(1,i-1)+dt*Uexp(2,i-1);
    Uexp(2,i)=-w0^2*dt*Uexp(1,i-1)+Uexp(2,i-1);
    Eexp(1,i)=1/2*((Uexp(2,i))^2+w0^2*(Uexp(1,i))^2);

    Uimp(1,i)=(1/(1+(w0*dt)^2))*Uimp(1,i-1)+(dt/(1+(w0*dt)^2))*Uimp(2,i-1);
    Uimp(2,i)=(-(dt*w0^2)/(1+(w0*dt)^2))*Uimp(1,i-1)+(1/(1+(w0*dt)^2))*Uimp(2,i-1);
    Eimp(1,i)=1/2*((Uimp(2,i))^2+w0^2*(Uimp(1,i))^2);

    ERK45(1,i)=1/2*((q1(2,i))^2+w0^2*(q1(1,i))^2);
end
```

Figure de q en exp/imp/RK45/exacte

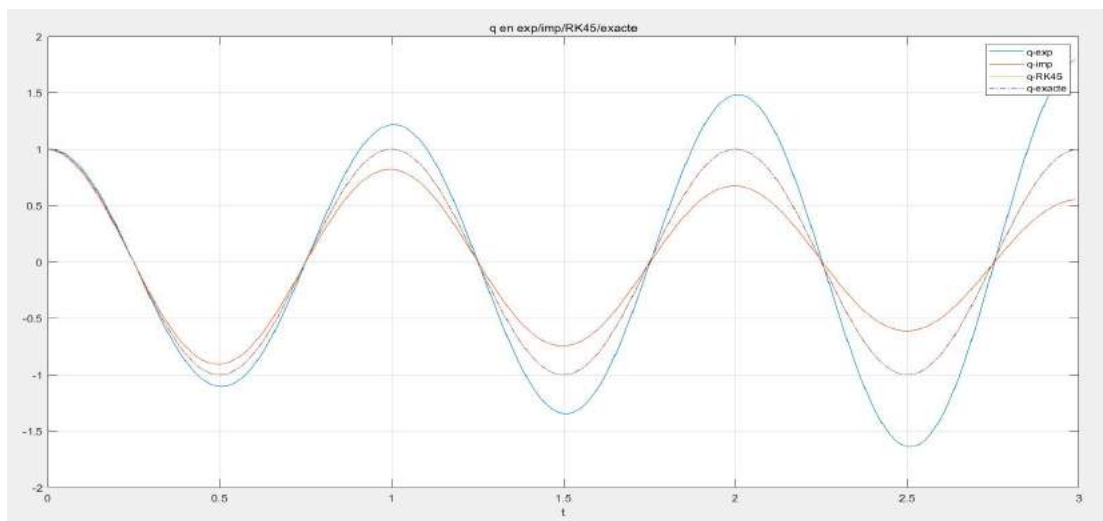


Figure de dq en exp/imp/RK45/exacte

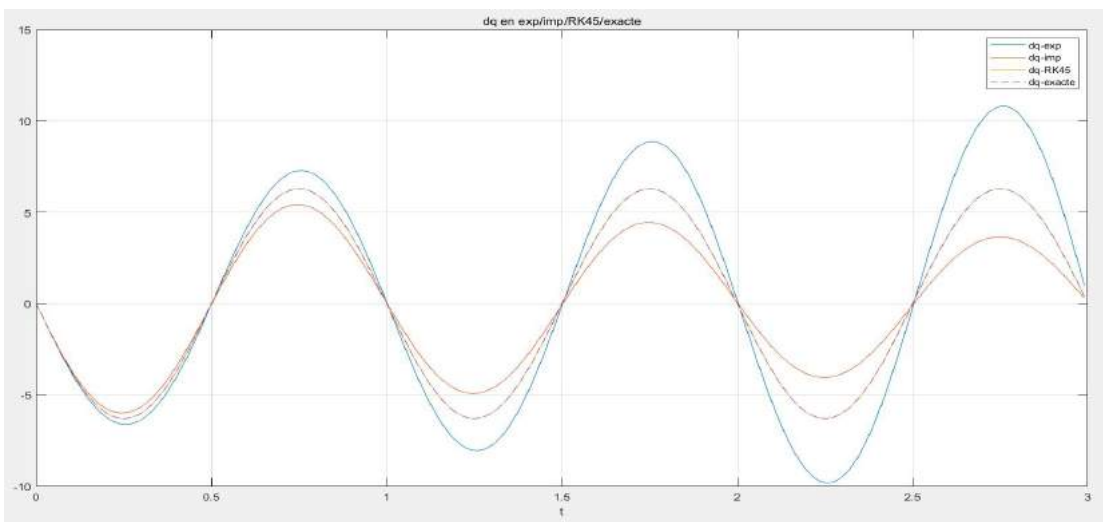
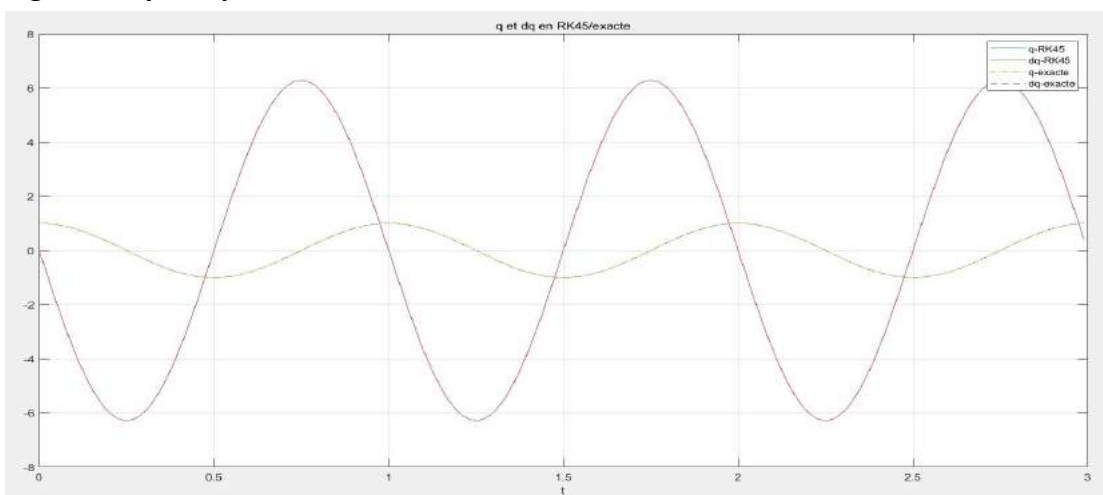


Figure de q et dq en RK45/exacte



Résumé:

q -RK45 et dq -RK45 est beaucoup plus précis, qui coïncident avec q -exacte et dq -exacte respectivement. Donc, le schéma de RUNGE KUTTA est beaucoup plus précis que le schéma d'EULER explicite et le schéma d'EULER implicite.

4.4

Figure de E^* en exp/imp/RK45/exacte

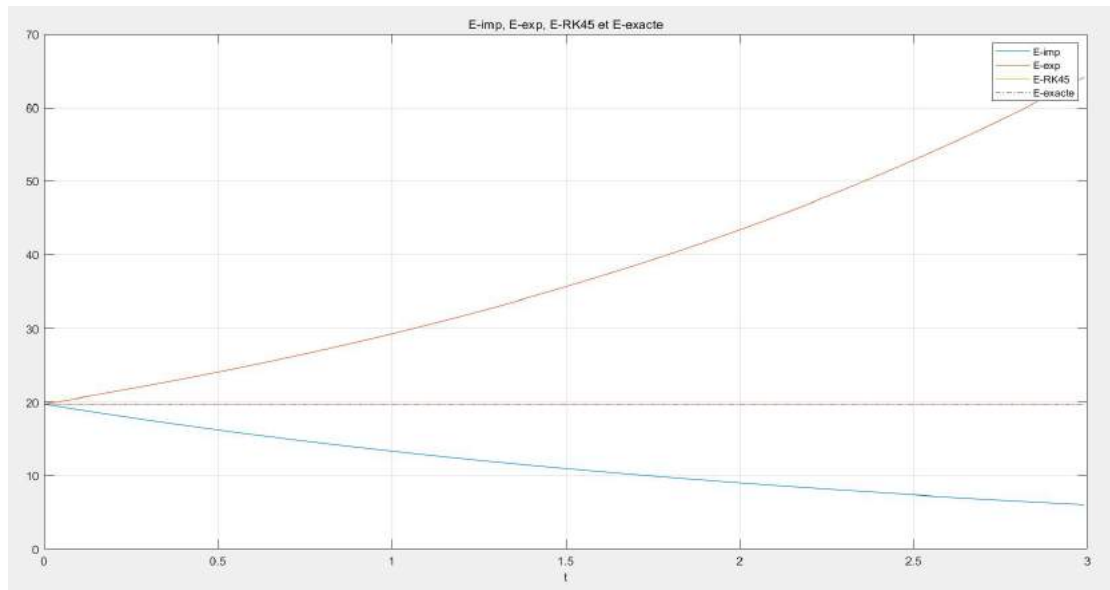
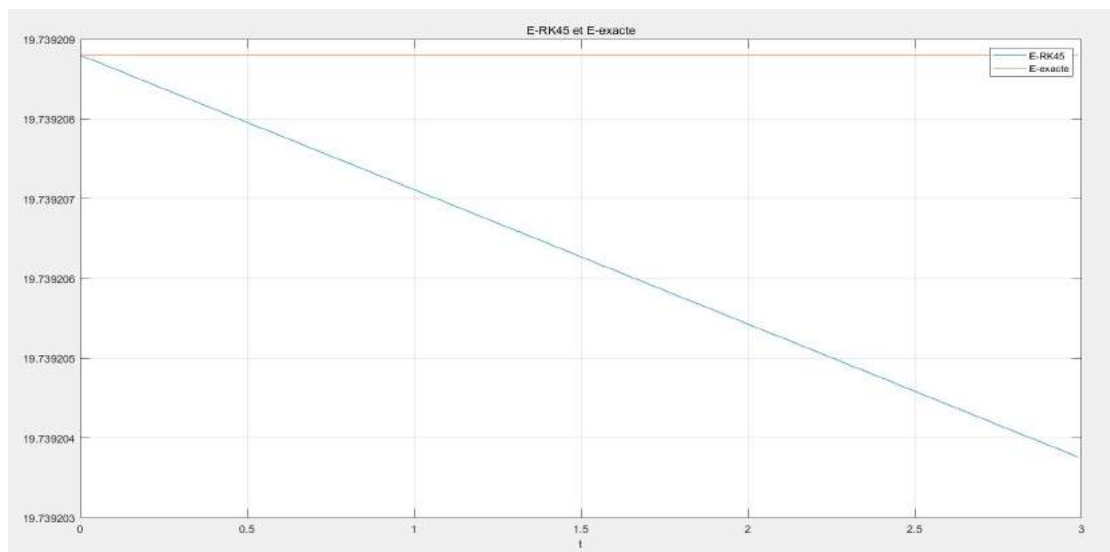


Figure de E^* en RK45/exacte



Résumé:

E-RK45 est beaucoup plus précis que E-exp et E-imp, E-RK45 et E-exacte presque coïncident, mais E-RK45 diminue lentement quand même, donc il existe aussi une erreur.

Contents

