

Oscillateur conservatif à un degré de liberté

Ex2 Schéma d'Euler explicite

2.1

Montrer que le schéma explicite avec matrice d'amplification est obtenu à partir du système du premier ordre que l'on discrétise en temps de manière explicite.

Schéma d'Euler explicite

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j + \Delta t \times \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{pmatrix}$$

On a  $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ , donc

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$$

soit  $U_j = \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$       $A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$

on obtient  $U_{j+1} = [A] \cdot U_j$

2.2

Programme:

```

clc
clear all
close all

%% Condition initiale
w0=2*pi;
q0=1;
Dq0=0;
T0=3;

%% Euler explicite
Uexp(1,1)=q0;
Uexp(2,1)=Dq0;
Eexp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
dt=0.01;
% changer le pas de temps.
% Plus dt est petit, plus la divergence est lente,

```

```

% et plus la divergence de E est lente
n=floor(T0/dt);
A=[1 dt;-w0^2*dt 1];
for i=2:n
    Uexp(:,i)=A*Uexp(:,i-1);
    Eexp(1,i)=1/2*((Uexp(2,i))^2+w0^2*(Uexp(1,i))^2);
end

%% Solution exacte
t=0:dt:dt*(n-1);
q_exacte=cos(2*pi*t);
dq_exacte=-2*pi*sin(2*pi*t);
Eexacte(1,1:n)=1/2*w0^2;

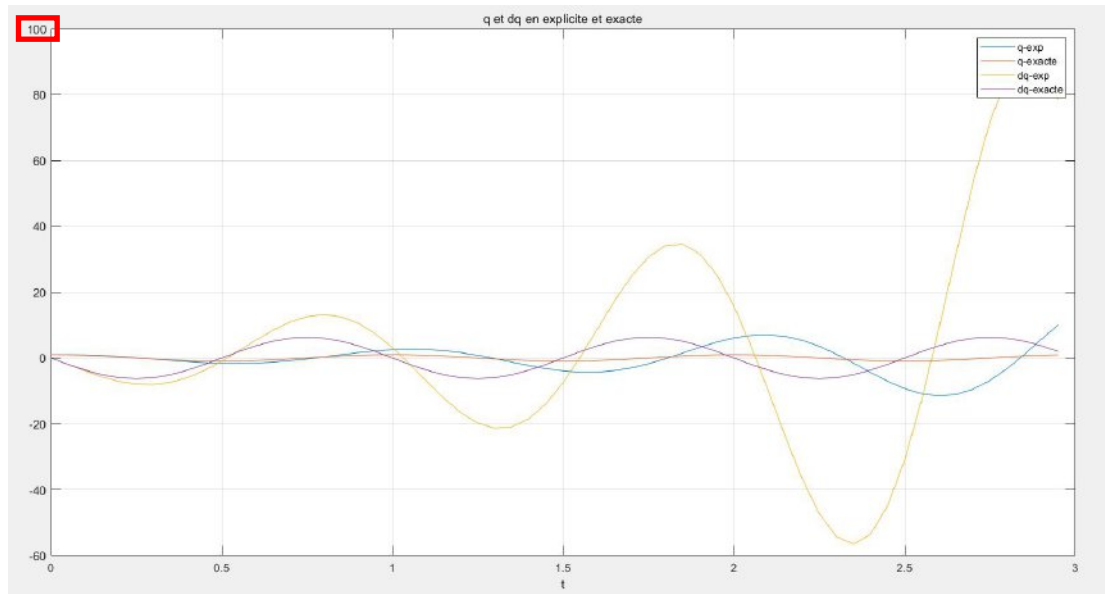
%% Figure exp
figure
plot(t,Uexp(1,:))
hold on
plot(t,q_exacte)
hold on
plot(t,Uexp(2,:))
hold on
plot(t,dq_exacte)
grid on
legend('q-exp','q-exacte','dq-exp','dq-exacte');
title('q et dq en explicite et exacte');
xlabel('t');

%% Figure de E*
figure
plot(t,Eexp(1,:))
hold on
plot(t,Eexacte(1,:))
grid on
legend('E-exp','E-exacte');
title('E-exp et E-exacte');
xlabel('t');

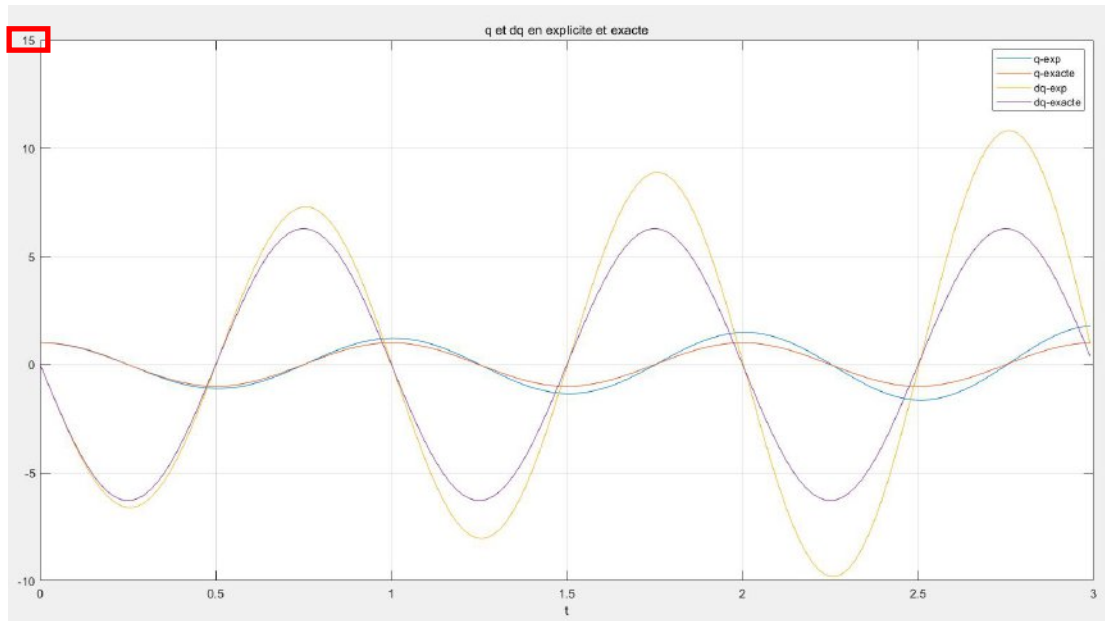
```

