

Pendule simple

Les équations de Lagrange:

$$L = E_c + E_p = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + mgd \cos \theta + Cte$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q = 0$$

Avec $E_c = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2$ l'énergie cinétique et $E_p = -mgd \cos \theta + Cte$ l'énergie potentielle

Alors l'équation de mouvement pour un pendule simple :

$$I\ddot{\theta} + mgd \sin \theta = 0$$

Dans le cas $\theta \rightarrow 0$, l'équation s'écrit comme :

$$I\ddot{\theta} + mgd\theta = 0$$

Oscillateur conservatif à un degré de liberté

$$1.1 \quad \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Soit

$$q = \exp(\lambda t)$$

Alors pour tout $t > 0$,

$$(\lambda^2 + \omega_0^2) \exp(\lambda t) = 0$$

Nécessairement

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

la solution d'équation caractéristique est

$$\lambda_1 = \omega_0 i, \quad \lambda_2 = -\omega_0 i$$

Et donc

$$q = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

d'après la condition initiale (4)

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 0 = \omega_0 C_2 \end{cases}$$

On obtient alors la solution de l'équation est :

$$q = \cos(2\pi t)$$

Programmer la solution :

```
clear all;
close all;
clc;
T0 = 3;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
q0 = 1;
dq0 = 0;
dte = 0.01
```

```

te = (0:dte:T0) ; % t=0:dte:3;
tic;
ind = 1;
for t= te
q(ind) = q0 * cos(w0 * t) + dq0/w0 * sin(w0 * t) ;
dq(ind) = -w0 * q0 * sin(w0 * t) + dq0 * cos(w0 * t) ;
ddq(ind) = - w0c * q(ind) ;
energe(ind) = 0.5*( dq(ind)* dq(ind) + w0c *(q(ind)^2));
ind = ind+1;
end ; toc;
q= q';
plot(te,q,te, dq,te, ddq, '-r','Linewidth',2)
plot(q,dq,q, ddq, '-r','Linewidth',2)
plot(q,ddq, '-r','Linewidth',2)
plot(te,q, '-r','Linewidth',2)
grid on;

```

1.2

$$E^* = \frac{1}{2}(\dot{q} + \omega_0^2 q^2)$$

Avec

$$q = \cos(2\pi t)$$

$$\dot{q} = -2\pi \sin(2\pi t)$$

D'ou

$$E^* = \frac{1}{2}(4\pi^2 \sin^2(2\pi t) + 4\pi^2 \cos^2(2\pi t)) = 2\pi^2$$

Alors E^* constante

2.1

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Et on a

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ q'_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ q'_j \end{vmatrix} + \Delta t \times \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix}$$

Donc

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t * \dot{q}_j$$

$$q'_{j+1} = q'_j + \Delta t * \ddot{q}_j.$$

Et

$$\ddot{q}_j = -\omega_0^2 * q_j$$

D'ou le resultat.

2.2 Résolution de l'équation (1) avec un schéma d'EULER explicite

méthode 1 : sans la matrice d'amplification

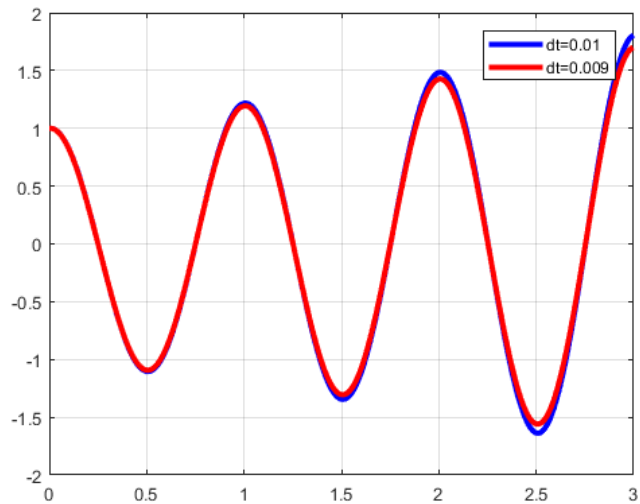
```
clear all
dt1 = 0.01;
T0=3 ;
q0 =1;
dq0=0;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
t1 = (0:dt1:T0)';
np1 = size(t1,1);
q1 = zeros(np1,1);
dq1 = zeros(np1,1);
ddq1 = zeros(np1,1);
energ1 = zeros(np1,1);
q1(1) = q0;
dq1(1) = dq0;
ddq1(1) = -w0c * q1(1);
for inc = 2 : np1;
q1(inc) = q1(inc-1) + dt1 * dq1(inc-1);
dq1(inc) = dq1(inc-1) + dt1 * ddq1(inc-1) ;
ddq1(inc) = -w0c * q1(inc);
end;
energ1 = 0.5*(dq1 .* dq1 + w0c * (q1 .^2));
plot(t1,q1,'b-', 'Linewidth',3);
```

méthode 2 : avec la matrice d'amplification

```
clear all
dt1 = 0.01;
T0=3 ;
q0 =1;
dq0=0;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
t1 = (0:dt1:T0)';
np1 = size(t1,1);
q = [q0;dq0];
q1b = zeros(np1,1) ;
q1b(1) = q0 ;
A = [1 , dt1 ; -w0c * dt1 , 1];
for inc = 2 : np1;
q = A * q ;
q1b(inc) = q(1);
dq1b(inc) = q(2);
```