- Condition initiale
- Euler implicite
- Euler explicite
- Solution exacte
- Figure de q en exp/imp/exacte
- Figure de dq en exp/imp/exacte
- Figure de E* en exp/imp/exacte
- Figure de E* en imp/exacte
- Matrice A
- Figure de RK_45
- Figure de ode_45
- Calcul de ERK45
- Figure de q en exp/imp/RK45/exacte
- Figure de dq en exp/imp/RK45/exacte
- Figure de q en RK45/exacte
- Figure de E* en exp/imp/RK45/exacte
- Figure de E* en RK45/exacte

```
clc
clear all
close all
```

Condition initiale

```
w0=2*pi;
q0=1;
Dq0=0;
T0=3;
```

Euler implicite

```
Uimp(1,1)=q0;
Uimp(2,1)=Dq0;
Eimp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
dt=0.01;
% changer le pas de temps.
% Plus dt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible,
% et plus la divergence de Eimp est lente.
n=floor(T0/dt);

A_imp=[1/(1+(w0*dt)^2) , dt/(1+(w0*dt)^2) ; -(dt*w0^2)/(1+(w0*dt)^2) , 1/(1+(w0*dt)^2)];
for i=2:n
    Uimp(:,i)=A_imp*Uimp(:,i-1);
    Eimp(1,i)=1/2*((Uimp(2,i))^2+w0^2*(Uimp(1,i))^2);
end
```

Euler explicite

```
Uexp(1,1)=q0;
Uexp(2,1)=Dq0;
Eexp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
n=floor(T0/dt);
% Plus dt est petit, plus la divergence est lente,
% et plus la divergence de Eexp est lente.