## 2.3

Quand  $dt=0.05$



Quand  $dt=0.01$

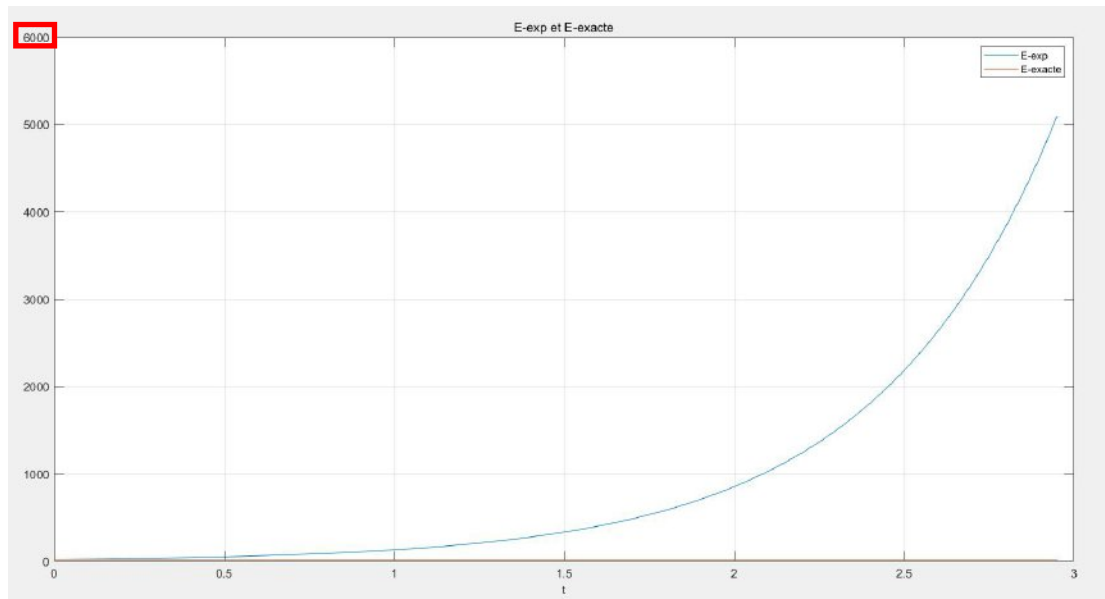


**Résumé:**

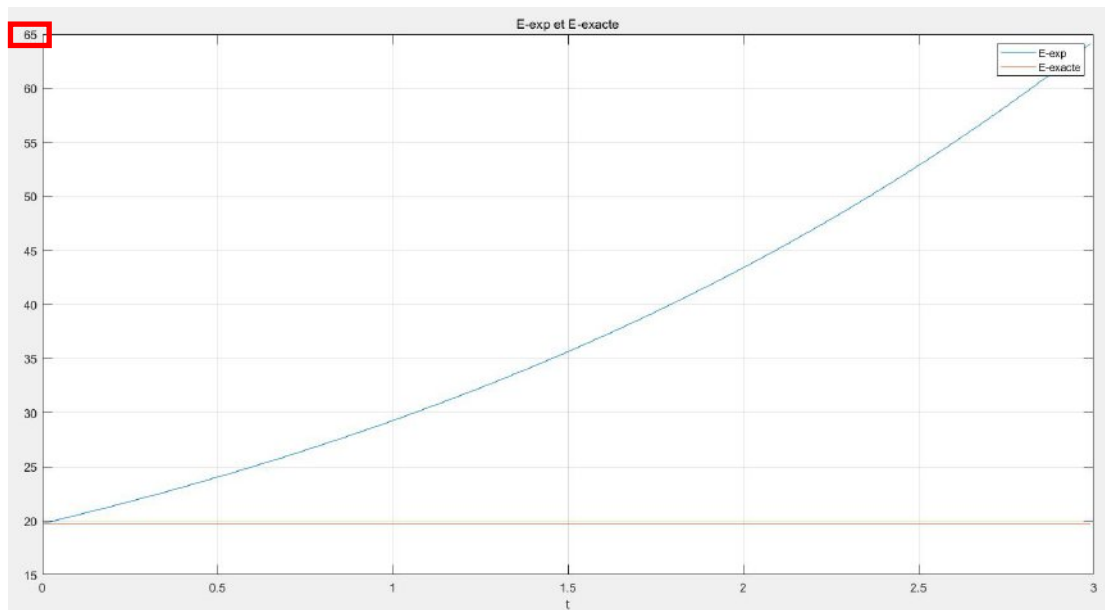
Plus  $dt$  est petit, plus la divergence est lente.

## 2.4

Quand  $dt=0.05$



Quand  $dt=0.01$



**Résumé:**

Plus  $dt$  est petit, plus la divergence de  $E^*$  est lente.

## 2.5

**Programme:**

```
%% Matrice A
syms pi dt
w0=2*pi;
A=[1 dt;-w0^2*dt 1];
[V,D]=eig(A)
vp1_module=simplify(norm(D(1,1)))
```

```
vp2_module=simplify(norm(D(2,2)))
```

### Résumé:

```
vp1_module=abs(1-pi*dt*2i)
```

```
vp2_module=abs(pi*dt*2i+1)
```

Donc les modules des valeur propre de la matrice d'amplification sont toujours supérieur à 1, ainsi le caractère inconditionnellement instable du schéma d'Euler explicite.

### Ex3 Schéma d'Euler implicite

#### 3.1

##### Programme:

```
clc
clear all
close all

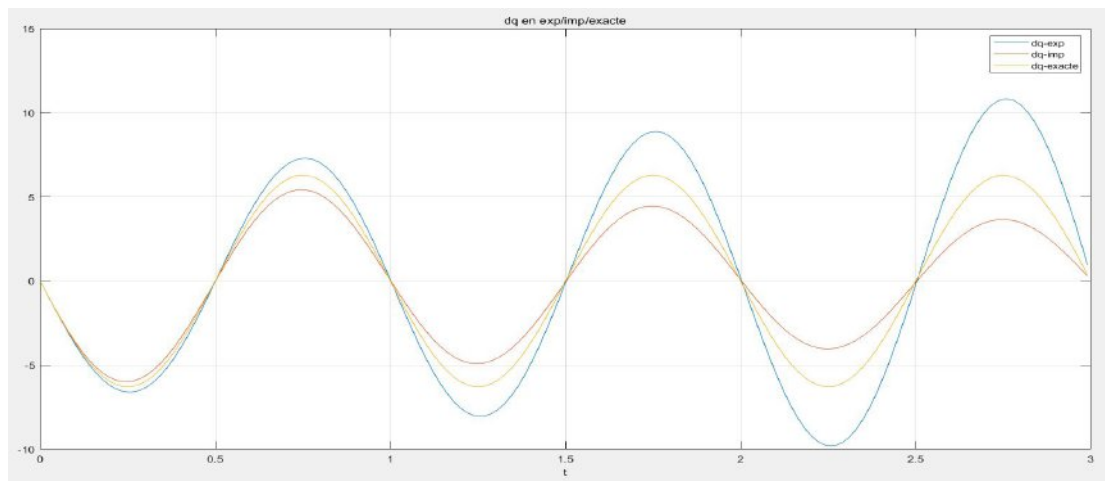
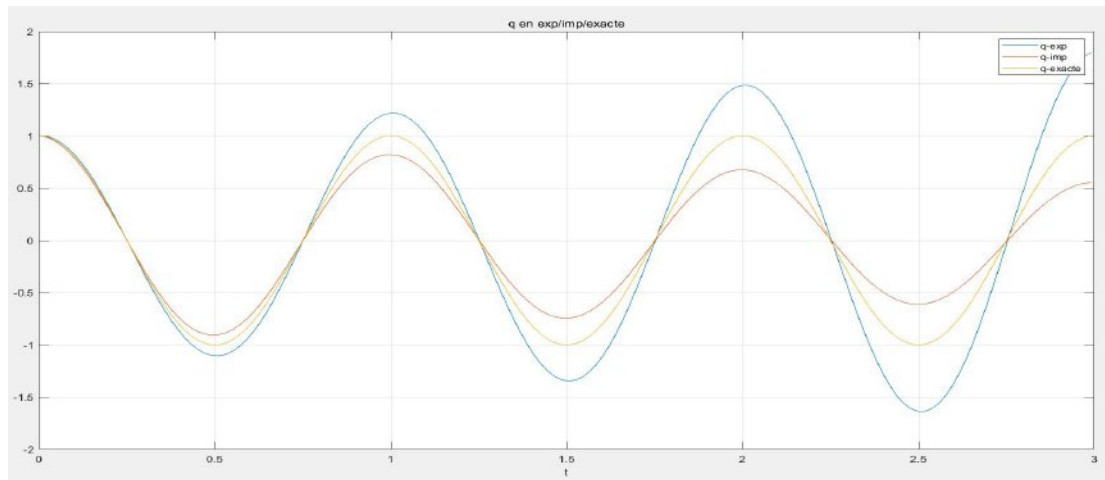
%% Condition initiale
w0=2*pi;
q0=1;
Dq0=0;
T0=3;

%% Euler implicite
Uimp(1,1)=q0;
Uimp(2,1)=Dq0;
Eimp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
dt=0.01;
% changer le pas de temps.
% Plus dt est petit, plus l'atténuation des oscillations
est faible,
% et plus la divergence de Eimp est lente.
n=floor(T0/dt);

A_imp=[1/(1+(w0*dt)^2) , dt/(1+(w0*dt)^2) ;
-(dt*w0^2)/(1+(w0*dt)^2) , 1/(1+(w0*dt)^2)];
for i=2:n
    Uimp(:,i)=A_imp*Uimp(:,i-1);
    Eimp(1,i)=1/2*((Uimp(2,i))^2+w0^2*(Uimp(1,i))^2);
end
```