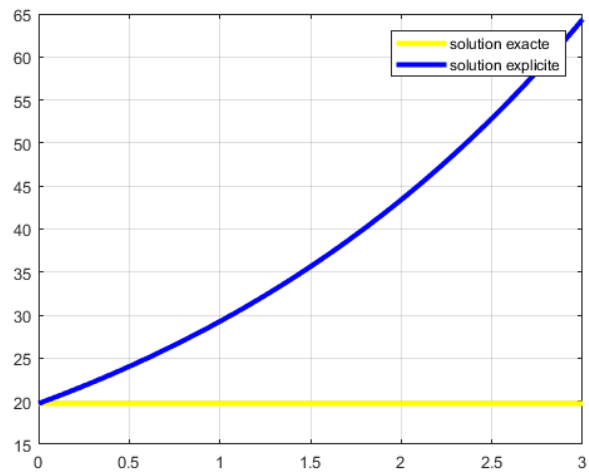
```
end;  
plot(t1,q1b,'b-', 'Linewidth',3)  
plot(dq1b,q1b,'b-', 'Linewidth',3);
```

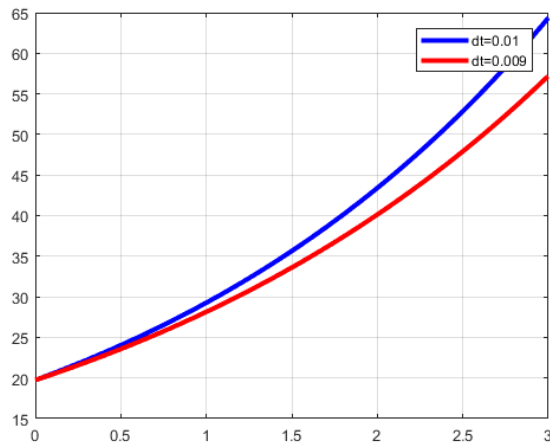
On change le pas de temps,



D'après le figure, on puet voir que les résultats sont divergents. Et plus le pas de temps dt est petit, plus la divergence est lente.

2.4





La quantité E^* résolue par méthode EULER explicite est plus grand que la valeur celle calculée à partir de la solution exacte. Et plus le pas de temps est petit, plus l'erreur est petit.

2.5

On va calculer numériquement les valeurs propres de la matrice d'amplification en fonction du pas de temps Δt

```
dt1= sym('dt1','real'); w0= sym('w0','real');
A = [1 , dt1 ; -1 * w0 * w0 * dt1 , 1]
[z,d]=eig(A)
re = real(d)
im = imag(d)
mo=abs(d)
zm= inv(z);
C= z * (d * zm);
C = simplify(C)
```

Les valeurs propres sont donc :

$$d = \begin{bmatrix} 1 - \omega_0 i \Delta t & 0 \\ 0 & 1 + i \Delta t \end{bmatrix}$$

et donc

$$mo = \begin{bmatrix} |1 - \omega_0 i \Delta t| & 0 \\ 0 & |1 + i \Delta t| \end{bmatrix} \text{ avec } |mo| < 1$$

Donc le caractère inconditionnellement instable du schéma d'EULER explicite est la valeur absolue de minimum de valeur propre est supérieur à 1.

3.1 Résolution de l'équation (1) avec un schéma d'EULER implicite
méthode 1 : sans la matrice d'amplification

```
clear all
dt2 = 0.01;
T0=3 ;
q0 =1;
```

```

dq0=0 ;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
t2 = (0:dt2:T0)';
np2 = size(t2,1);
q2 = zeros(np2,1);
dq2 = zeros(np2,1);
energ2 = zeros(np2,1);
q2(1) = q0;
dq2(1) = dq0;
for inc = 2 : np2
q2(inc) = (q2(inc-1) + dt2 * dq2(inc-1))/(1 + w0c * dt2 * dt2);
ddqc = -w0c * q2(inc);
dq2(inc) = dq2(inc-1) + dt2 * ddqc;
end
energ2 = 0.5*(dq2 .* dq2 + w0c * (q2.^2));
plot(t2,q2,'b-','Linewidth',3)
grid on

```

méthode 2 : avec la matrice d'amplification

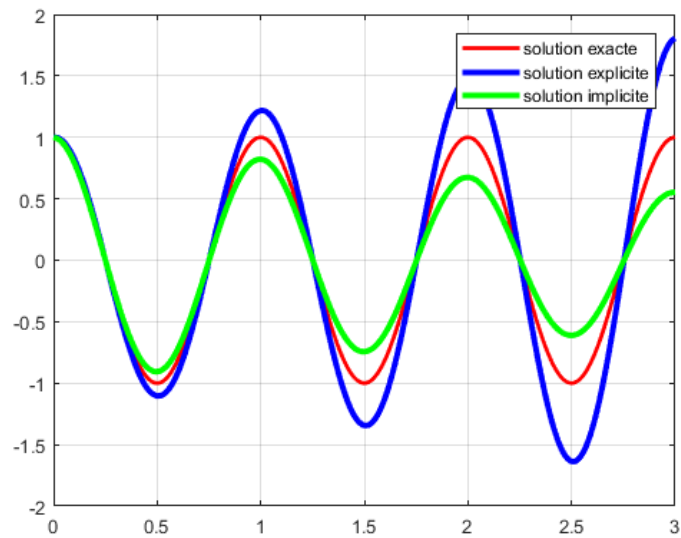
```

clear all
dt2 = 0.01;
T0=3 ;
q0 =1;
dq0=0 ;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
t2 = (0:dt2:T0)';
np2 = size(t2,1);
q = [q0;dq0];
q2b = zeros(np2,1);
dq2b = zeros(np2,1);
q2b(1) = q0;
dq2b(1) = dq0;
A = [1 , dt2 ; -w0c * dt2 , 1];
A = A / (1 + w0c * dt2 * dt2);
for inc = 2 : np2
q = A * q;
q2b(inc) = q(1);
dq2b(inc) = q(2);
end;
energ2m = 0.5*(dq2b .* dq2b + w0c * (q2b .^2));
plot(t2,q2b,'b-','Linewidth',3)

