

DM 4 de mécanique numérique

Numéro d'étudiant: SY1924142

Nom : Tom ZHU

Etude d'un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté

1. Résolution avec un schéma d'EULER explicite

D'après le schéma d'Euler explicite, on sait que :

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t * \dot{q}_j$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t * \ddot{q}_j$$

D'après l'équation(21), on a une équation ici :

$$\ddot{q}_j = -2\varepsilon w_0 \dot{q}_j - w_0^2 q_j$$

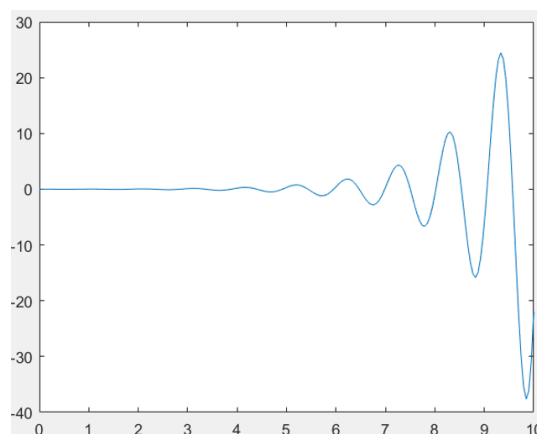
$$w_0 = 2\pi, \varepsilon = 0.02$$

On a aussi des conditions initiales :

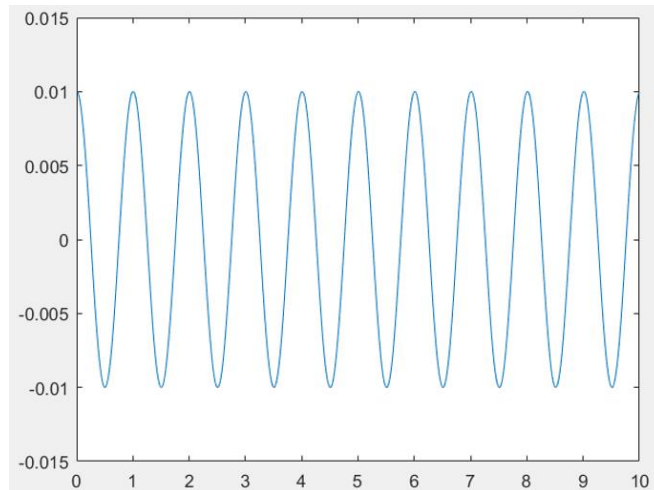
$q_0 = 0.01, \dot{q}_0 = 0$, l'intervalle de notre problème est limité à $[0,10]$.

```
T=1; wo=2*pi/T; epsilon=0.02; n=3000;
delta_t=10*T/n;
qj=zeros(n,1);
qj(1,1)=0.01;
qj1=zeros(n,1);
qj1(1,1)=0;
ti=linspace(0,10*T,n);
point=linspace(1,n,n);
for i=1:n-1
    qj(i+1)=qj(i)+delta_t*qj1(i);
    qj1(i+1)=qj1(i)+delta_t*(-wo^2)*qj(i)-2*delta_t*epsilon*wo*qj1(i);
end
plot(ti,qj);
```

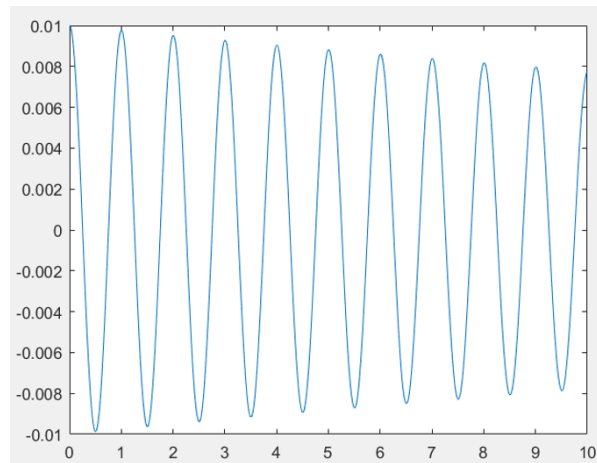
a) Si on choisit $\frac{2\varepsilon}{w_0} < \Delta t$, on met $\Delta t > 0.0064, \Delta t = 0.01, n = \frac{10}{0.01} = 1000$: il diverge



b) Si on choisit $\frac{2\varepsilon}{w_0} = \Delta t$, il présente un mouvement harmonique autour de 0.