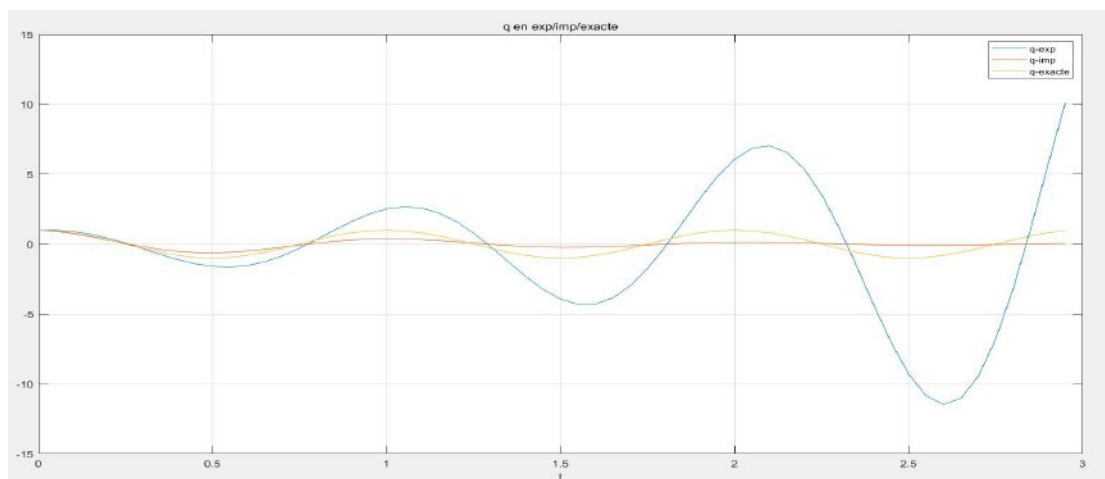
### 3.2

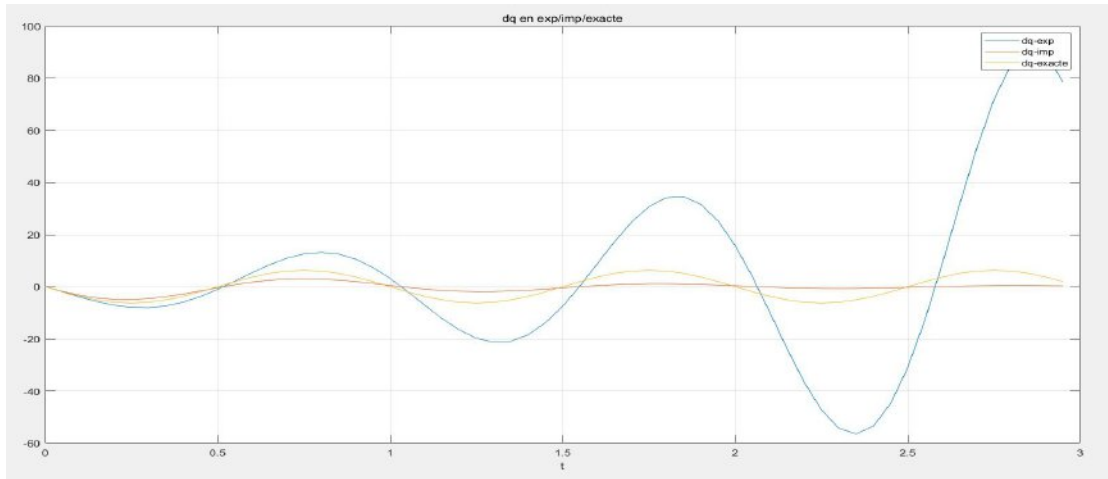
Quand  $dt=0.01$



### 3.3

Quand  $dt=0.05$



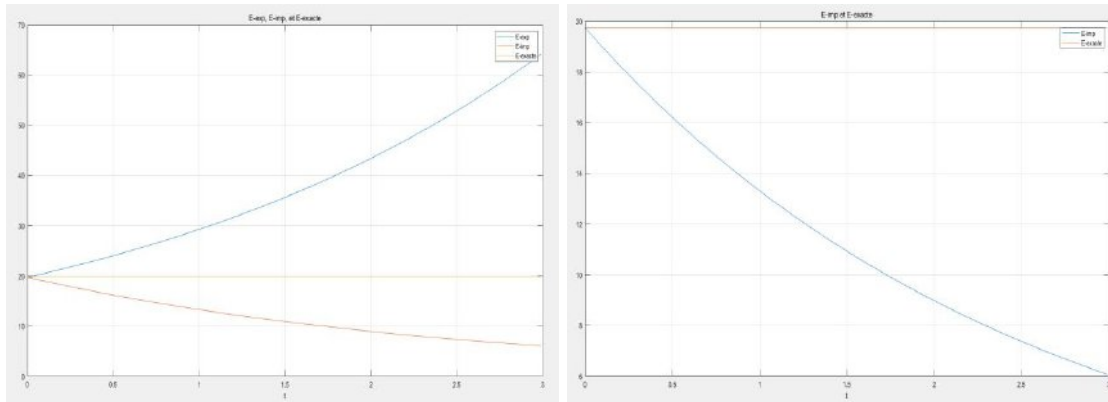


**Résumé:**

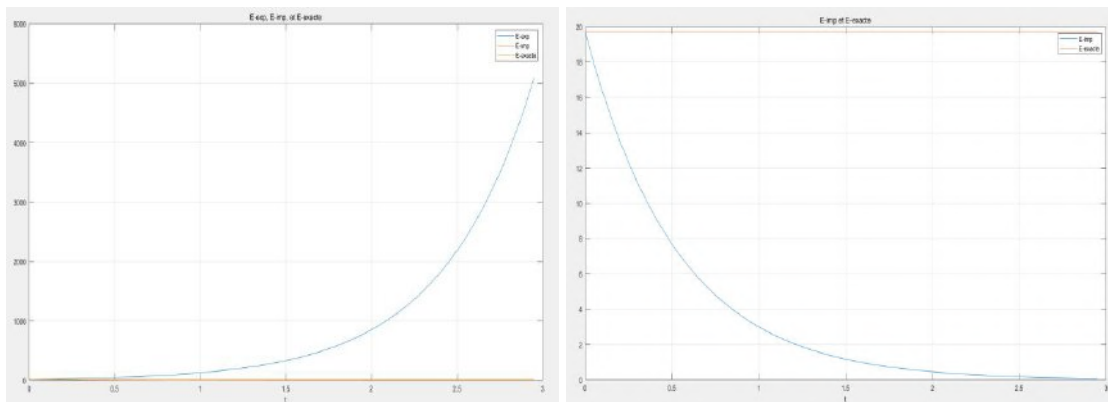
Plus dt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

**3.4**

Quand dt=0.01



Quand dt=0.05



Plus dt est petit, plus la divergence de E-imp est lente.

**3.5**

**Programme:**

```

%% Matrice A
syms pi dt

```

```

w0=2*pi;
A_exp=[1 dt;-w0^2*dt 1];
A_imp=[1/(1+(w0*dt)^2) , dt/(1+(w0*dt)^2) ;
-(dt*w0^2)/(1+(w0*dt)^2) , 1/(1+(w0*dt)^2)];
[V1,D1]=eig(A_exp)
[V2,D2]=eig(A_imp)
vp_exp1_module=simplify(norm(D1(1,1)))
vp_exp2_module=simplify(norm(D1(2,2)))
vp_imp1_module=simplify(norm(D2(1,1)))
vp_imp2_module=simplify(norm(D2(2,2)))

```

### Résumé:

```

vp_exp1_module =abs(1 - pi*dt*2i)
vp_exp2_module =abs(pi*dt*2i + 1)

```

```

vp_imp1_module =1/abs(2*pi*dt + 1i)
vp_imp2_module =1/abs(pi*dt*2i + 1)

```

Les modules des valeur propre de la matrice d'amplification d'Euler explicite sont toujours supérieur à 1, ainsi le caractère inconditionnellement instable du schéma d'Euler explicite.

Les modules des valeur propre de la matrice d'amplification d'Euler implicite sont toujours inférieur à 1, ainsi le caractère inconditionnellement stable du schéma d'Euler implicite.

### Ex4 Schéma de RUNGE KUTTA

#### 4.1

$$\ddot{q} + w_0^2 q = 0$$

$$\text{soit } U = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } \dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

$$\text{on suppose que } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc on obtient la forme du premier ordre

$$\dot{U} = A \cdot U$$



## 4.2

### Programme:

#### RK\_45.m

```
function [t,y]=RK_45(fun,dt,y0,a,b)%(f,dt,CI,t0,tf)
y(:,1)=y0;
t(1,1)=0;
n=(b-a)/dt;

for i=1:n
    t(1,i+1)=t(1,i)+dt;
    k1=fun(y(:,i),t(1,i));
    k2=fun(y(:,i)+k1*dt/2,t(1,i)+dt/2);
    k3=fun(y(:,i)+k2*dt/2,t(1,i)+dt/2);
    k4=fun(y(:,i)+k3*dt,t(1,i)+dt);
    K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    y(:,i+1)=y(:,i)+K*dt;
end
end
```