A_exp=[1 dt;-w0^2*dt 1];
for i=2:n
    Uexp(:,i)=A_exp*Uexp(:,i-1);
    Eexp(1,i)=1/2*((Uexp(2,i))^2+w0^2*(Uexp(1,i))^2);
end
```

Solution exacte

```
t=0:dt:dt*(n-1);
q_exacte=cos(2*pi*t);
dq_exacte=-2*pi*sin(2*pi*t);
Eexacte(1,1:n)=1/2*w0^2;
```

Figure de q en exp/imp/exacte

```
figure
plot(t,Uexp(1,:))
hold on
plot(t,Uimp(1,:))
hold on
plot(t,q_exacte)
hold on
grid on
legend('q-exp','q-imp','q-exacte');
title('q en exp/imp/exacte');
xlabel('t');
```

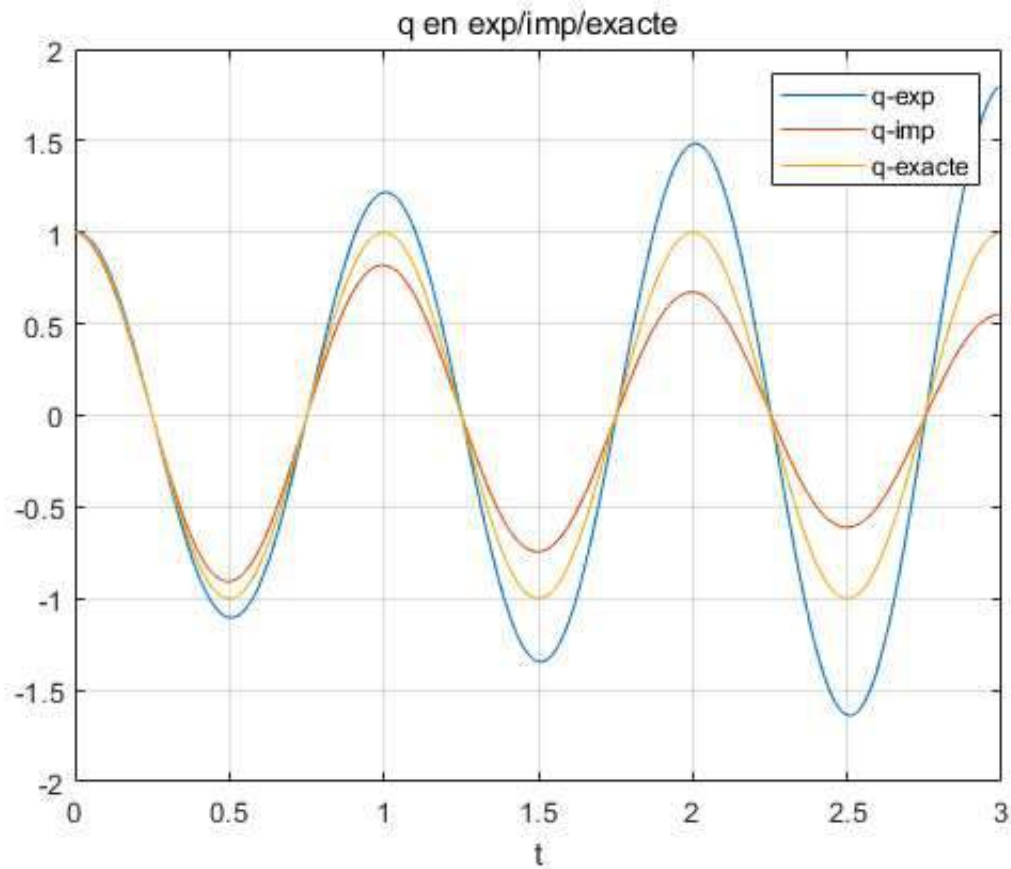


Figure de dq en exp/imp/exacte