c) Si on choisit $0.8 * \frac{2\varepsilon}{w_0} = \Delta t$, il s'affaiblit et tend vers 0



d) - Il déplace autour de 0 et converge vers 0.

$$- \Delta t < \frac{2\varepsilon}{w_0}$$

2. Résolution avec un schéma d'EULER implicite

On a les équations ici :

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t * [\dot{q}_j + \Delta t * q_{j+1}(-w_0^2) - 2\varepsilon w_0 \dot{q}_{j+1} * \Delta t]$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t * \ddot{q}_{j+1}$$

$$\ddot{q}_{j+1} = -2\varepsilon w_0 \dot{q}_{j+1} - w_0^2 q_{j+1}$$

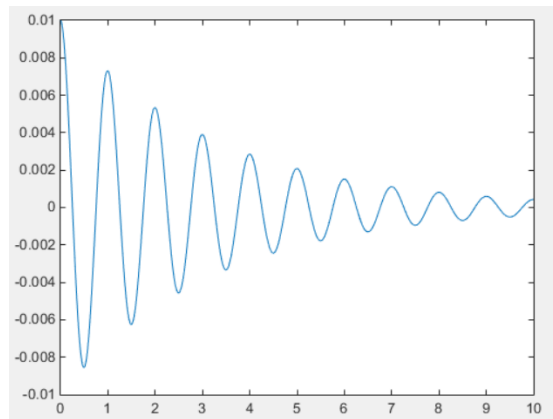
```
T=1;wo=2*pi/T;epsilon=0.02;
% n=1000;
% delta_t=10*T/n;
delta_t=0.1*2*epsilon/wo;
n=floor(10*T/delta_t);
qj=ones(n,1);
qj(1,1)=0.01;
qj1=ones(n,1);
qj1(1,1)=0;
```

```

ti=linspace(0,10*T,n);
for i=1:n-1

qj(i+1)=(delta_t*qj1(i)+qj(i))/(1+(delta_t^2)*(wo^2)+2*epsilon*wo*delta_t/(1+2*epsilon*wo*delta_t));
    qj1(i+1)=(qj1(i)-(wo^2)*delta_t*qj(i+1))/(1+2*epsilon*wo*delta_t);
end
plot(ti,qj);

```



-On peut voir qu'il est stable et tend vers 0.

-On peut choisir $0.5 * \frac{2\epsilon}{w_0} = \Delta t$.

3. Résolution avec un schéma de RUNGE KUTTA

$$\Delta t = h * \frac{2\sqrt{2}}{w_0}$$

```

%runge.m :
T=1;
wo=2*pi/T;
epsilon=0.02;
h=0.04;
delta_t=h*2*sqrt(2)/wo;
n=floor(100*T/delta_t);
x0=0.01;
x01=0;
ti=linspace(0,100*T,n);
fp=runge_function(x0,x01,delta_t,100*T,wo,epsilon);
plot(ti,fp);