#### fun\_OCL\_1ddl.m

```
function dU=fun_OCL_1ddl(U,t)
w0=2*pi;
dU=zeros(2,1);
A=[0 1; -w0^2 0];
dU=A*U;
end
```

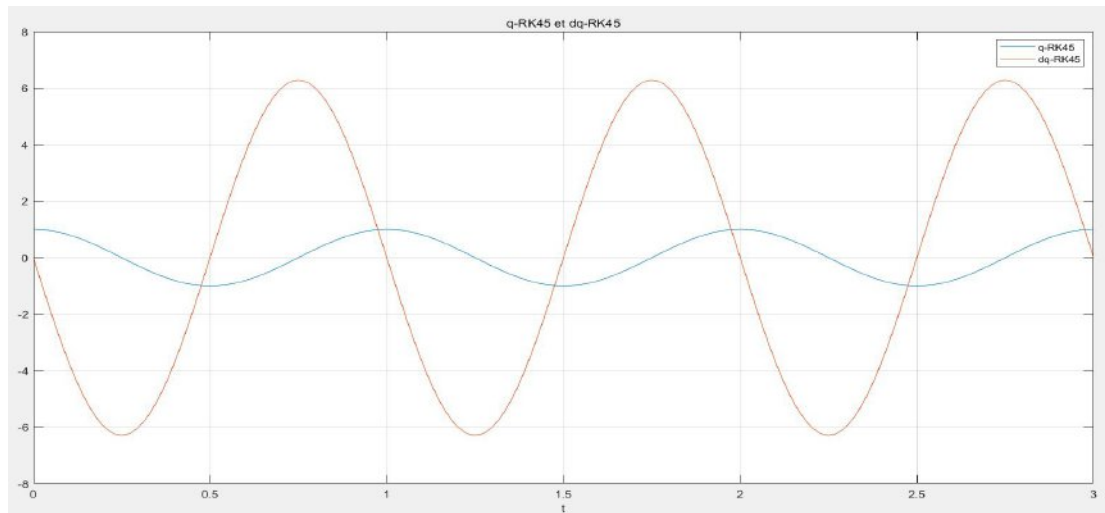
#### main.m

```
clc
clear all
close all

%% Condition initiale
dt=0.01;
% changer le pas de temps, dt=0.01 ode45=RK45
a=0;
b=3;% T0=3s

%% Figure de RK_45
figure
[t1,q1]=RK_45(@fun_OCL_1ddl,dt,[1 0],a,b);
plot(t1,q1(1,:),t1,q1(2,:));
grid on;
legend('q-RK45','dq-RK45');
```

```
title('q-RK45 et dq-RK45');
xlabel('t');
```



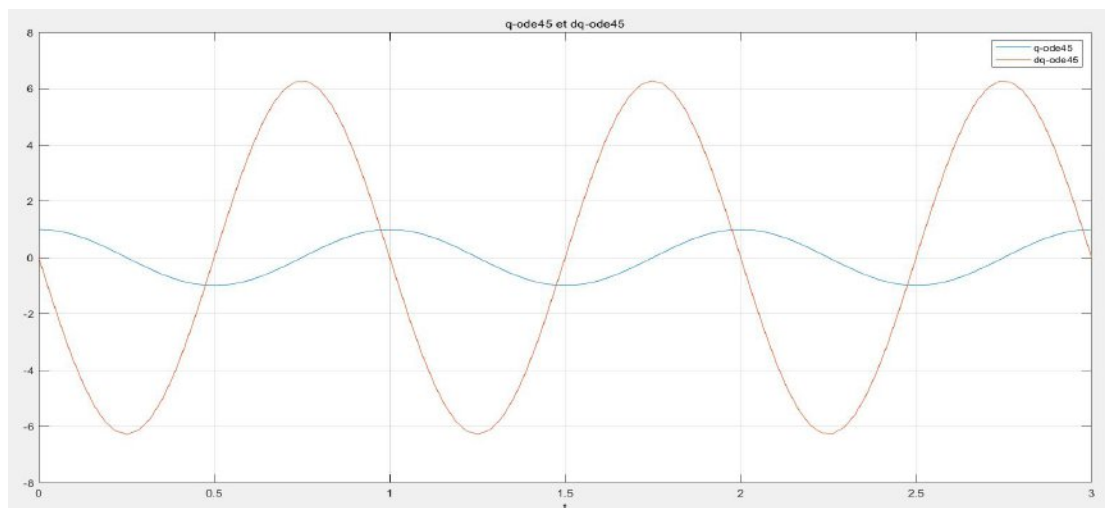
**Remarque: changer le pas de temps, quand  $dt=0.01$  ode45=RK45**

**OCL\_1ddl.m**

```
function dq=OCL_1ddl(t,q)
w0=2*pi;
dq=zeros(2,1);
dq(1)=q(2);
dq(2)=-w0^2*q(1);
end
```

**main.m**

```
%% Figure de ode_45
figure
[t2,q2]=ode45('OCL_1ddl',[0 3],[1 0]);
plot(t2,q2(:,1),t2,q2(:,2));
grid on;
legend('q-ode45','dq-ode45');
title('q-ode45 et dq-ode45');
xlabel('t');
```



### 4.3

#### Programme:

```
clc
clear all
close all

%% Condition initiale
dt=0.01;
% changer le pas de temps, dt=0.01 ode45=RK45
a=0;
b=3;% T0=3s

%% Comparaison de la solution et E*
w0=2*pi;
q0=1;
Dq0=0;
T0=3;
n=(b-a)/dt;

Eexp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
Uexp(1,1)=q0;
Uexp(2,1)=Dq0;

Eimp(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
Uimp(1,1)=q0;
Uimp(2,1)=Dq0;

ERK45(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);

Eexacte(1,1:n)=1/2*w0^2;
for i=2:n
    Uexp(1,i)=Uexp(1,i-1)+dt*Uexp(2,i-1);
    Uexp(2,i)=-w0^2*dt*Uexp(1,i-1)+Uexp(2,i-1);
    Eexp(1,i)=1/2*((Uexp(2,i))^2+w0^2*(Uexp(1,i))^2);

    Uimp(1,i)=(1/(1+(w0*dt)^2))*Uimp(1,i-1)+(dt/(1+(w0*dt)^2))*Uimp(2,i-1);
    Uimp(2,i)=(-(dt*w0^2)/(1+(w0*dt)^2))*Uimp(1,i-1)+(1/(1+(w0*dt)^2))*Uimp(2,i-1);
    Eimp(1,i)=1/2*((Uimp(2,i))^2+w0^2*(Uimp(1,i))^2);

    ERK45(1,i)=1/2*((q1(2,i))^2+w0^2*(q1(1,i))^2);
end
```