```

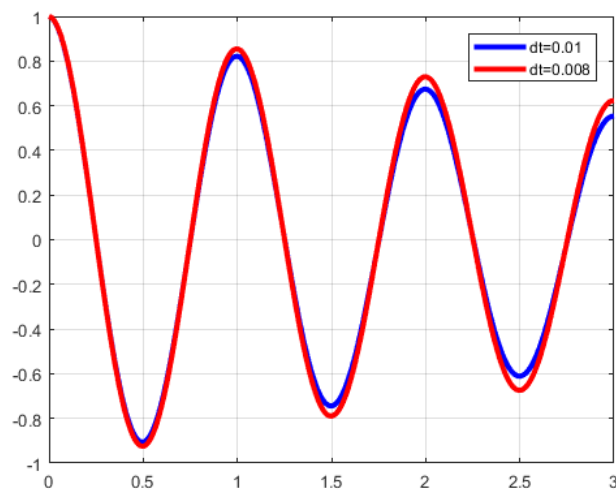
3.2

En prenant le pas de temps $dt=0.01s$, les valeurs de q obtenues par les trois méthodes sont comme la suite :



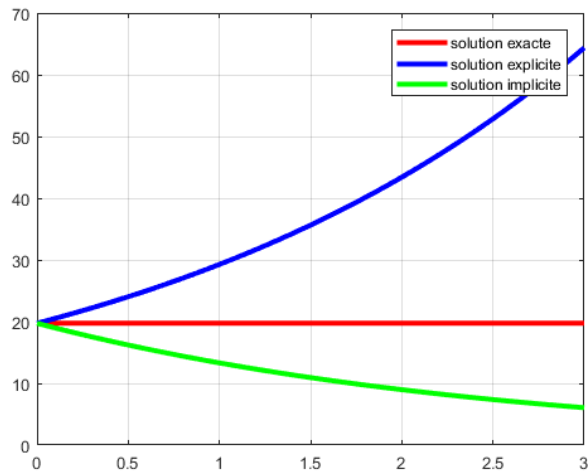
3.3

On peut obtenir le résultat que plus le pas de dt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

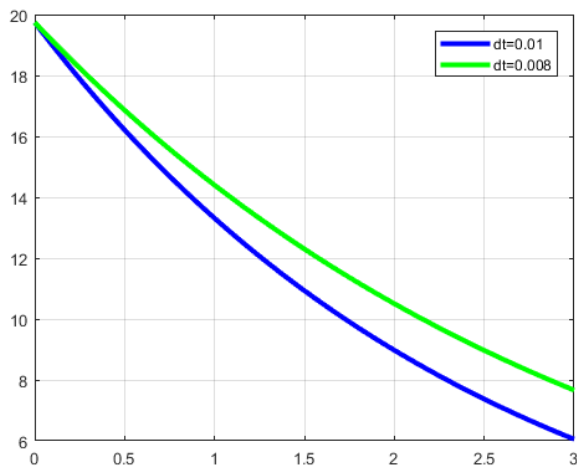


3.4

On peut trouver que La quantité E^* par méthode EULER implicite est plus petit que la valeur exacte et La quantité E^* associée par méthode EULER est plus grand.



Selon la figure de changement de la quantité de E^* , on peut obtenir que plus le pas de temps est petit, plus la vitesse d'augmentation est petite.



3.5

En déterminant numériquement les valeurs propres de la matrice d'amplification en fonction du pas de temps Δt du schéma d'EULER implicite.

```
close all;
clc;
dt1= sym('dt1','real');
w0= sym('w0','real');
A = [1 , -dt1 , 0 ; 0 , 1 , -dt1; w0 * w0, 0 , 1];
B = [1 , 0 , 0 ; 0 , 1, 0; 0 , 0 , 0];
C= A\B;
[z,d] = eig(C);
simplify(d);
mo=abs(d);
eval(mo);
```

les valeurs propres sont donc:

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{\Delta t \omega_0 + i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t \omega_0 i + 1} \end{bmatrix}$$

et donc

$$m_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|\Delta t \omega_0 + i|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{|\Delta t \omega_0 i + 1|} \end{bmatrix} \text{ avec } |m_o| < 1$$

Le caractère inconditionnellement stable ssi la valeur absolue de minimum de valeur propre est supérieure à 1.