```

```

%runge_function.m:
function fp=runge_function(x0,x01,t,T,wo,epsilon)
n=floor(T/t);
x=x0;
x1=x01;
h=t;
fp=zeros(n,1);
fp(1,1)=x;
for i=1:n
k1=func_x1(x,x1,wo,epsilon);
l1=func_x(x,x1);

k2=func_x1(x+l1*h/2, x1+k1*h/2,wo,epsilon);
l2=func_x(x+l1*h/2, x1+k1*h/2);

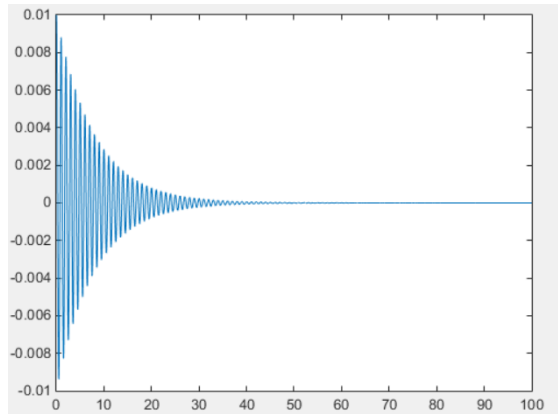
k3=func_x1(x+l2*h/2, x1+k2*h/2,wo,epsilon);
l3=func_x(x+l2*h/2, x1+k2*h/2);

k4=func_x1(x+l3*h, x1+k3*h,wo,epsilon);
l4=func_x(x+l3*h, x1+k3*h);

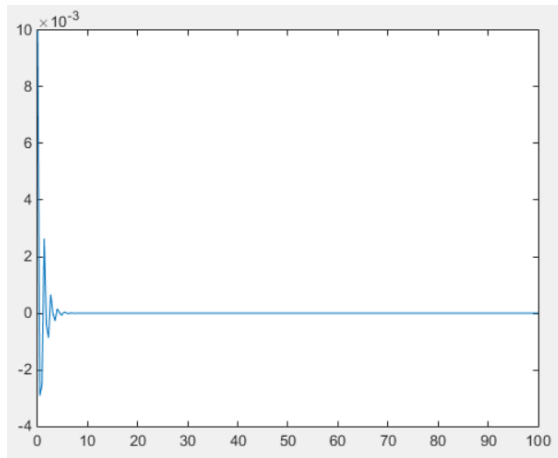
x1=x1+(k1+2*k2+2*k3+k4)*h/6;
x=x+(l1+2*l2+2*l3+l4)*h/6;
if(i<n)
fp(i+1)=x;
end
end
end
function x=func_x(x,x1)
x=x1;
end
function x1=func_x1(x,x1,wo,epsilon)
x1=-wo^2*x-2*epsilon*wo*x1;
end

```

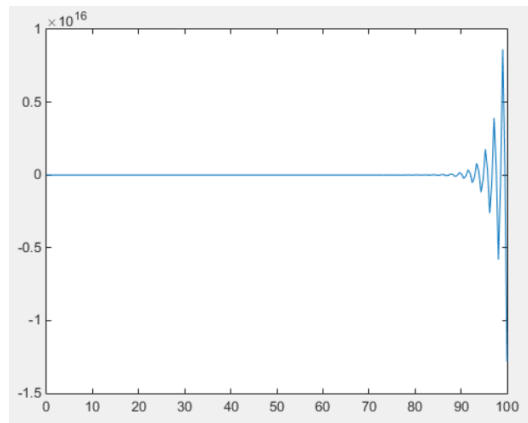
a) $h=0.04$



$h=0.96$



$h=1.04$



Conclusion :

1. Plus h est petit , plus d'oscillation.
2. Si h est inférieur à 1, le système est précis et stable.
3. Si h est supérieur à 1, le système diverge.

b) Par la méthode dichotomique, on obtient $h_{\min}=0.96$, $h_{\max}=0.9601$.

Etude d'un double pendule avec l'hypothèse des petits mouvements

1. Résolution avec schéma de NEWMARK explicite

On a

$$\beta = 0; \gamma = \frac{1}{2};$$

D'après cela, on peut simplifier l'équation (2) et (3) :

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t * \dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{2} * \ddot{q}_n$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} * \ddot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{n+1}$$

Selon l'équation(1), on obtient :

$$M\ddot{q}_n + Kq_n = F_0 \sin \omega t \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$M = ma^2 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = mga * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

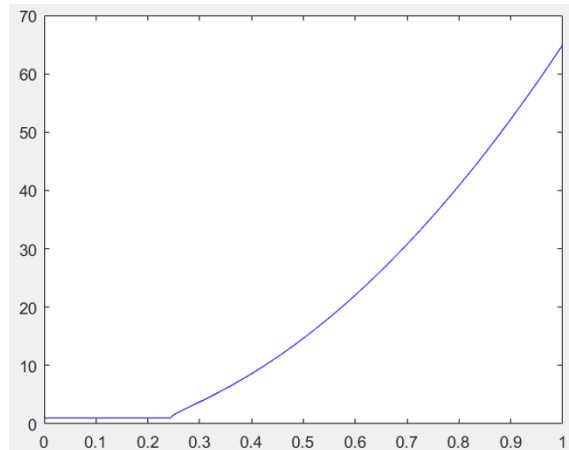
Et on doit faire la discrétisation sur $F_0 \sin \omega t \rightarrow F_0 \sin(\omega n \Delta t)$.