Figure de q en exp/imp/RK45/exacte

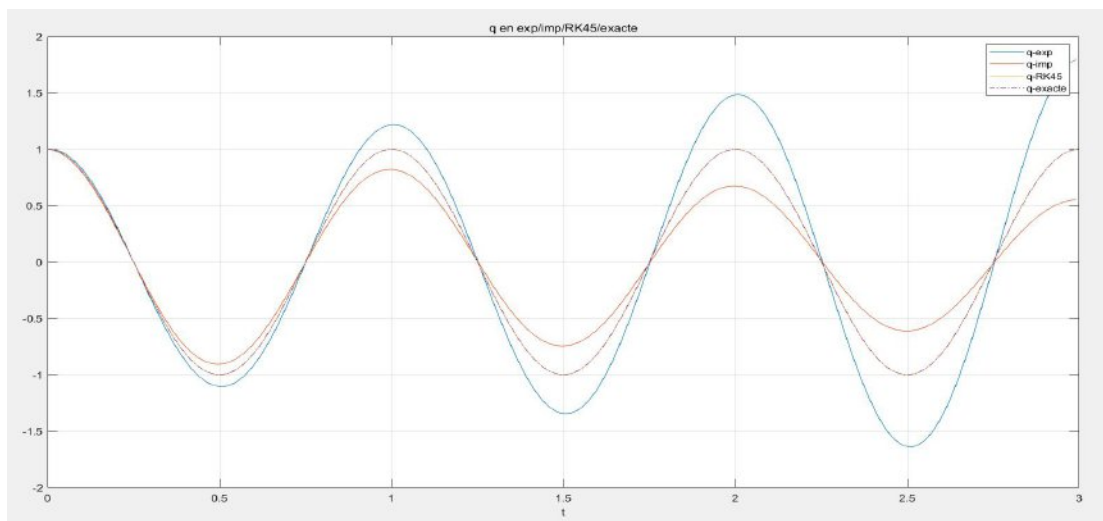


Figure de dq en exp/imp/RK45/exacte

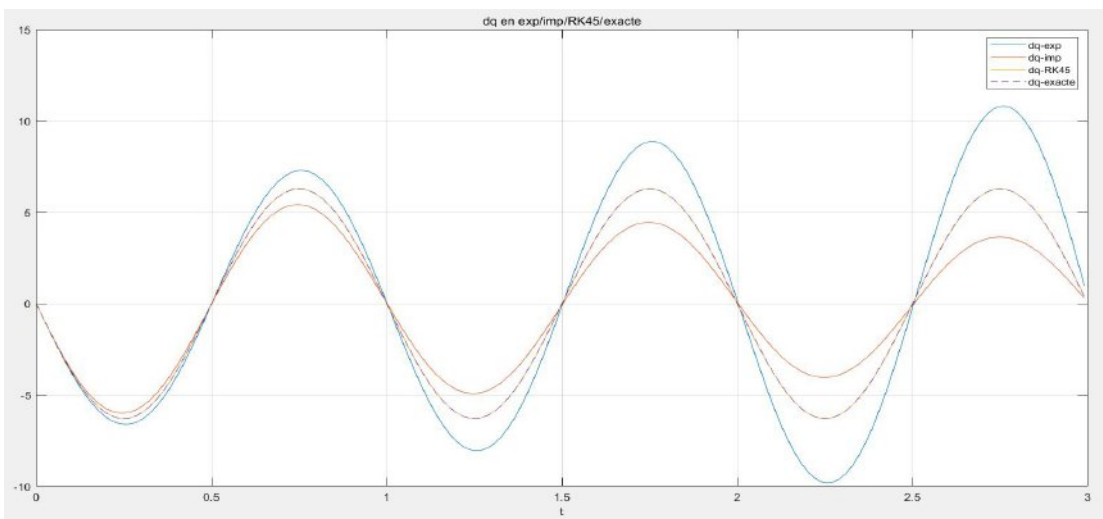
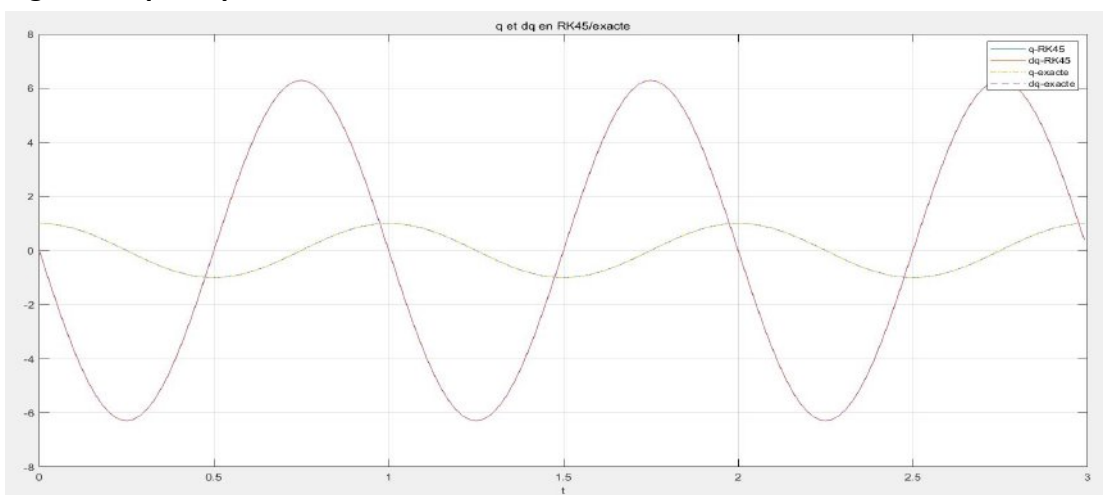


Figure de q et dq en RK45/exacte



**Résumé:**

$q$ -RK45 et  $dq$ -RK45 est beaucoup plus précis, qui coïncident avec  $q$ -exacte et  $dq$ -exacte respectivement. Donc, le schéma de RUNGE KUTTA est beaucoup plus précis que le schéma d'EULER explicite et le schéma d'EULER implicite.

#### 4.4

Figure de  $E^*$  en exp/imp/RK45/exacte

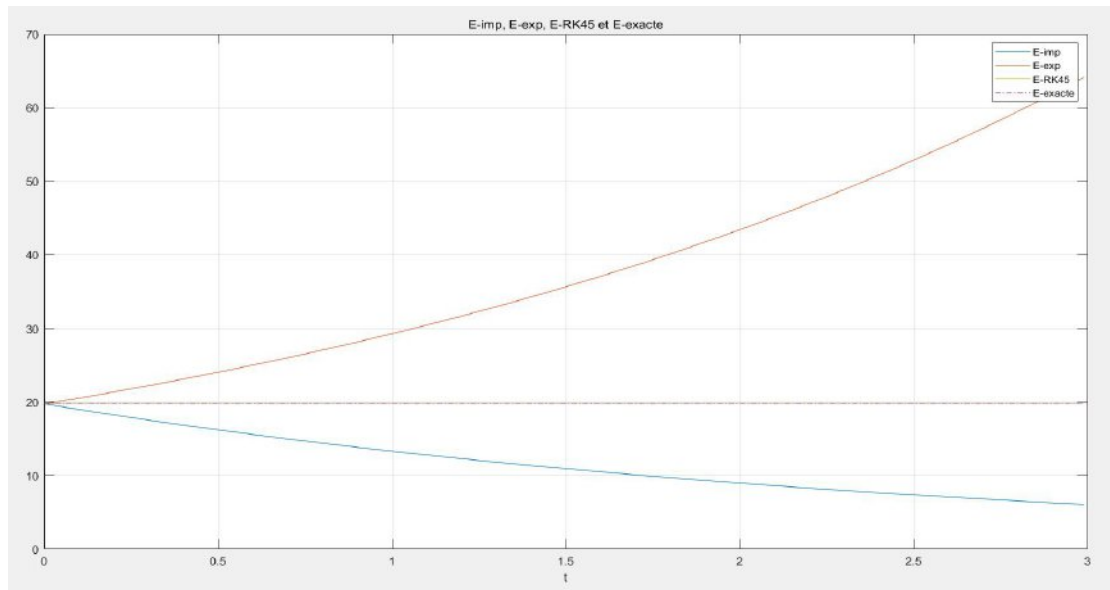
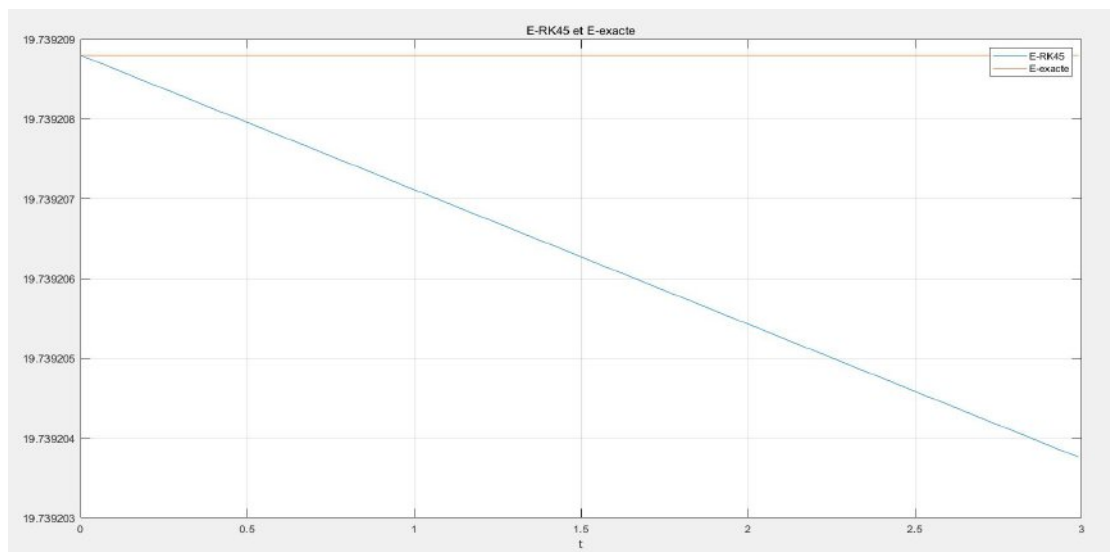


Figure de  $E^*$  en RK45/exacte



**Résumé:**

**E-RK45 est beaucoup plus précis que E-exp et E-imp, E-RK45 et E-exacte presque coïncident, mais E-RK45 diminue lentement quand même, donc il existe aussi une erreur.**

## Ex5.1 Résolution avec un schéma de NEWMARK $\gamma = 0.5$ $\beta = 0.25$

### 5.1.1

#### Programme:

```
clc
clear all
close all

%% Condition initiale
gamma=0.5;
beta=0.25;
w0=2*pi;
q0=1;
Dq0=0;
T0=3;
dt=0.01;
a=0;
b=3;% T0=3s

%% Calcul de q en Newmark
U_New(1,1)=q0;
U_New(2,1)=Dq0;
E_New(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
n=(b-a)/dt;
B=[1+beta*dt^2*w0^2 , 0 ; gamma*dt*w0^2 , 1];
C=[1-(0.5-beta)*dt^2*w0^2 , dt ; -(1-gamma)*dt*w0^2 ,
1];
A=C/B

for i=2:n
    U_New(:,i)=A*U_New(:,i-1);

E_New(1,i)=1/2*((U_New(2,i))^2+w0^2*(U_New(1,i))^2);
end
```