4.1

Résolution de l'équation avec un schéma de RUNGE KUTTA

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

En posant

$$\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = \dot{q} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 \end{cases}$$

D'ou

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

4.2

On programme la résolution de l'équation du mouvement à l'aide d'un schéma de RUNGE KUTTA.

```
clear all
clc;
T0=3;
q0=1;
dq0=0;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
dt3 = 0.01;
t3 = (0:dt3:T0)';
np3 = size(t3,1);
q3 = zeros(np3,1);
dq3 = zeros(np3,1);
energ3 = zeros(np3,1);
q3(1) = q0;
dq3(1) = dq0;
qj = [q0 ; dq0];
```

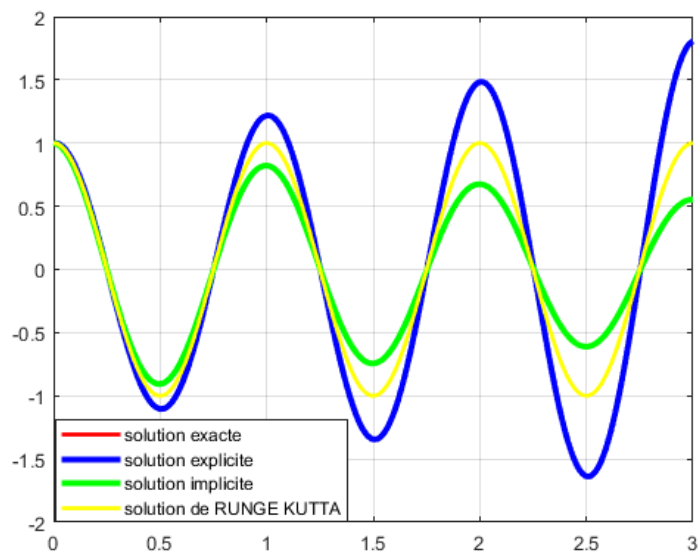
```

C = [0 1; -w0c 0];
for inc = 2 : np3
k1 = C*qj;
k2 = C*(qj+k1*dt3/2);
k3 = C*(qj+k2*dt3/2);
k4 = C*(qj+k3*dt3);
K = (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
qj = qj + K * dt3;
q3(inc) = qj(1);
dq3(inc) = qj(2);
end
energ3 = 0.5*(dq3 .* dq3 + w0c * (q3.^2));
plot(t3,q3, '-r','Linewidth',2)
plot(t3,energ3,'r-', 'Linewidth',3)

```

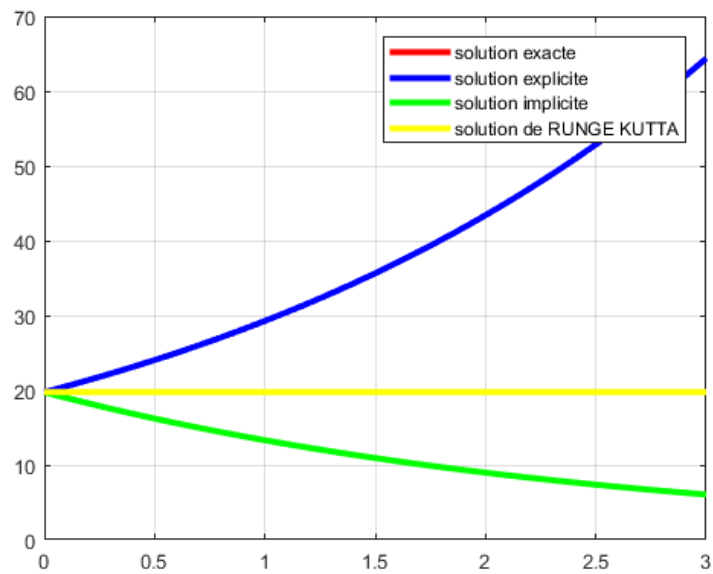
4.3

On peut trouver que la valeur de methode schéma d'EULER explicite est plus grande que celle exacte et la valeur de methode schéma d'EULER implicite est plus petite et elle est divergente. Mais la valeur de methode schéma de RUNGE KUTTA est presque la même que celle exacte.



4.4

On peut trouver que la solution du schéma de RUNGE KUTTA a la même de quantité avec la solution exacte, mais la solution d'un schéma d'EULER explicite et d'un schéma d'EULER implicite sont pas précises.