```
figure
plot(t,Uexp(2,:))
hold on
plot(t,Uimp(2,:))
hold on
plot(t,dq_exacte)
grid on
legend('dq-exp','dq-imp','dq-exacte');
title('dq en exp/imp/exacte');
xlabel('t');
```

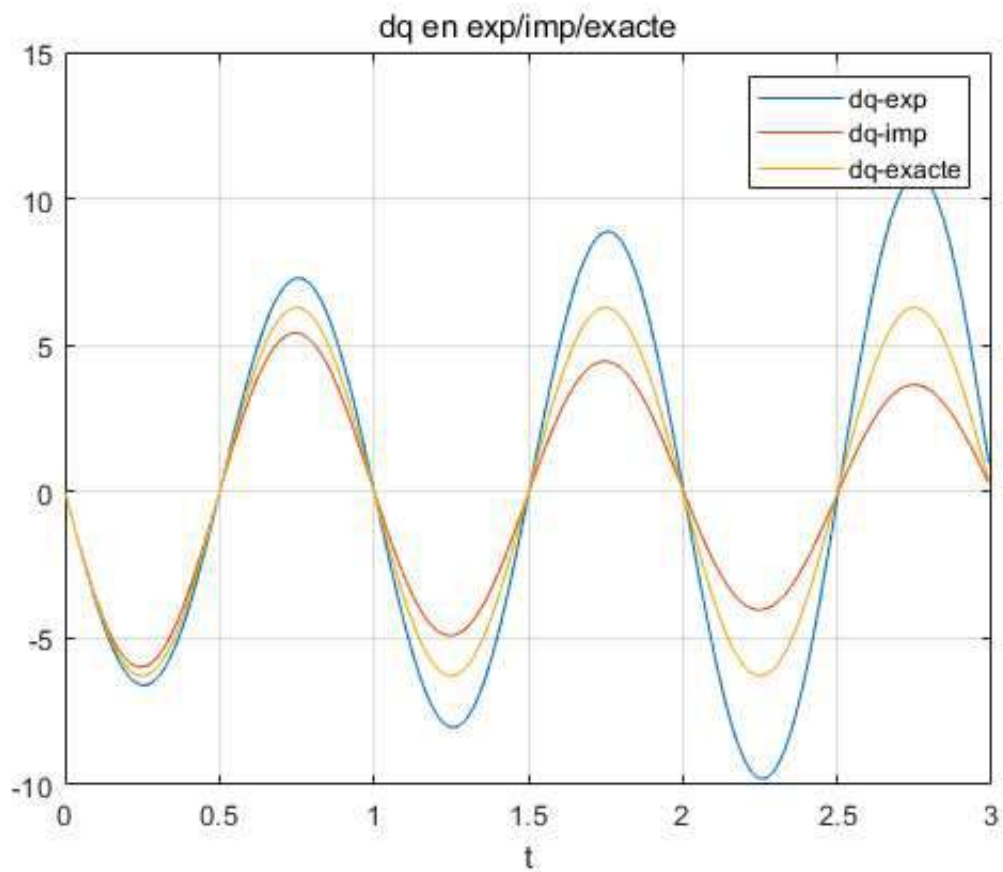



Figure de E* en exp/imp/exacte

```
figure
plot(t,Eexp(1,:))
hold on
plot(t,Eimp(1,:))
hold on
plot(t,Eexacte(1,:))
grid on
legend('E-exp','E-imp','E-exacte');
title('E-exp, E-imp, et E-exacte');
xlabel('t');
```

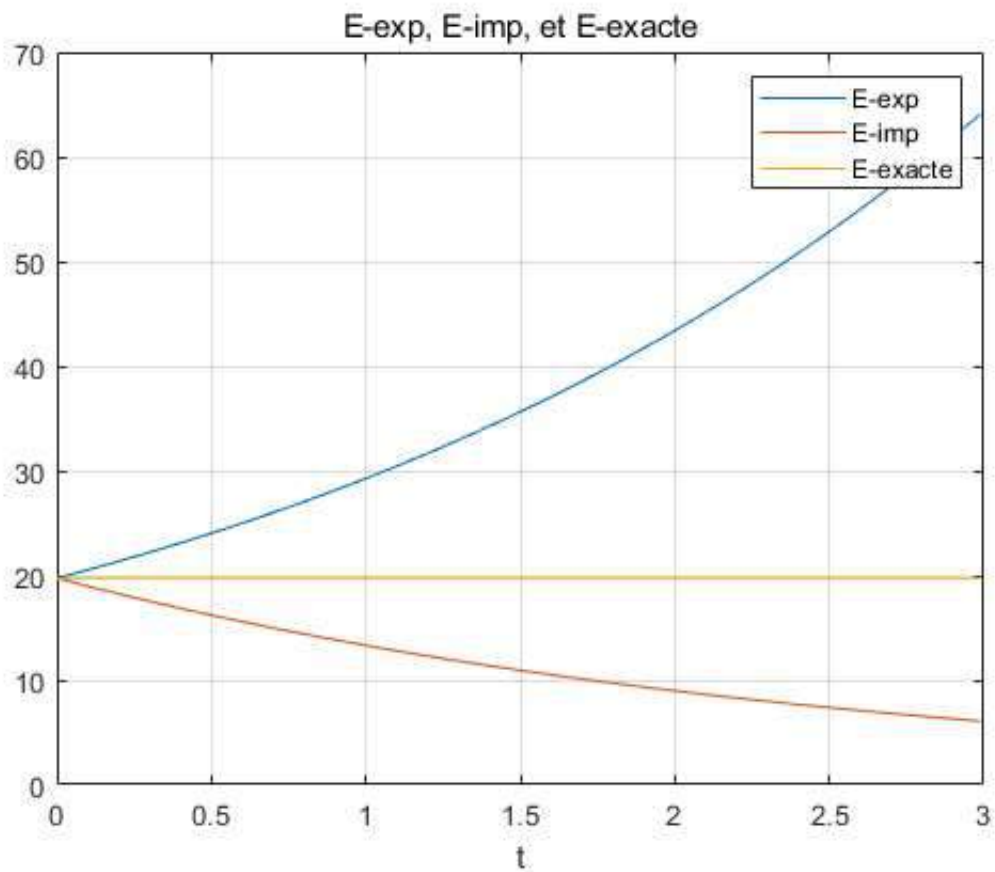
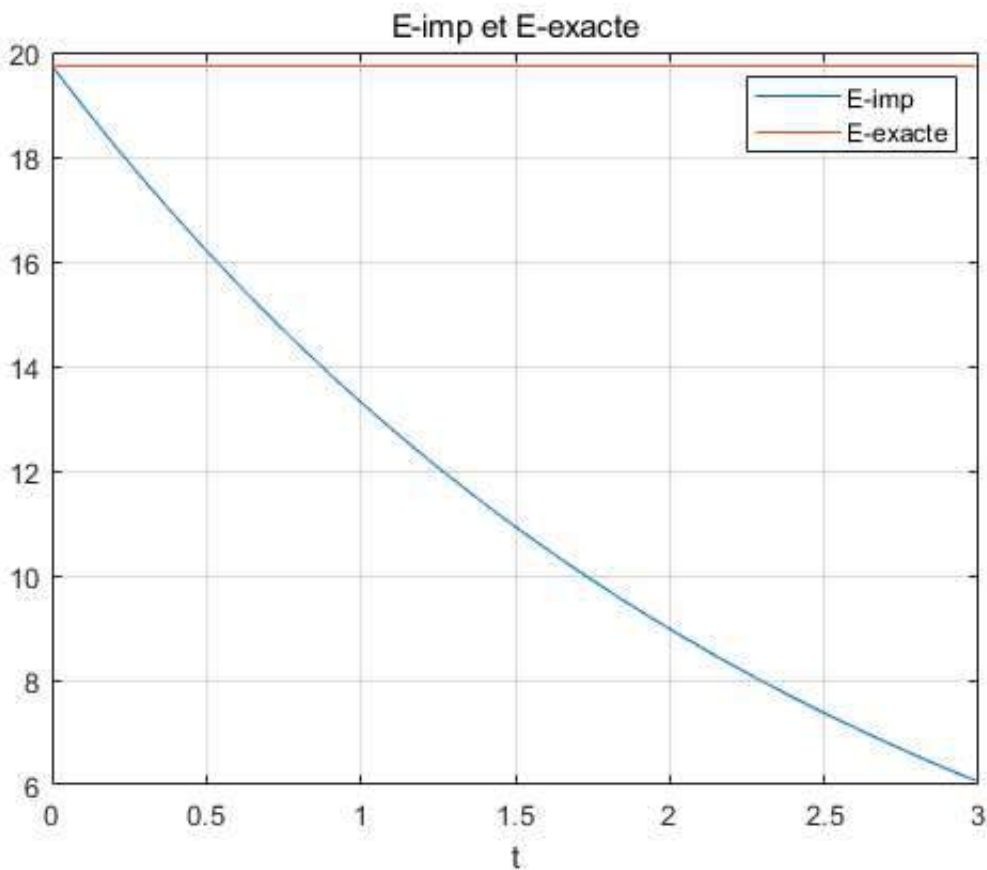


Figure de E^* en imp/exacte