### 5.1.2

Figure de q et dq en explicite/implicite/RK45/exacte/newmark

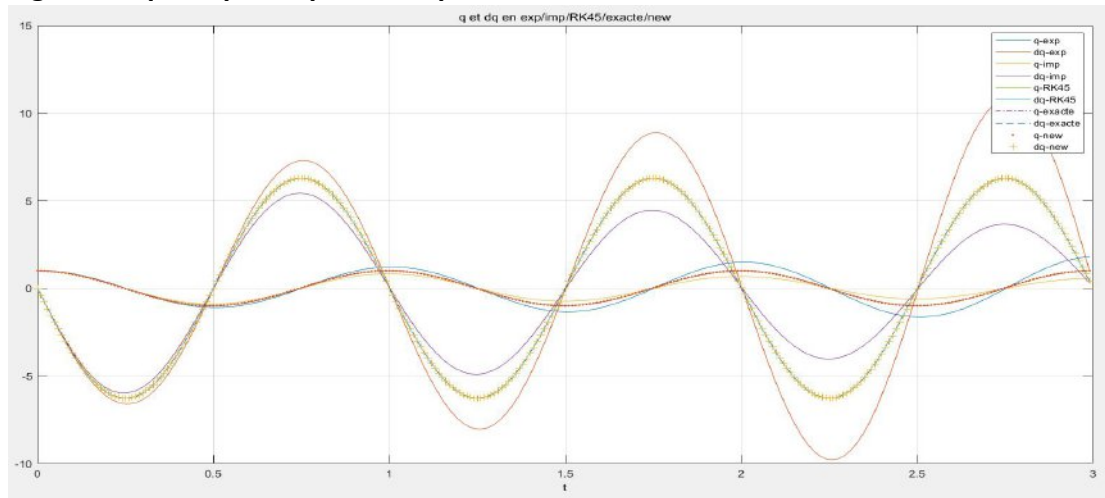
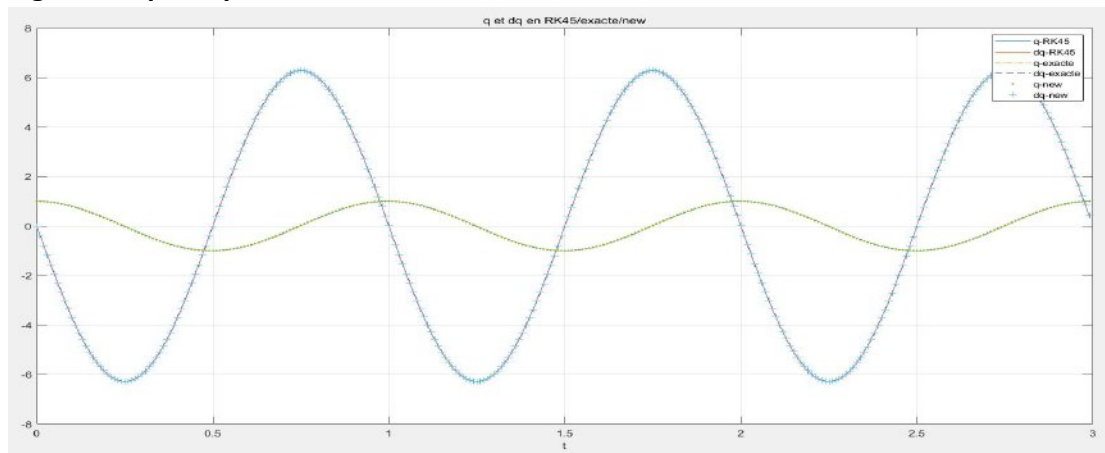


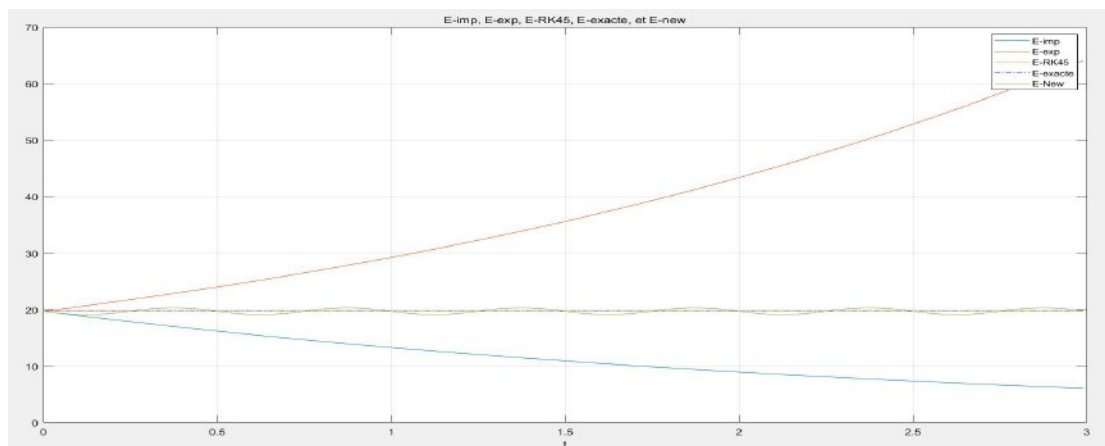
Figure de q et dq en RK45/exacte/newmark



Résumé:

q-new et dq-new coïncident avec q-exacte et dq-exacte respectivement, donc la résolution avec un schéma de NEWMARK  $\gamma = 0.5$   $\beta = 0.25$  est précis.

### 5.1.3



Résumé:

E-new oscille autour de E-exacte, donc il existe aussi une erreur.

### 5.1.4

#### Programme:

```
%% Matrice A
dt=0:0.001:1;
for i=1:length(dt)
Bnew{1,i}=[1+beta*(dt(i))^2*w0^2 , 0 ;
gamma*dt(i)*w0^2 , 1];
Cnew{1,i}=[1-(0.5-beta)*(dt(i))^2*w0^2 , dt(i) ;
-(1-gamma)*dt(i)*w0^2 , 1];
Anew{1,i}=Cnew{1,i}/Bnew{1,i};
E{1,i}=eig(Anew{1,i});
vp1_module(1,i)=norm(E{1,i}(1,1));
vp1_reelle(1,i)=real(E{1,i}(1,1));
vp1_imaginaire(1,i)=imag(E{1,i}(1,1));
vp2_module(1,i)=norm(E{1,i}(2,1));
vp2_reelle(1,i)=real(E{1,i}(2,1));
vp2_imaginaire(1,i)=imag(E{1,i}(2,1));
end
```

Figure de valeur propre de q (le module, la partie réelle, la partie imaginaire)

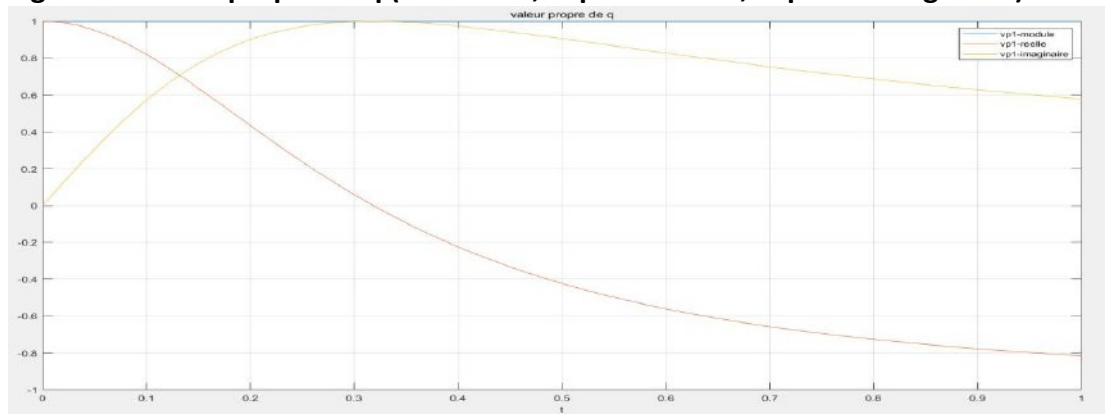
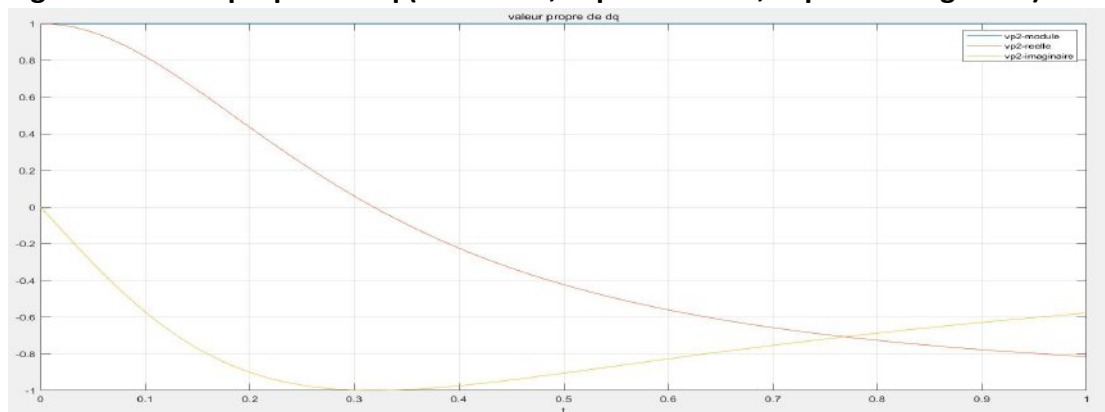


Figure de valeur propre de dq (le module, la partie réelle, la partie imaginaire)



#### Résumé:

Les modules des valeurs propres de la matrice d'amplification pour des valeurs de  $\Delta t$  comprises entre 0s et 1s sont inférieure à 1, donc il est stable du schéma de NEWMARK en cette condition.