Étude d'un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté

1.1

Résolution avec un schéma d'EULER explicite

```

w=2*pi;
e=0.02;
woc=w*(1-e^2)^(0.5);
dt=2*e/w;
T0=1;
x=0.01;
xd=0;
A1=[1 dt;-w^2*dt 1-2*e*w*dt];
U=[x;xd];
Y1=[];
for j=1:(10*T0/dt)
Y1(j)=U(1);
U=A1*U;
end;
abs(eig(A1))
J=linspace(0,10*T0,10*T0/dt);
Y0=(exp(-e*w*J)).*(x*cos(woc*J)+(e*w*x+xd)*(sin(woc*J))/woc);
dt2=1.5*dt;
dt3=0.05*dt;
A2=[1 dt2;-w^2*dt2 1-2*e*w*dt2];
U=[x;xd];
Y2=[];
for j=1:(10*T0/dt2)

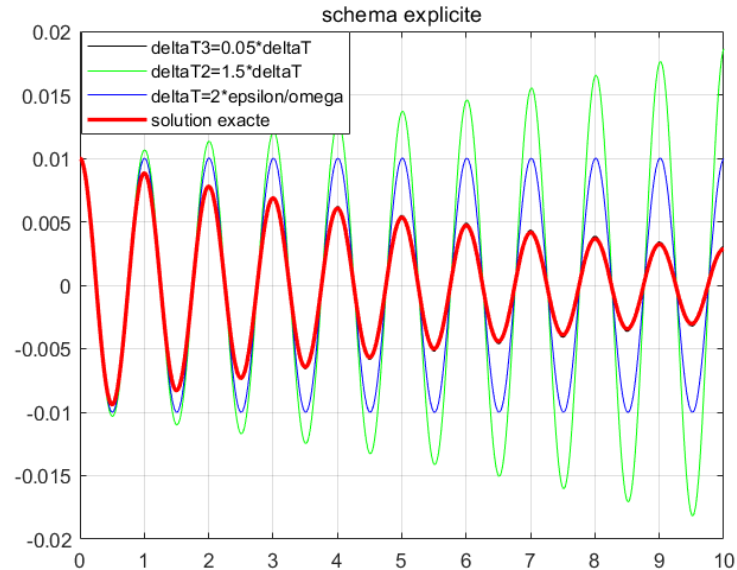
```

```

Y2(j)=U(1);
U=A2*U;
end
A3=[1 dt3;-w^2*dt3 1-2*e*w*dt3];
U=[x;xd];
Y3=[];
for j=1:(10*T0/dt3)
Y3(j)=U(1);
U=A3*U;
end
K=linspace(0,10*T0,10*T0/dt2);
L=linspace(0,10*T0,10*T0/dt3);
figure(1)
plot(L,Y3,'k'); hold on
plot(K,Y2,'g'); hold on
plot(J,Y1,'b'); hold on
plot(J,Y0,'r','Linewidth',2);
title('schema explicite');
legend('dt3=0.05*dt','dt2=1.5*dt','dt=2*e/w','solution exacte');
grid on;

```

la sortie est suivante:



1.1a) Si on choisit

$$\Delta t > \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

La solution explicite est plus grand que la solution exacte, et il est divergente. La solution est croissante.

1.1b) Si on choisit

$$\Delta t = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

La solution explicite est plus grand que la solution exacte, et il est constante.

1.1.c) Si on choisit

$$\Delta t < \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

La solution explicite est plus grand que la solution exacte, et il est divergente. La solution est décroissant, mais il est toujours grand que la solution exacte.

1.1.d)- Les critères permettant d'étudier la précision de la solution :

$$\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 - 2\varepsilon \omega_0 \Delta t \end{bmatrix} = A$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$0 < \varepsilon < 1$$

donc on a

$$\lambda = 1 - \varepsilon \omega_0 \Delta t \pm i \omega_0 \Delta t [1 - \varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}$$

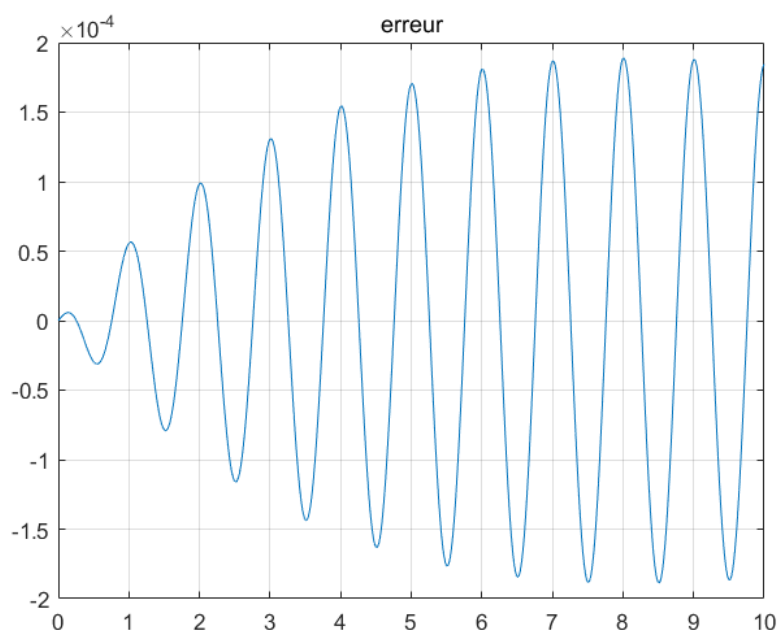
alors que $|\lambda| < 1$

donc

$$\Delta t < \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

Quand $\frac{\Delta t}{\frac{2\varepsilon}{\omega_0}} \leq 0.05$, la solution calculée présente-t-elle une précision suffisante.

```
Y30=(exp(e*w*L)).*(x*cos(woc*L)+(e*w*x+xd)*(sin(woc*L))/woc);
figure(2)
plot(L,(Y3-Y30));
title('erreur');
grid on
```



1.2

Résolution avec un schéma d'EULER implicite

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + \Delta t \dot{x}_{n+1} \\
 \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + \Delta t \ddot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \Delta t (-2\varepsilon\omega_0 \dot{x}_{n+1} - \omega_0^2 x_{n+1}) \\
 \dot{x}_n &= -2\varepsilon\omega_0 \dot{x}_n - \omega_0^2 x_n \\
 -\Delta t \dot{x}_{n+1} + x_{n+1} &= x_n \\
 (1 + 2\varepsilon\omega_0 \Delta t) \dot{x}_{n+1} + \omega_0^2 \Delta t x_{n+1} &= \dot{x}_n \\
 \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ \omega_0^2 \Delta t & 1 + 2\varepsilon\omega_0 \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

```

syms dtx
B=[1 -dtx; w^2*dtx 1+2*e*w*dtx];
eig(B^(-1))

```

1.3

On évalue numériquement la solution de l'équation sur l'intervalle de temps [0 100T0] avec un schéma de RUNGE KUTTA.