1.1)

$$A = \begin{pmatrix} Id_2 - \frac{\Delta t^2}{2} M^{-1} K & \Delta t \\ \frac{\Delta t^3}{4} M^{-1} K M^{-1} K - \Delta t M^{-1} K & Id_2 - \frac{\Delta t^2}{2} M^{-1} K \end{pmatrix}$$

1.2) Dans l'intervalle [0,1], on cherche la valeur propre la plus grande :

```
A=[eye(2)-((delta_t^2)/2).*inv(M)*K,delta_t.*eye(2);
((delta_t^3)/4).*inv(M)*K*inv(M)*K-delta_t.*inv(M)*K,eye(2)-
((delta_t^2)/2).*inv(M)*K];
eig_max=[];
for delta_t=0:0.001:1;
    eig_max=[eig_max,max(abs(eig(eval(A))))];
end
t=0:0.001:1;
plot(t, eig_max,'b');
```



Le temps critique est environs 0.245s.

1.3) $M\ddot{q}_0 + Kq_0 = 0$

1.4) On résume les relations ici :

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t * \dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{2} * \ddot{q}_n$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} * \ddot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{n+1}$$

$$M\ddot{q}_n + Kq_n = F_0 \sin(wn\Delta t) \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$M\ddot{q}_{n+1} + Kq_{n+1} = F_0 \sin\{w(n + 1)\Delta t\} \frac{a}{\sqrt{2}}$$

1.5)

```
dt=0.04;
n=floor(T0/dt);
nn=[1:n];
ti=dt.*nn;
vec=[a;a/sqrt(2)];
qj=zeros(2,n);
qj(:,1)=[theta10;theta20];
qj1=zeros(2,n);
qj1(:,1)=[theta10_derive;theta20_derive];
qj12=zeros(2,n);
for i=1:n-1
    qj12(:,i)=-inv(M)*K*qj(:,i)+(F0*sin(w*i*dt)).*inv(M)*vec;
    qj(:,i+1)=qj(:,i)+dt.*qj1(:,i)+((dt^2)/2).*qj12(:,i);
    qj12(:,i+1)=-inv(M)*K*qj(:,i+1)+(F0*sin(w*(i+1)*dt)).*inv(M)*vec;
    qj1(:,i+1)=qj1(:,i)+(dt/2).*qj12(:,i)+(dt/2).*qj12(:,i+1);
end
plot(ti,qj);
```

1.6)

c	0	Δt	$2\Delta t$	0.5
q	0	-0.0370	-0.0730	0.0278
\dot{q}	-1.8600	-1.8247	-1.7610	1.7209
\ddot{q}	1.0383	2.4854	3.8885	-1.3582

2. Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite

$$\beta = 0.25$$

$$\gamma = 0.5$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t * \dot{q}_n + 0.25 * \Delta t^2 \ddot{q}_n + 0.25 * \Delta t^2 \ddot{q}_{n+1}$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + 0.5 * \Delta t \ddot{q}_n + 0.5 * \Delta t \ddot{q}_{n+1}$$

2.1) la matrice d'amplification A est une matrice 2*2

$$A(1,1) = \text{inv}(1 + 0.25\Delta t^2 M^{-1}K) * (1 - 0.25\Delta t^2 M^{-1}K)$$

$$A(1,2) = \text{inv}(1 + 0.25\Delta t^2 M^{-1}K) * \Delta t$$

$$A(2,1) = -0.5\Delta t M^{-1}K * (1 + \text{inv}(1 + 0.25\Delta t^2 M^{-1}K) * (1 - 0.25\Delta t^2 M^{-1}K))$$