## Ex5.2 Résolution avec un schéma de NEWMARK $\gamma = 0.5 \beta = 0$

### 5.2.1

#### Programme:

```
clc
clear all
close all

%% Condition initiale
w0=2*pi;
q0=1;
Dq0=0;
T0=3;
% dt=0.01;
% dt=0.2;
dt=0.5;
% changer le pas de temps

a=0;
b=3;% T0=3s

%% Calcul de q en Newmark 1 (gamma=0.5 beta=0.25)
gamma1=0.5;
beta1=0.25;
U_New1(1,1)=q0;
U_New1(2,1)=Dq0;
E_New1(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
n=(b-a)/dt;
B=[1+beta1*dt^2*w0^2 , 0 ; gamma1*dt*w0^2 , 1];
C=[1-(0.5-beta1)*dt^2*w0^2 , dt ; -(1-gamma1)*dt*w0^2 , 1];
A1=C/B;
for i=2:n+1
    U_New1(:,i)=A1*U_New1(:,i-1);

E_New1(1,i)=1/2*((U_New1(2,i))^2+w0^2*(U_New1(1,i))^2)
;
end

%% Calcul de q en Newmark 2 (gamma=0.5 beta=0)
gamma2=0.5;
beta2=0;
U_New2(1,1)=q0;
U_New2(2,1)=Dq0;
E_New2(1,1)=1/2*(Dq0^2+w0^2*q0^2);
```

```

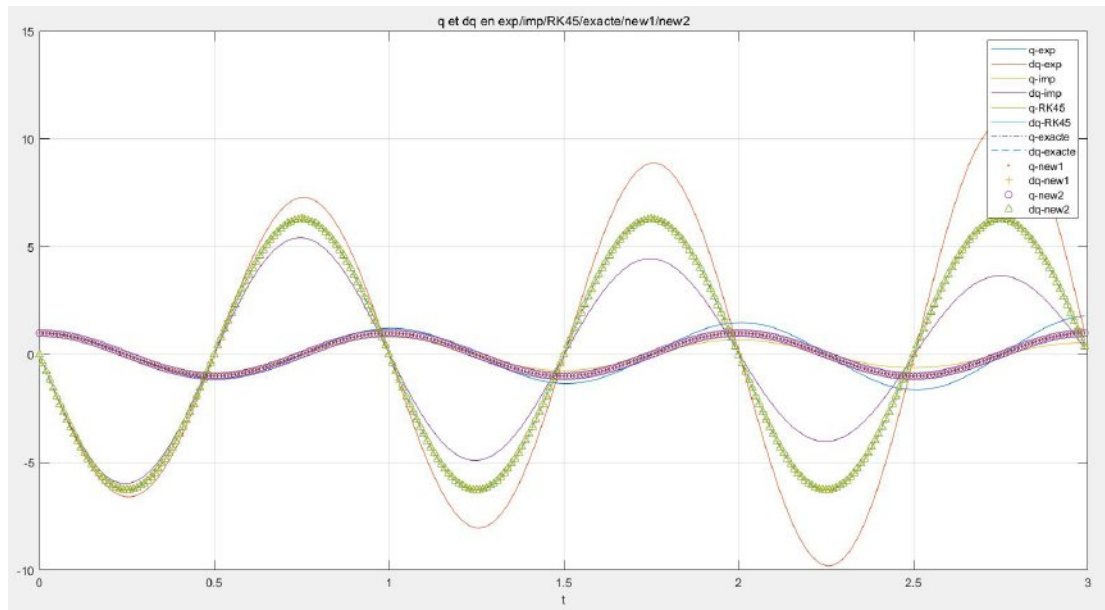
n=(b-a)/dt;
A2=[1-(w0*dt)^2/2 , dt ; (-dt*w0^2/2)*(2-(w0*dt)^2/2) ,
1-(w0*dt)^2/2];
for i=2:n+1
    U_New2(:,i)=A2*U_New2(:,i-1);

E_New2(1,i)=1/2*((U_New2(2,i))^2+w0^2*(U_New2(1,i))^2)
;
end

```

### 5.2.2

Figure de q et dq en explicite/implicite/RK45/exacte/newmark1/newmark2

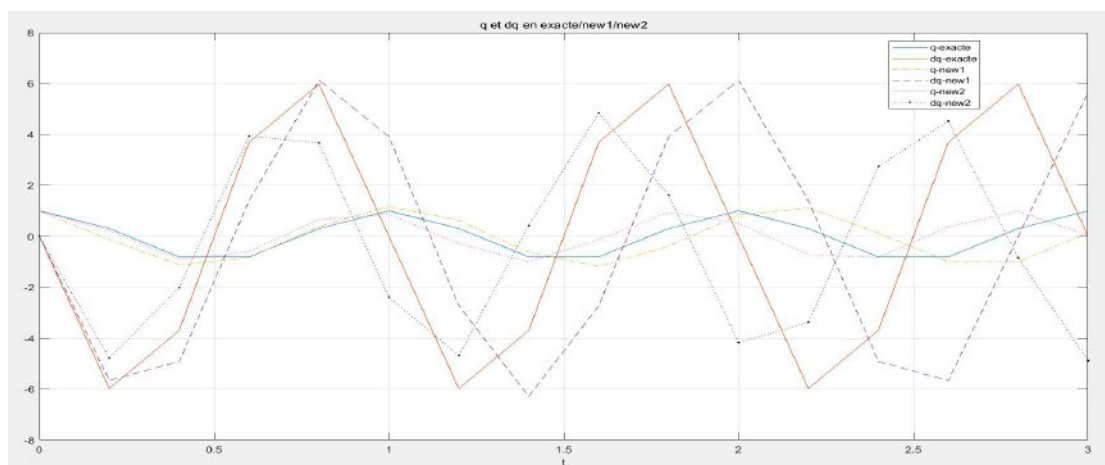


#### Résumé:

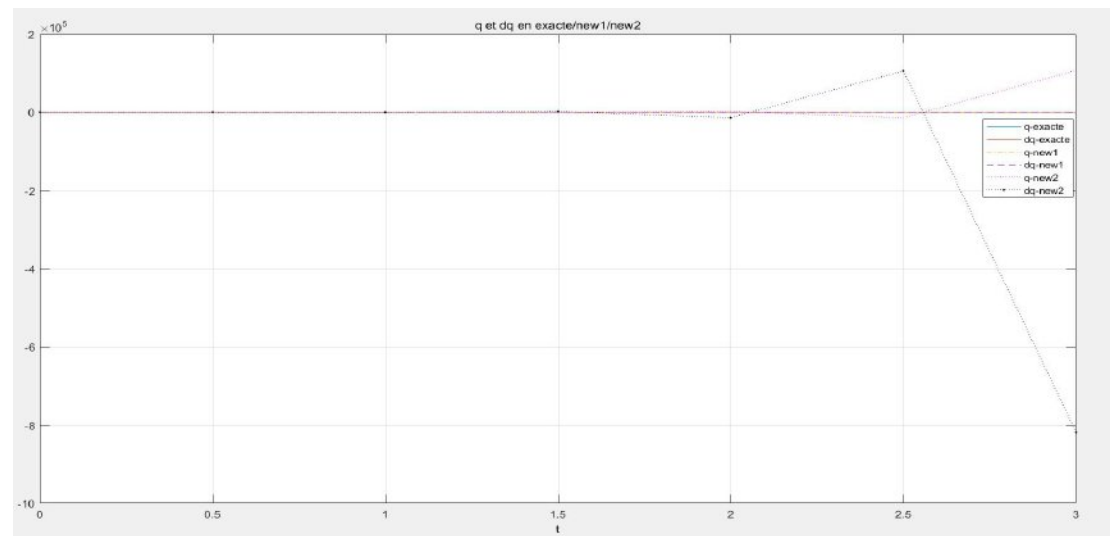
**q-new2 et dq-new2 coïncident avec q-exacte et dq-exacte respectivement, donc la résolution avec un schéma de NEWMARK  $\gamma = 0.5 \beta = 0$  est précis.**

### 5.2.3

Quand dt=0.2



## Quand dt=0.5



### Résumé:

**Plus dt est grand, plus l'erreur est grande, donc la résolution avec un schéma de NEWMARK est précis si dt est petit.**