```
figure
plot(t,Eimp(1,:))
hold on
plot(t,Eexacte(1,:))
grid on
legend('E-imp','E-exacte');
title('E-imp et E-exacte');
xlabel('t');
```



Matrice A

```

syms pi dt
w0=2*pi;
A_exp=[1 dt;-w0^2*dt 1];
A_imp=[1/(1+(w0*dt)^2) , dt/(1+(w0*dt)^2) ; -(dt*w0^2)/(1+(w0*dt)^2) , 1/(1+(w0*dt)^2)];
[V1,D1]=eig(A_exp)
[V2,D2]=eig(A_imp)
vp_exp1_module=simplify(norm(D1(1,1)))
vp_exp2_module=simplify(norm(D1(2,2)))
vp_imp1_module=simplify(norm(D2(1,1)))
vp_imp2_module=simplify(norm(D2(2,2)))

```

V1 =

$$\begin{bmatrix} 1/(4*dt*pi^2) + (pi*dt*2i - 1)/(4*dt*pi^2) & 1/(4*dt*pi^2) - (pi*dt*2i + 1)/(4*dt*pi^2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D1 =

$$\begin{bmatrix} 1 - pi*dt*2i & 0 \\ 0 & pi*dt*2i + 1 \end{bmatrix}$$

V2 =

$$\begin{bmatrix} 1/(4*dt*pi^2) - ((4*pi^2*dt^2 + 1)*1i)/(4*dt*pi^2*(2*pi*dt + 1i)) & 1/(4*dt*pi^2) - (4*pi^2*dt^2 + 1)/(4*dt*pi^2*(pi*dt*2i + 1)) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D2 =

```
[ 1i/(2*pi*dt + 1i),      0]
[      0, 1/(pi*dt*2i + 1)]
```

vp_exp1_module =