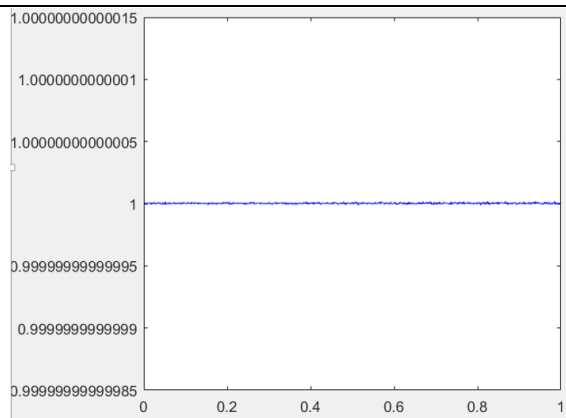
$$A(2,2) = 1 - 0.5\Delta t^2 M^{-1}K * \text{inv}(1 + 0.25\Delta t^2 M^{-1}K)$$

2.2)

```

for delta_t=0:0.001:1;
    eig_max=[eig_max,max(abs(eig(eval(A))))];
end
t=0:0.001:1;
plot(t, eig_max,'b');

```



On peut voir qu'il est toujours 1.

$$2.3) M\ddot{q}_0 + Kq_0 = 0$$

2.4)

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t * \dot{q}_n + 0.25 * \Delta t^2 \ddot{q}_n + 0.25 * \Delta t^2 \ddot{q}_{n+1}$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + 0.5 * \Delta t \ddot{q}_n + 0.5 * \Delta t \ddot{q}_{n+1}$$

$$M\ddot{q}_n + Kq_n = F_0 \sin(wn\Delta t) \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{(resp. } M\ddot{q}_{n+1} + Kq_{n+1} = F_0 \sin\{w(n+1)\Delta t\} \frac{a}{\sqrt{2}})$$

2.5)


```

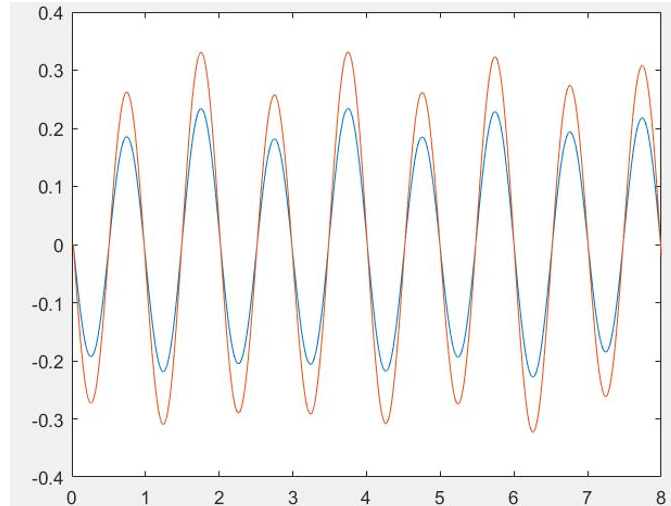
clear all
m=2; a=0.5; g=9.81; F0=20; w=2*pi; theta10=0; theta20=0;
theta10_derive=-1.31519275;
theta20_derive=-1.85996342 ;
T0=8;
M=(m*a^2).*[2,1;1,1];
K=(m*g*a).*[2,0;0,1];
eig_max=[];
syms delta_t
A=[inv(eye(2)+(0.25*delta_t^2).*inv(M)*K)*(eye(2)-
(0.25*(delta_t^2)).*inv(M)*K),delta_t.*inv(eye(2)+(0.25*delta_t^2).*inv(M)*K);
(-0.5*delta_t).*inv(M)*K*(eye(2)+inv(eye(2)+(0.25*delta_t^2).*inv(M)*K)*(eye(2)-
(0.25*delta_t^2).*inv(M)*K)),eye(2)-
(0.5*delta_t^2).*inv(M)*K*inv(eye(2)+(0.25*delta_t^2).*inv(M)*K)];
dt=0.02;
n=floor(T0/dt);
nn=[1:n];
ti=dt.*nn;
vec=[a;a/sqrt(2)];
qj=zeros(2,n);
qj(:,1)=[theta10;theta20];
qj_derive=zeros(2,n);
qj_derive(:,1)=[theta10_derive;theta20_derive];
qj_derive2=zeros(2,n);
for i=1:n-1
%   qj_derive2(:,i)=-inv(M)*K*qj(:,i)+(F0*sin(w*i*dt)).*inv(M)*vec;
%   qj(:,i+1)=qj(:,i)+dt.*qj_derive(:,i)+((dt^2)/2).*qj_derive2(:,i);
%   qj_derive2(:,i+1)=-inv(M)*K*qj(:,i+1)+(F0*sin(w*(i+1)*dt)).*inv(M)*vec;
%   qj_derive(:,i+1)=qj_derive(:,i)+(dt/2).*qj_derive2(:,i)+(dt/2).*qj_derive2(:,i+1);
%   qj_derive2(:,i)=-inv(M)*K*qj(:,i)+(F0*sin(w*i*dt)).*inv(M)*vec;

qj(:,i+1)=inv(eye(2)+(0.25*dt^2).*inv(M)*K)*(qj(:,i)+dt.*qj_derive(:,i)+(0.25*(dt^2)).*qj_derive2(:,i)+(0.25*(dt^2)*F0*sin(w*(i+1)*dt)).*inv(M)*vec);
qj_derive2(:,i+1)=-inv(M)*K*qj(:,i+1)+(F0*sin(w*(i+1)*dt)).*inv(M)*vec;
qj_derive(:,i+1)=qj_derive(:,i)+(dt/2).*qj_derive2(:,i)+(dt/2).*qj_derive2(:,i+1);
end
plot(ti,qj);