### 5.2.4

#### Programme:

```
%% Matrice A
dt=0:0.001:1;
for i=1:length(dt)
    Bnew{1,i}=[1+beta2*(dt(i))^2*w0^2 , 0 ;
    gamma2*dt(i)*w0^2 , 1];
    Cnew{1,i}=[1-(0.5-beta2)*(dt(i))^2*w0^2 , dt(i) ;
    -(1-gamma2)*dt(i)*w0^2 , 1];
    Anew{1,i}=Cnew{1,i}/Bnew{1,i};
    E{1,i}=eig(Anew{1,i});
    vp1_module(1,i)=norm(E{1,i}(1,1));
    vp1_reelle(1,i)=real(E{1,i}(1,1));
    vp1_imaginaire(1,i)=imag(E{1,i}(1,1));
    vp2_module(1,i)=norm(E{1,i}(2,1));
    vp2_reelle(1,i)=real(E{1,i}(2,1));
    vp2_imaginaire(1,i)=imag(E{1,i}(2,1));
end

figure
plot(dt,vp1_module)
hold on
plot(dt,vp1_reelle)
hold on
plot(dt,vp1_imaginaire)
grid on
```

```

legend('vp1-module', 'vp1-reelle', 'vp1-imaginaire');
title('valeur propre de q');
xlabel('t');

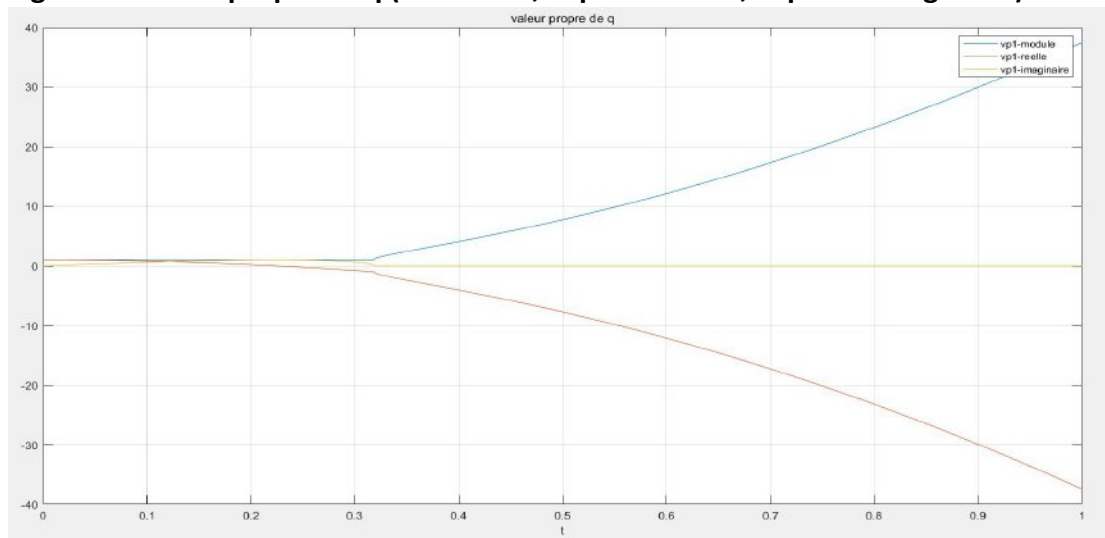
```

```

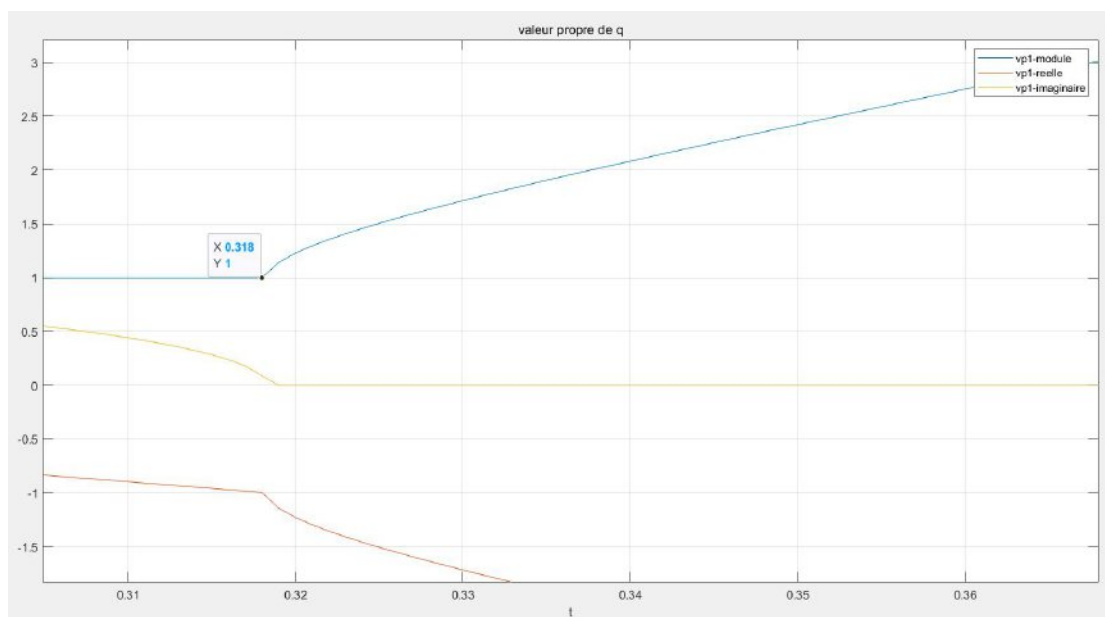
figure
plot(dt, vp2_module)
hold on
plot(dt, vp2_reelle)
hold on
plot(dt, vp2_imaginaire)
grid on
legend('vp2-module', 'vp2-reelle', 'vp2-imaginaire');
title('valeur propre de dq');
xlabel('t');

```

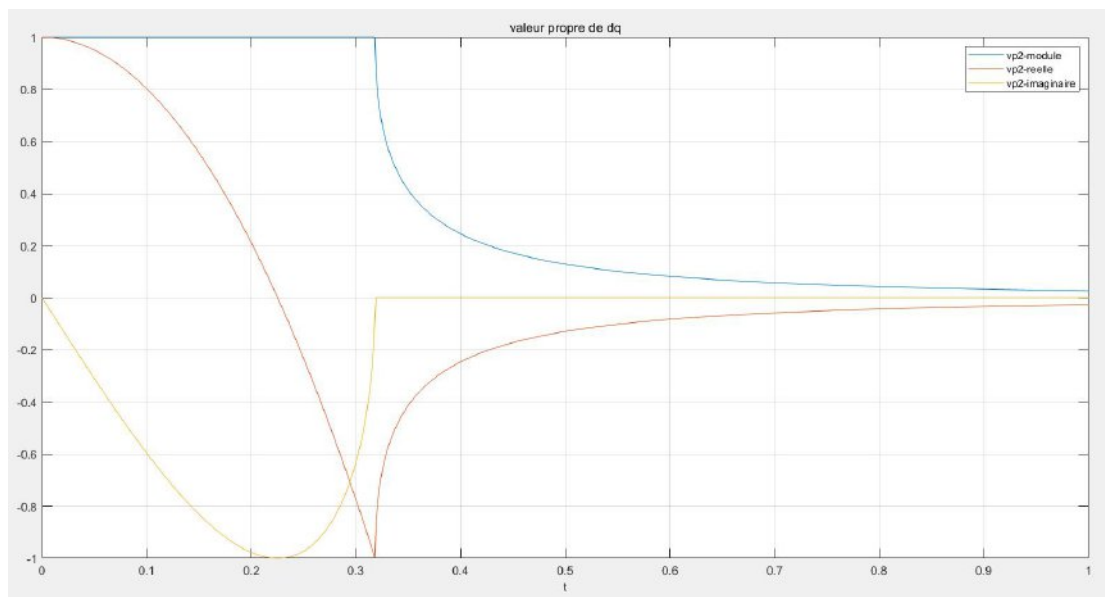
**Figure de valeur propre de q (le module, la partie réelle, la partie imaginaire)**



**Zoom**



**Figure de valeur propre de dq (le module, la partie réelle, la partie imaginaire)**



**Résumé:**

**Quand  $dt < 0.318$ , les modules des valeurs propres de la matrice d'amplification sont inférieurs à 1, donc il est stable du schéma de NEWMARK en cette condition.**

**Quand  $dt > 0.318$ , le module de valeur propre de q est supérieur à 1, donc il est instable.**

**Ainsi, on peut obtenir le pas de temps critique,  $0.318 = 1/\pi$ ,  $dt = 2a/w_0$ , avec  $w_0 = 2 \cdot \pi$ , donc le coefficient  $a = 1$ .**