```
abs(1 - pi*dt*2i)
```

vp_exp2_module =

```
abs(pi*dt*2i + 1)
```

vp_imp1_module =

```
1/abs(2*pi*dt + 1i)
```

vp_imp2_module =

```
1/abs(pi*dt*2i + 1)
```

Figure de RK_45

```
a=0;
b=3;% T0=3s
dt=0.01;
figure
[t1,q1]=RK_45(@fun_OCL_1ddl,dt,[1 0],a,b);
plot(t1,q1(1,:),t1,q1(2,:));
grid on;
legend('q-RK45','dq-RK45');
title('q-RK45 et dq-RK45');
xlabel('t');
% La solution q(t)
```

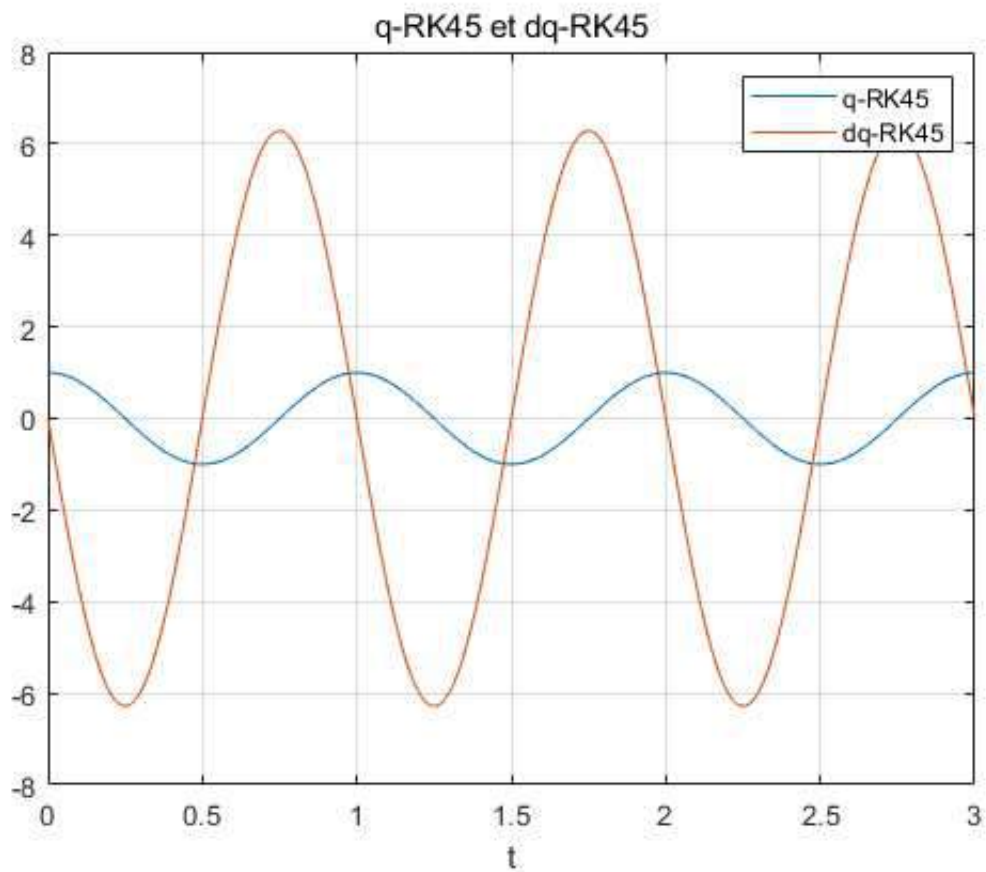
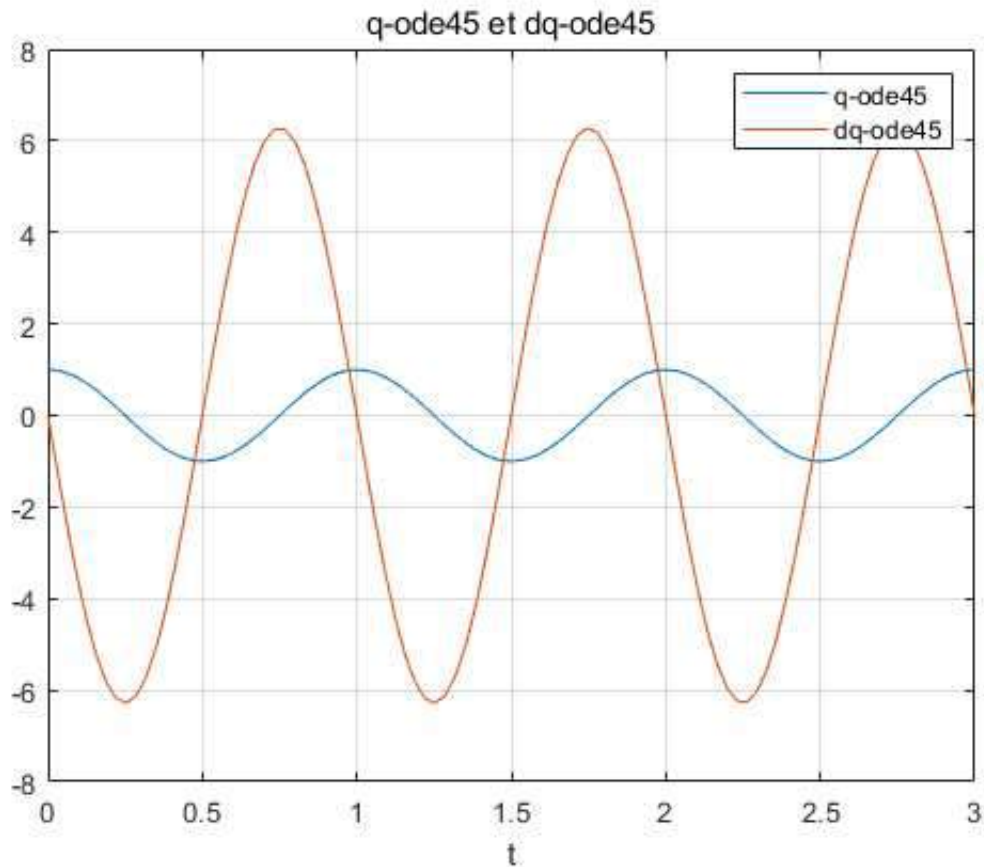


Figure de ode_45

```
figure
[t2,q2]=ode45('OCL_1ddl',[0 3],[1 0]);
plot(t2,q2(:,1),t2,q2(:,2));
grid on;
legend('q-ode45','dq-ode45');
title('q-ode45 et dq-ode45');
xlabel('t');
```



Calcul de ERK45

```
ERK45(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
for i=2:n
    ERK45(1,i)=1/2*((q1(2,i))^2+w0^2*(q1(1,i))^2);
end
```

Figure de q en exp/imp/RK45/exacte

```
t=0:dt:dt*(n-1);
q_exacte=cos(2*pi*t);
dq_exacte=-2*pi*sin(2*pi*t);
figure
plot(t,Uexp(1,:))
hold on
plot(t,Uimp(1,:))
hold on
plot(t,q1(1,1:end-1)) %q1 a un plus de colonne
hold on
plot(t,q_exacte,'-.')
grid on
legend('q-exp','q-imp','q-RK45','q-exacte');
title('q en exp/imp/RK45/exacte');
xlabel('t');
```

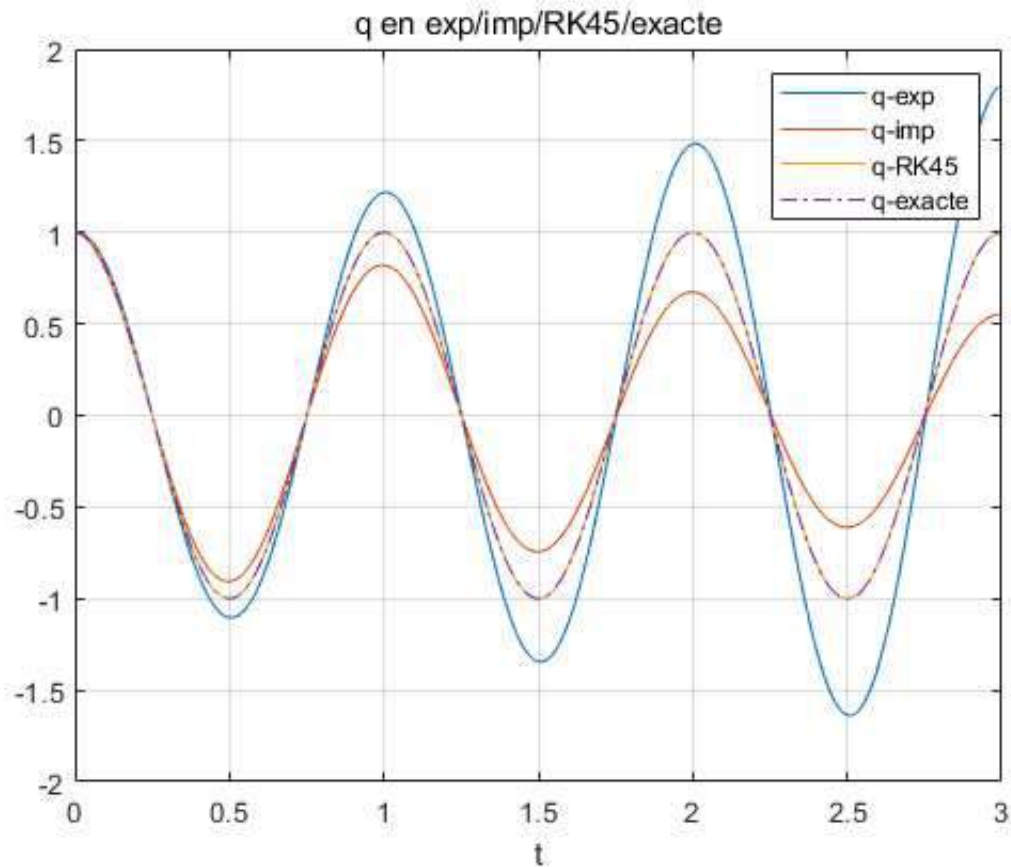


Figure de dq en exp/imp/RK45/exacte