```

2.6)

	0	Δt	$2\Delta t$	0.5
q	0	-0.0368	-0.0727	0.0268
\dot{q}	-1.8600	-1.8247	-1.7611	1.7189
\ddot{q}	1.0383	2.4837	3.8853	-1.3465



Oscillateur non linéaire à une degré de liberté

1. Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite :

1.1) Quand $\gamma = 0.5$ et $\beta = 0$; les relations(4) et (5) se transforment :

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t * \dot{q}_j + \Delta t^2 * \frac{\ddot{q}_j}{2}$$

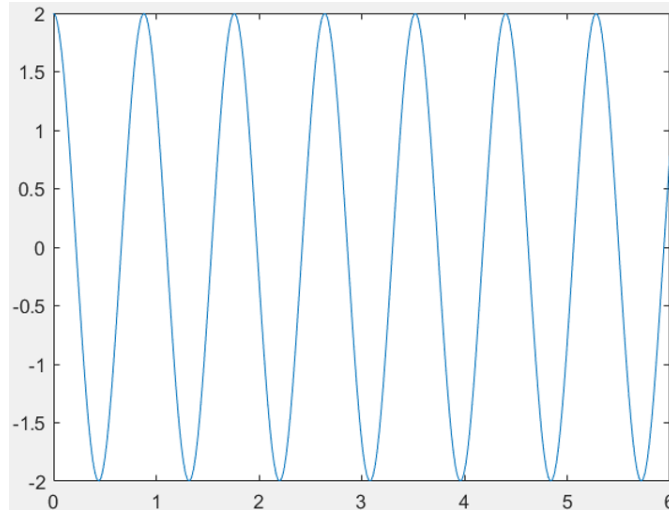
$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t * \frac{\ddot{q}_j}{2} + \Delta t * \frac{\ddot{q}_{j+1}}{2}$$

$$\ddot{q}_{j+1} = -w_0^2 q_{j+1} (1 + a * q_{j+1}^2)$$

Les relations de q_{j+1} , \dot{q}_{j+1} , \ddot{q}_{j+1} sont au-dessus.

1.2)

```
clear all ;
wo=2*pi ; a=0.1; T0=6; T_delta=0.02 ;
n=floor(T0/T_delta) ;
q=zeros(n,1) ;
q1=zeros(n,1) ;
q12=zeros(n,1) ;
q(1,1)=2 ;
q1(1,1)=0 ;
q12(1,1)=-(wo^2)*q(1,1)*(1+a*q(1,1)^2) ;
for i=1 :n-1
    q(i+1,1)=q(i,1)+T_delta*q1(i,1)+(T_delta^2)*q12(i,1)/2;
    q12(i+1,1)=-(wo^2)*q(i+1,1)*(1+a*q(i+1,1)^2);
    q1(i+1,1)=q1(i,1)+T_delta*q12(i,1)/2+T_delta*q12(i+1,1)/2;
end
t=linspace(0,T0,n);
plot(ti,q);
```