1.3.a)

Calculer la solution obtenue pour les trois valeurs suivantes du coefficient h :

h = 0.04 h = 0.96 h = 1.04

```

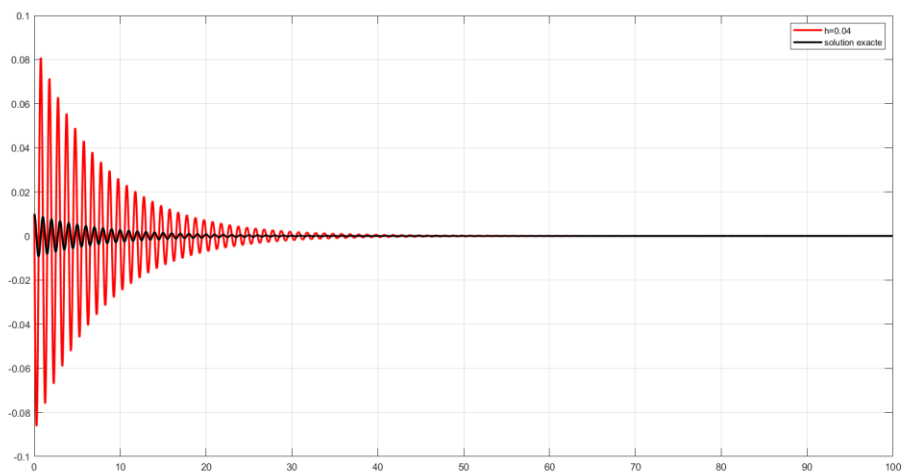
clear all;
clc;
w0 = 2*pi;
e=0.02;
T0=1;
x0=0.01;
dx0=0;
w0c = w0*w0;
h1 = 0.04;
dt1=h1*2*sqrt(2)/w0;
t = (0:dt1:100*T0)';
np = size(t,1);
x1 = zeros(np,1);
dx1 = zeros(np,1);
x1(1) = x0;
dx1(1) = dx0;
xj = [x0 ; dx0];
A = [-1 1;0 w0c*dt1];
B = [0 dt1;1 -(1+2*e*w0*dt1)];
C = inv(B)*A;
for inc = 2 : np
k1 = C*xj;
k2 = C*(xj+k1*dt1/2);
k3 = C*(xj+k2*dt1/2);

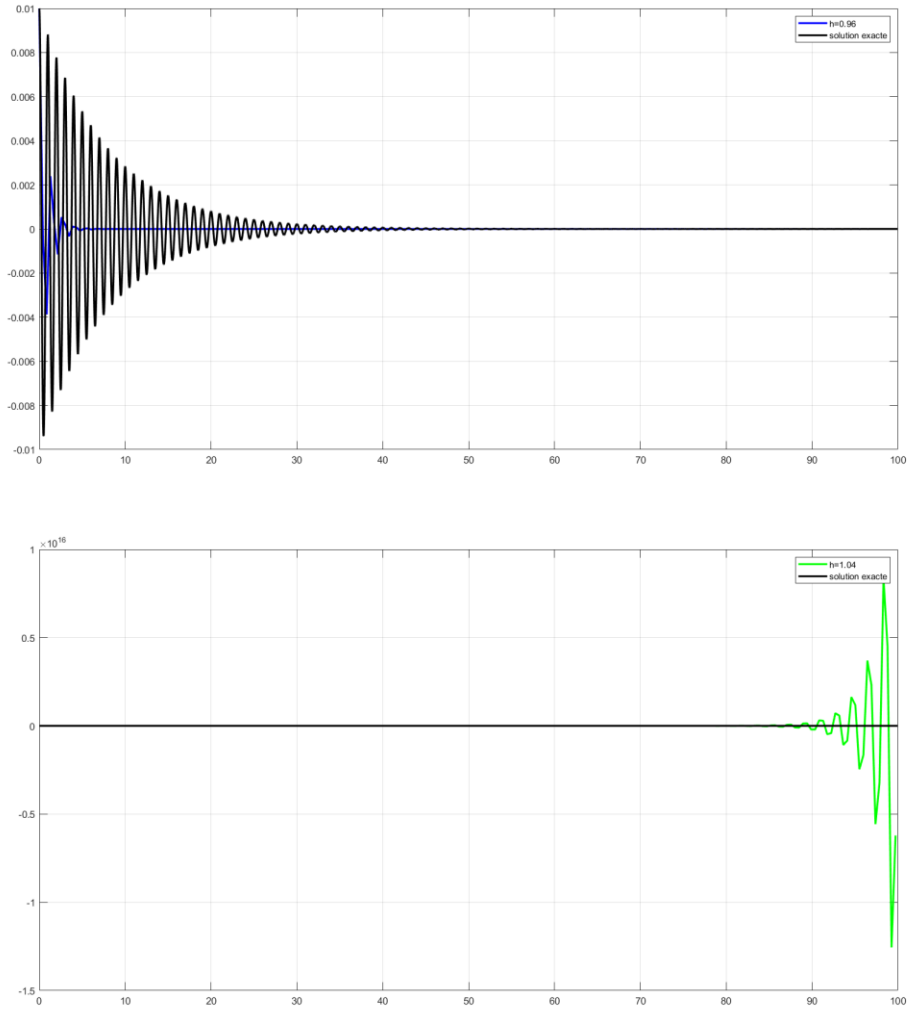
```

```
k4 = C*(xj+k3*dt1);
K = (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
xj = xj + K * dt1;
x1(inc) = xj(1);
dx1(inc) = xj(2);
end;
plot(t,x1, '-r','Linewidth',2)
hold on;

w=2*pi;
e=0.02;
W=w*(1-e^2)^(0.5);
dt=2*e/w;
T0=1;
x=0.01;
xd=0;
J=linspace(0,100*T0,100*T0/dt);
Y0=(exp(-e*w*J)).*(x*cos(W*J)+(e*w*x+xd)*(sin(W*J))/W);
plot(J,Y0,'k','Linewidth',2);
legend('h=0.04','solution exacte');
grid on;
```