```

figure
plot(t,Uexp(2,:))
hold on
plot(t,Uimp(2,:))
hold on
plot(t,q1(2,1:end-1))
hold on
plot(t,dq_exacte,'--')
grid on
legend('dq-exp','dq-imp','dq-RK45','dq-exacte');
title('dq en exp/imp/RK45/exacte');
xlabel('t');
% q-RK45 et dq-RK45 est beaucoup plus précis,
% qui co?ncident avec q-exacte et dq-exacte respectivement.

```

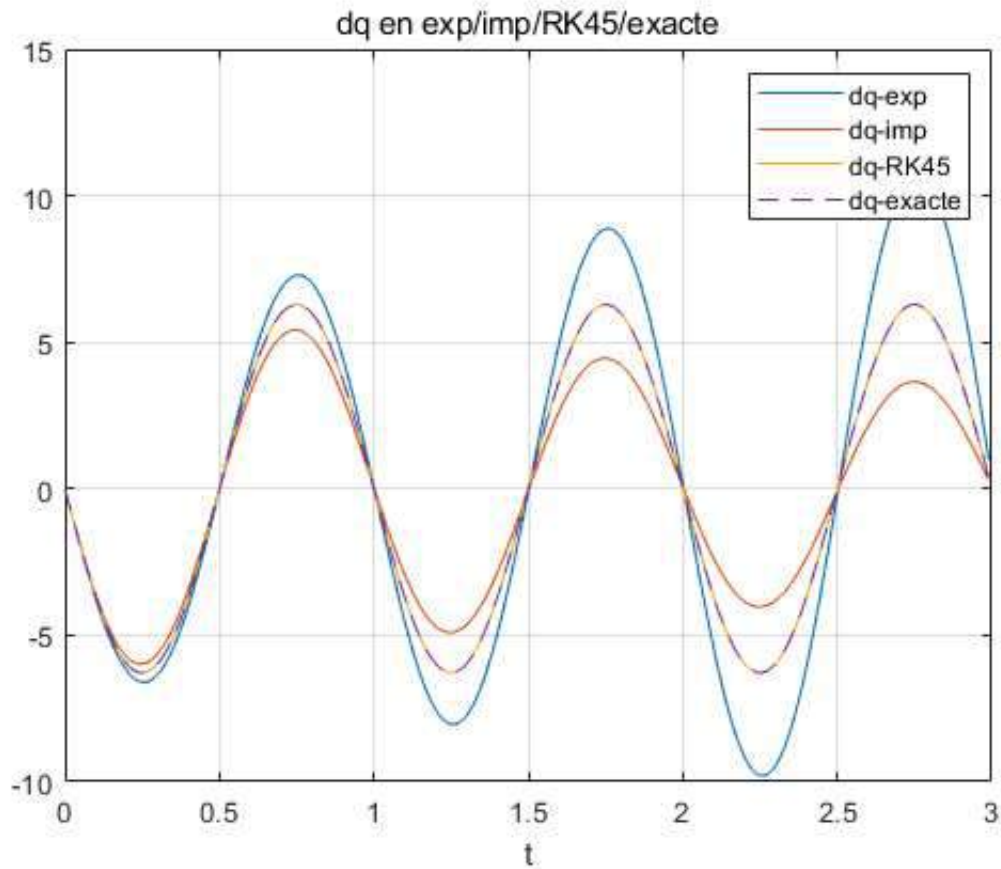


Figure de q en RK45/exacte