1.3)

	0	Δt	$2\Delta t$	T0
q	2	1.9779	1.9123	0.7837

2. Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite :

2.1) On a l'équation du mouvement d'oscillations libre :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 * q * (1 + a * q^2) = 0 ;$$

Pour la solution q_j de l'instant $j * \Delta t$, il faut minimiser la valeur de

$$\ddot{q}_j + \omega_0^2 * q_j * (1 + a * q_j^2) ;$$

2.2) On a les corrections de l'oscillateur non linéaire :

$$\Delta q_{j+1} = \beta * \Delta t^2 * \Delta \ddot{q}_{j+1} \text{ et } \Delta \dot{q}_{j+1} = \gamma * \Delta t * \Delta \ddot{q}_{j+1}$$

Avec $\beta = 0.5$ et $\gamma = 0.25$;

Il faut satisfaire

$$\ddot{q}_j + \omega_0^2 * q_j * (1 + a * q_j^2) = 0 , \text{ c'est-à-dire qu'il y a}$$

$$\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1} + \omega^2 (q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}) (1 + a (q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1})^2) = 0$$

$$\text{Alors on obtient } \ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1} + \omega^2 (q_{j+1}^* + \beta * \Delta t^2 * \Delta \ddot{q}_{j+1}) (1 + a (q_{j+1}^* + \beta * \Delta t^2 * \Delta \ddot{q}_{j+1})^2) = 0$$

Alors, on a

$$\Delta \ddot{q}_{j+1} = \frac{-f(\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1} + \omega^2 (q_{j+1}^* + \beta * \Delta t^2 * \Delta \ddot{q}_{j+1}))}{(\frac{\partial f}{\partial \ddot{q}_{j+1}^*} + \frac{\partial f}{\partial \Delta \ddot{q}_{j+1}} * \beta * \Delta t^2)}$$

$$\text{où } f(\ddot{q}_{j+1}^*, \dot{q}_{j+1}^*, q_{j+1}^*) = \ddot{q}_{j+1}^* + \omega^2 * q_{j+1}^* * (1 + a * q_{j+1}^{*2})$$

$$\Delta \ddot{q}_{j+1} = \frac{-\ddot{q}_{j+1}^* - \omega^2 * q_{j+1}^* * (1 + a * q_{j+1}^{*2})}{(1 + \omega^2 * (1 + 3a q_{j+1}^{*2}) * \beta * \Delta t^2)}$$

2.3)

```
clear all;
wo=2*pi;a=0.1;T0=6;T_delta=0.02;beta=0.5;gamma=0.25;
n=floor(T0/T_delta);
q=zeros(n,1);
q1=zeros(n,1);
q12=zeros(n,1);
Q_delta=zeros(n,1);
```

```

Q_delta1=zeros(n,1);
Q_delta12=zeros(n,1);
q(1,1)=2;
q1(1,1)=0;
q12(1,1)=0;
for i=1:n-1
    q12(i+1,1)=0;
    q1(i+1,1)=q1(i,1)+T_delta*(1-gamma)*q12(i,1);
    q(i+1,1)=q(i,1)+T_delta*q1(i,1)+(T_delta^2)*(0.5-beta)*q12(i,1);
    while (abs(q12(i+1,1)+wo*wo*q(i+1,1)*(1+a*q(i+1,1)^2))>0.01)
        Q_delta12(i+1,1)=(-q12(i+1,1)-
wo*wo*q(i+1,1)*(1+a*q(i+1,1)^2))/(1+wo*wo*(1+3*a*q(i+1,1)^2)*beta*T_delta^2);
        Q_delta1(i+1,1)=gamma*T_delta*Q_delta12(i+1,1);
        Q_delta(i+1,1)=beta*(T_delta^2)*Q_delta12(i+1,1);
        q12(i+1,1)=q12(i+1,1)+Q_delta12(i+1,1);
        q1(i+1,1)=q1(i+1,1)+Q_delta1(i+1,1);
        q(i+1,1)=q(i+1,1)+Q_delta(i+1,1);
    end
end
t=linspace(0,T0,n);
plot(t,q);
q(1,1)
q(2,1)
q(3,1)
q(n,1)