les sorties sont suivantes:





On peut trouver que quand \$h=0.04\$ et \$h=0.96\$, les résultats sont stable et \$h=1.04\$ n'est pas stable. Et \$h=0.04\$ est plus précise que \$h=0.96\$ et \$h=1.04\$.

Etude d'un double pendule avec l'hypothèse des petits mouvements

1. Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

- 1.1) Ecrivez la matrice d'amplification.

On a

$$\begin{aligned}
 q_{n+1} &= q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2(0.5 - \beta) \ddot{q}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{n+1} \\
 \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{q}_n + \Delta t \gamma \ddot{q}_{n+1} \\
 \ddot{q}_{n+1} &= -\omega_0^2 q_{n+1}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \Delta t^2 \\ 0 & 1 & -\gamma \Delta t \\ \omega_0^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \\ \ddot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2(0.5 - \beta) \\ 0 & 1 & \Delta t(1 - \gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix}$$

Et

$$\begin{aligned} q_{n+1}'' &= -\omega_0^2 q_{n+1} \\ \dot{q}_n &= -\omega_0^2 q_n \end{aligned}$$

$$\text{On a } \begin{bmatrix} 1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 & 0 \\ \gamma \Delta t \omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t^2 (0.5 - \beta) \omega_0^2 & \Delta t \\ (\gamma - 1) \Delta t \omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Comme } B \begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{bmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = (B^{-1} \times C) \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

matrice d'amplification

$$\begin{aligned} A &= (B^{-1} \times C) \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2)} & \frac{\Delta t}{1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2} \\ -\omega_0^2 \Delta t \left[1 - \frac{\gamma \omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2)} \right] & 1 - \frac{\gamma \omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Car $\beta = 0, \gamma = 0.5$

On a

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2 \Delta t^2}{2} & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t \left[1 - \frac{0.5 \omega_0^2 \Delta t^2}{2} \right] & 1 - \frac{0.5 \omega_0^2 \Delta t^2}{2} \end{bmatrix}$$

1.2)

A partir de cette matrice d'amplification, le pas de temps critique.

$$\begin{aligned} \det \left[A - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda [2 - (\omega_0^2 \Delta t^2)^2] + 1 &= 0 \end{aligned}$$

On souhaite que $\Delta \leq 0$

$$\text{Donc } \Delta t^2 \leq \frac{4}{\omega_0^2} = 0.1$$

1.3)

La relation entre q_0, \dot{q}_0 et \ddot{q}_0 :

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \omega_0^2 q &= 0 \\ q(0) = q_0, \dot{q}(0) &= \dot{q}_0 \end{aligned}$$

donc

$$\ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 = 0$$

Oscillateur non linéaire à un degré de liberté

1.

Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

1.1

On a

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{j+1}$$

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t(1 - \gamma)\dot{q}_j + \Delta t\gamma\ddot{q}_{j+1}$$

$$q_{j+1}^{\ddot{}} = -\omega_0^2 q_{j+1}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta\Delta t^2 \\ 0 & 1 & -\gamma\Delta t \\ \omega_0^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ q_{j+1}^{\ddot{}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2(0.5 - \beta) \\ 0 & 1 & \Delta t(1 - \gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{bmatrix}$$

Et

$$q_{j+1}^{\ddot{}} = -\omega_0^2 q_{j+1}$$

$$\ddot{q}_j = -\omega_0^2 q_j$$

$$\text{On a } \begin{bmatrix} 1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2 & 0 \\ \gamma\Delta t\omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t^2(0.5 - \beta)\omega_0^2 & \Delta t \\ (\gamma - 1)\Delta t\omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

$$\text{Comme } B \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = (B^{-1} \times C) \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

matrice d'amplification

$$A = (B^{-1} \times C)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2\Delta t^2}{2(1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2)} & \frac{\Delta t}{1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2} \\ -\omega_0^2\Delta t \left[1 - \frac{\gamma\omega_0^2\Delta t^2}{2(1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2)} \right] & 1 - \frac{\gamma\omega_0^2\Delta t^2}{2(1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2)} \end{bmatrix}$$