```

figure
plot(t,q1(1,1:end-1)) %q1 a un plus de colonne
hold on
plot(t,q1(2,1:end-1))
hold on
q_exacte=cos(2*pi*t);
dq_exacte=-2*pi*sin(2*pi*t);
plot(t,q_exacte,'-.')
hold on
plot(t,dq_exacte,'--')
grid on
legend('q-RK45','dq-RK45','q-exacte','dq-exacte');
title('q et dq en RK45/exacte');
xlabel('t');

```

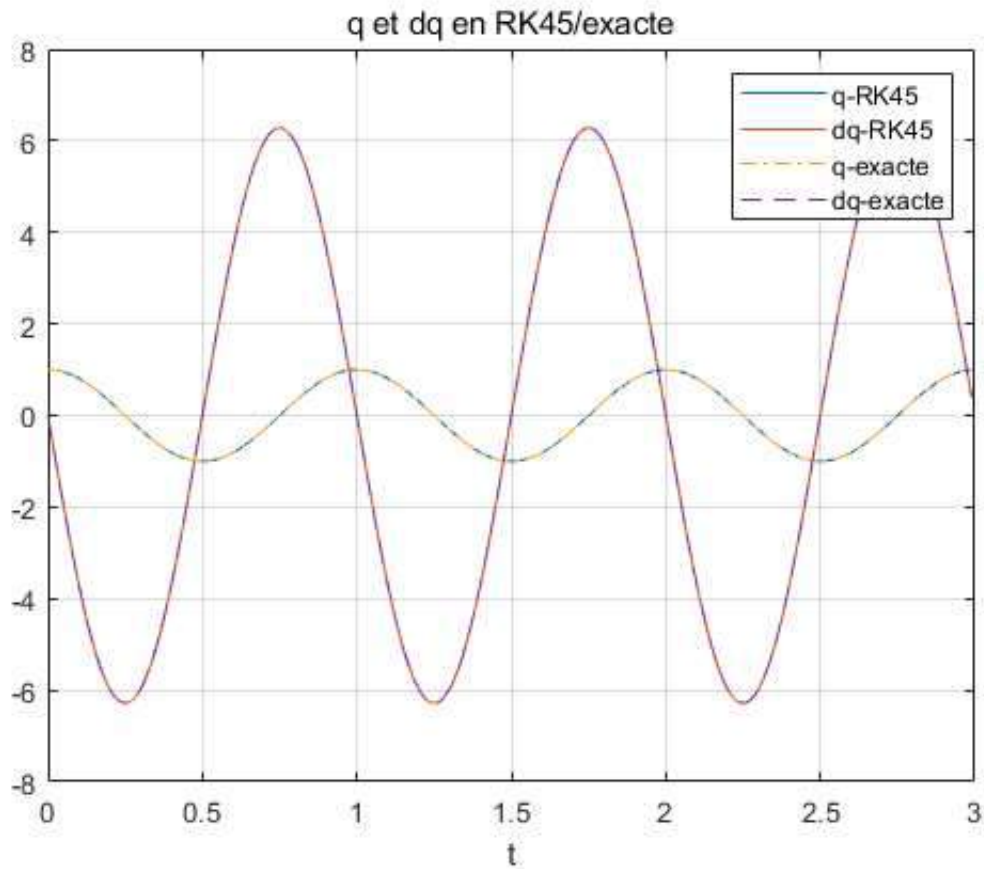



Figure de E* en exp/imp/RK45/exacte

```

figure
t=0:dt:dt*(n-1);
plot(t,Eimp(1,:))
hold on
plot(t,Eexp(1,:))
hold on
plot(t,ERK45(1,:))
hold on
plot(t,Eexacte(1,:), '-.')
grid on
legend('E-imp', 'E-exp', 'E-RK45', 'E-exacte');
title('E-imp, E-exp, E-RK45 et E-exacte');
xlabel('t');

```

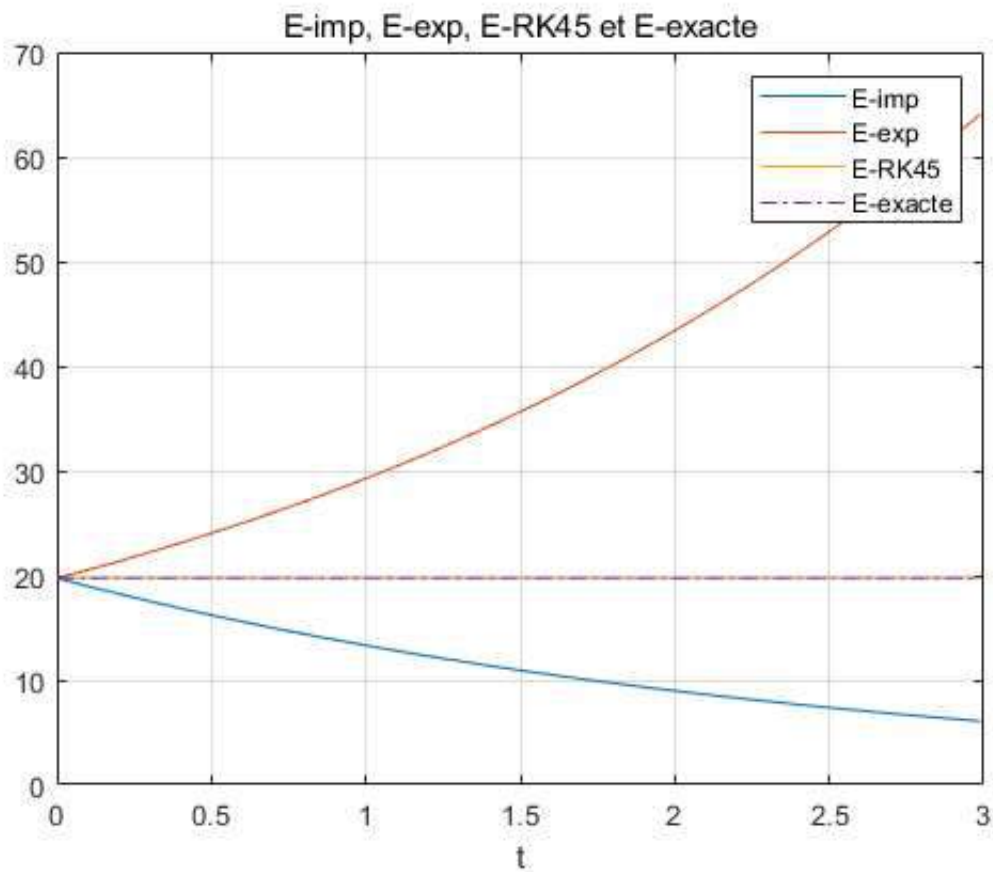


Figure de E* en RK45/exacte

```

figure
plot(t,ERK45(1,:))
hold on
plot(t,Eexacte(1,:))
grid on
legend('E-RK45','E-exacte');
title('E-RK45 et E-exacte');
xlabel('t');
% E-RK45 est beaucoup plus précis, E-RK45 et E-exacte presque co?ncident,
% mais E-RK45 dimunue lentement quand même.

```

E-RK45 et E-exacte