```

2.4)

	0	Δt	$2\Delta t$	T0
q	2	1.9783	1.9462	-1.8076

3. Energie mécanique

1. L'énergie mécanique de l'oscillateur non linéaire est $E=m * \dot{q}^2 / 2$;
2. En NEWMARK explicite :

```

clear all ;
wo=2*pi ;a=0.1 ;T0=6 ;T_delta=0.02 ;m=1 ; %la masse est supposé comme 1kg.
n=floor(T0/T_delta);
q=zeros(n,1) ;
q1=zeros(n,1) ;
q12=zeros(n,1)
q(1,1)=2;
q1(1,1)=0;
q12(1,1)=-wo*wo*q(1,1)*(1+a*q(1,1)^2);
E=zeros(n,1);

```

```

E(1,1)=0;
for i=1:n-1;
    q(i+1,1)=q(i,1)+T_delta*q1(i,1)+T_delta^2*q12(i,1)/2;
    q12(i+1,1)=-wo*wo*q(i+1,1)*(1+a*q(i+1,1)^2);
    q1(i+1,1)=q1(i,1)+T_delta*q12(i,1)/2+T_delta*q12(i+1,1)/2;
    E(i+1,1)=0.5*m*(q1(i+1,1)^2);
End
t=linspace(0,T0,n) ;
plot(t,E) ;

```

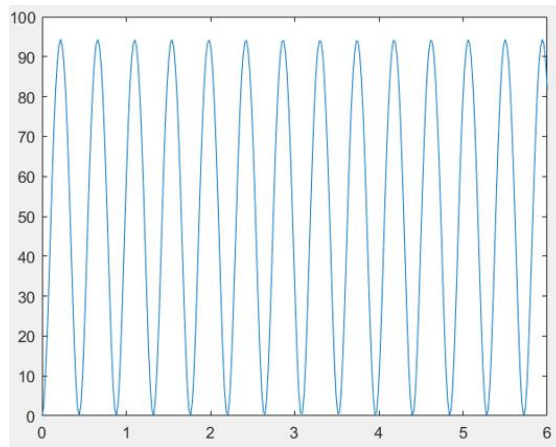
En NEWMARK implicite :

```

clear all;
wo=2*pi ;a=0.1;T0=6;T_delta=0.02 ;beta=0.5 ;gamma=0.25 ;m=1 ; %la masse est suppos é
comme 1kg.
n=floor(T0/T_delta) ;
q=zeros(n,1) ;
q1=zeros(n,1);
q12=zeros(n,1);
Q_delta=zeros(n,1);
Q_delta1=zeros(n,1);
Q_delta12=zeros(n,1);
q(1,1)=2;
q1(1,1)=0;
q12(1,1)=0;
E(1,1)=0;
for i=1:n-1
    q12(i+1,1)=0;
    q1(i+1,1)=q1(i,1)+T_delta*(1-gamma)*q12(i,1);
    q(i+1,1)=q(i,1)+T_delta*q1(i,1)+(T_delta^2)*(0.5-beta)*q12(i,1);
    while (abs(q12(i+1,1)+wo*wo*q(i+1,1)*(1+a*q(i+1,1)^2))>0.01)
        Q_delta12(i+1,1)=(-q12(i+1,1)-
wo*wo*q(i+1,1)*(1+a*q(i+1,1)^2))/(1+wo*wo*(1+3*a*q(i+1,1)^2)*beta*T_delta^2);
        Q_delta1(i+1,1)=gamma*T_delta*Q_delta12(i+1,1);
        Q_delta(i+1,1)=beta*(T_delta^2)*Q_delta12(i+1,1);
        q12(i+1,1)=q12(i+1,1)+Q_delta12(i+1,1);
        q1(i+1,1)=q1(i+1,1)+Q_delta1(i+1,1);
        q(i+1,1)=q(i+1,1)+Q_delta(i+1,1);
    end
    E(i+1,1)=0.5*m*(q1(i+1,1)^2) ;
end
t=linspace(0,T0,n);
plot(t,E);

```

3. La figure d'énergie en NEWMARK explicite est ici:



La figure d'énergie en NEWMARK implicite est ici :