Car $\beta = 0, \gamma = 0.5$

On a

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2\Delta t^2}{2} & \Delta t \\ -\omega_0^2\Delta t \left[1 - \frac{0.5\omega_0^2\Delta t^2}{2} \right] & 1 - \frac{0.5\omega_0^2\Delta t^2}{2} \end{bmatrix}$$

1.2

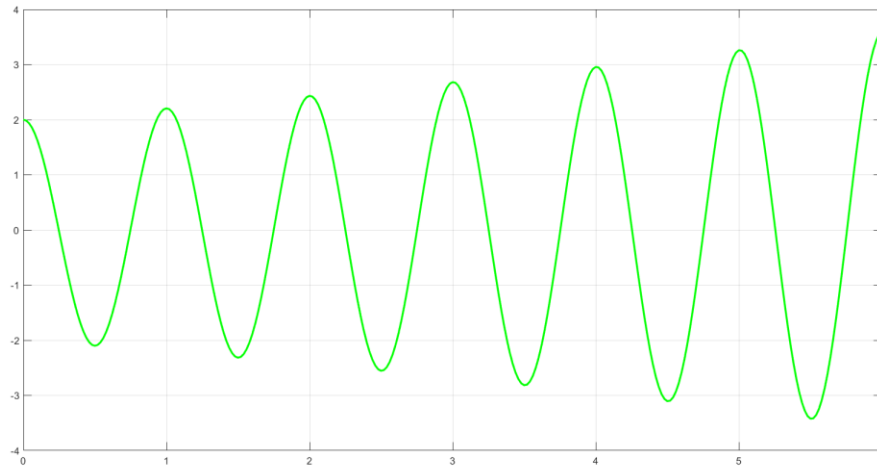
La résolution de l'équation différentielle (2) avec un schéma de NEWMARK explicite :

```
clear all
clc;
dt1 = 0.02;
T0 = 6;
w0 = 2*pi;
q0 = 2;
dq0 = 0;
a = 0.1;
w0c = w0*w0;
t1 = (0:dt1:T0)';
np1 = size(t1,1);
q1 = zeros(np1,1);
dq1 = zeros(np1,1);
q1(1) = q0;
```

```

dq1(1) = dq0;
for inc = 2 : np1
q1(inc) = q1(inc-1)*(1-0.5*w0c*dt1*dt1) + dt1*dq1(inc-1);
dq1(inc) = q1(inc-1)*w0c*dt1*(0.25*w0c*dt1*dt1-1) + dq1(inc-1)*(1-
0.25*w0c*dt1*dt1);
end
plot (t1,q1, '-g','Linewidth',2)
grid on

```



1.3

On choisit $\Delta t = 0.02$ s. Les valeurs numériques de $q(t)$ pour les valeurs de t égales à 0 s, Δt , $2\Delta t$ et T_0 est

$$\begin{aligned}
 q_{t=0} &= 2 \\
 q_{t=\Delta t} &= 1.9842 \\
 q_{t=2\Delta t} &= 1.9371 \\
 q_{t=T_0} &= 3.5927
 \end{aligned}$$

2.

Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite

2.1

On doit chercher à minimiser la correction entre la valeur exact et la valeur estimée.

2.2

Calcul de la correction :

$$f(\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}^{\ddot{}}, q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}) = 0$$

$$\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}^{\ddot{}} + \omega_0^2 (q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}) (1 + a(q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1})^2) = 0$$

$$f(\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}^{\ddot{}}, q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}) = 0 = f(\ddot{q}_{j+1}^*, q_{j+1}^*) + \frac{\partial f}{\partial q_{j+1}^*} \Delta q_{j+1} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{q}_{j+1}^*} \Delta q_{j+1}^{\ddot{}}$$

$$\text{avec } \Delta q_{j+1} = \beta \Delta t^2 \Delta q_{j+1}^{\ddot{}}$$

on obtient que

$$\Delta q_{j+1}^{\ddot{}} = -\frac{f(\ddot{q}_{j+1}^*, \dot{q}_{j+1}^*, q_{j+1}^*)}{\frac{\partial f}{\partial \ddot{q}_{j+1}^*} + 0.25 \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_{j+1}^*} \Delta t^2} \Delta t^2$$

2.3

On a $\ddot{q}_{j+1}^0 = 0$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{j+1}^0 &= \dot{q}_j + 0.5\Delta t \ddot{q}_j \\ q_{j+1}^0 &= q_j + \Delta t \dot{q}_j + 0.25\Delta t^2 \ddot{q}_j \end{aligned}$$

```
clear all
clc;
dt2 = 0.02;
T0 = 6 ;
q0 = 2;
dq0=0 ;
a = 0.1;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
t2 = (0:dt2:T0)';
np2 = size(t2,1);
q2 = zeros(np2,1);
dq2 = zeros(np2,1);
q2(1) = q0;
dq2(1) = dq0;
ddq2(1) = 0;
for inc = 2 : np2
q2(inc) = q2(inc-1)+dt2*dq2(inc-1)+0.25*dt2*dt2*ddq2(inc-1);
dq2(inc) = dq2(inc-1)+0.5*dt2*ddq2(inc-1);
ddq2(inc) = -w0c*q2(inc)*(1+a*q2(inc)*q2(inc));
end
plot(t2,q2,'b-','Linewidth',2)
grid on
```

