Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

1

1.1

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\omega_0 = 2\pi$$
$$q_0 = 1$$
$$\dot{q} = 0$$

$$q = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$$

$$q = \cos(2\pi t)$$

1.2

$$E^* = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2)$$

$$E^* = \frac{1}{2}[4\pi^2 \sin^2(2\pi t) + 4\pi^2 \cos^2(2\pi t)]$$
$$E^* = 2\pi^2$$

2

2.1

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t \times \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t \times \dot{q}_j \\ \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t \times \ddot{q}_j \end{cases} \text{ avec } \ddot{q}_j = -\omega_0^2 q$$

On a $\begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t \times \dot{q}_j \\ \dot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 \Delta t q_j + \dot{q}_j \end{cases}$

Donc $\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix}$

2.2

```
clear all;
w0=2*pi;
```

```
q0=1;
dq0=0;
T0=3;
n=5000;
dt=T0/n;
t=0:dt:T0;
%Euler Explicite
A=[1 dt;-w0*w0*dt 1];
U(:,1)=[q0;dq0];
for i=1:n-1
    U(:,i+1)=A*U(:,i);
end
plot(1:n,U(1,:))
```

2.3

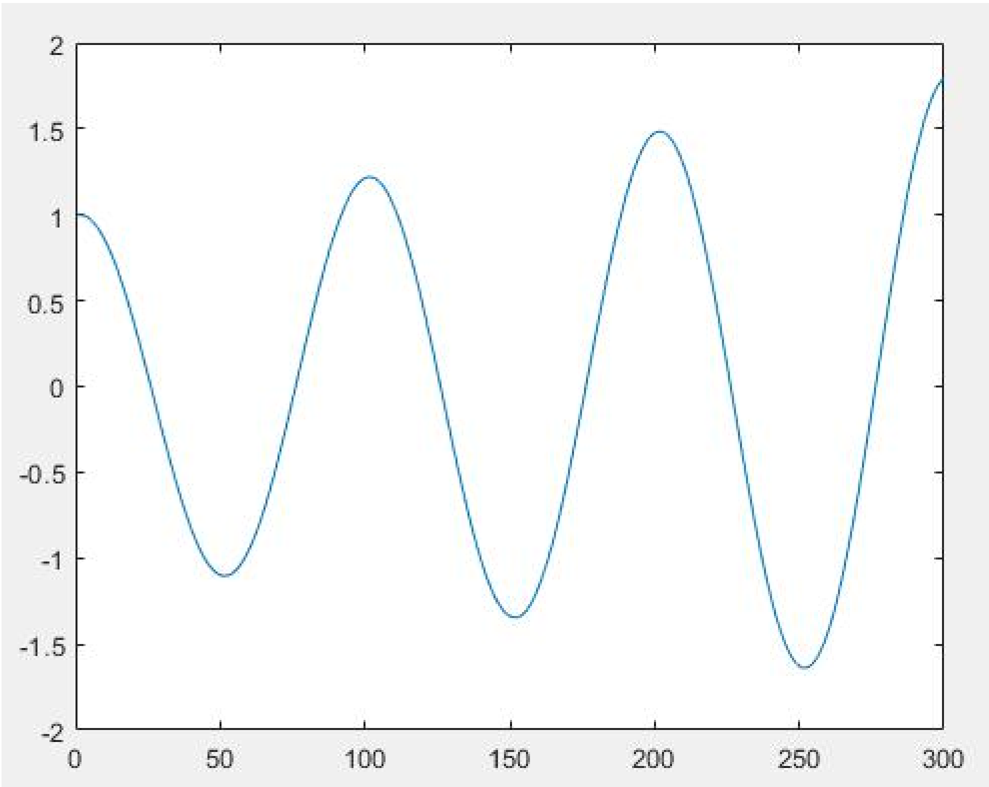

图 1 n=300

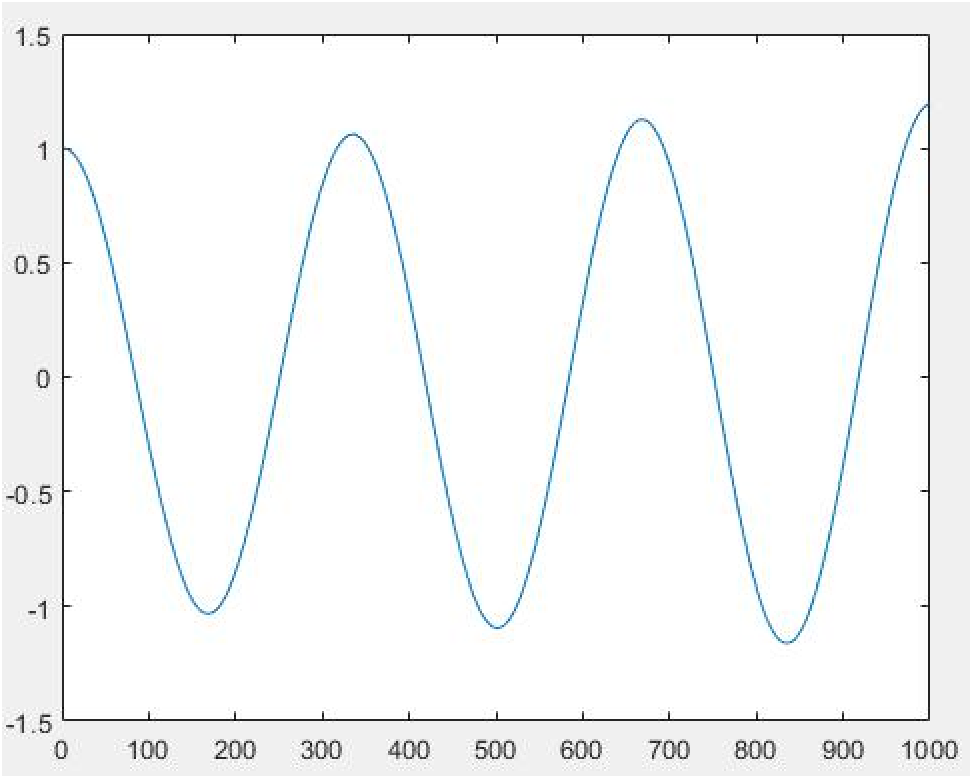

图 2 n=1000

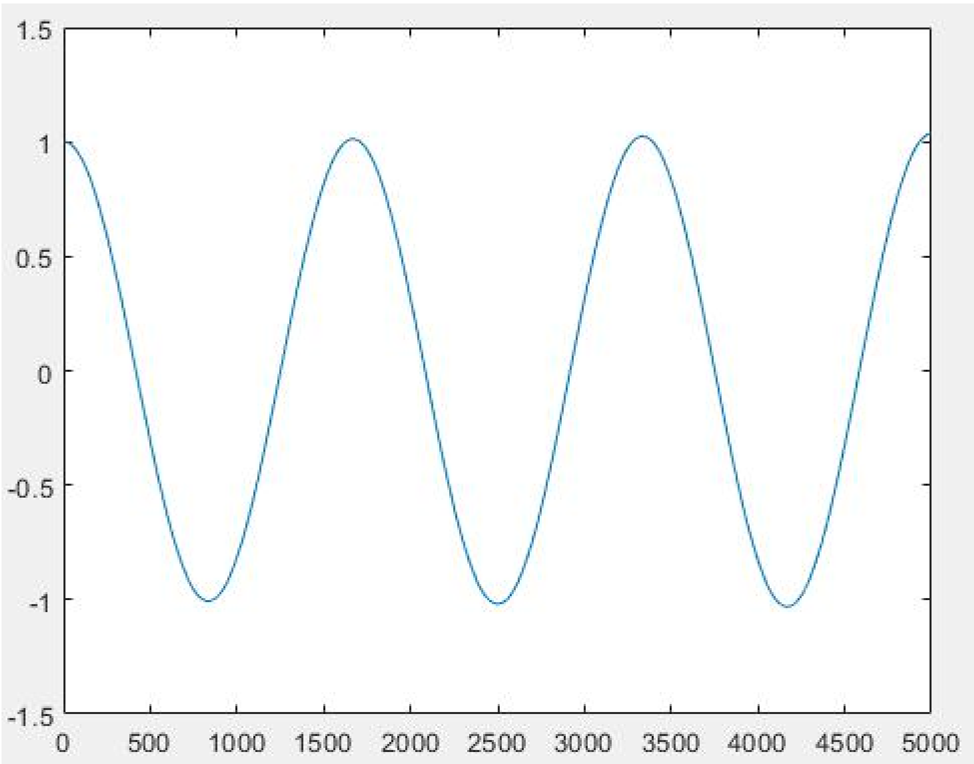

图 3 n=5000

Donc, on peut voir que plus le pas de temps Δt est petit, plus la divergence est lente.

2.4

```
for j=1:n
    Eexplicite(j)=0.5*(U(2,j)*U(2,j)+4*pi*pi*U(1,j)*U(1,j));
end
% plot(1:n,Eexplicite)
title('Eexplicite')
```

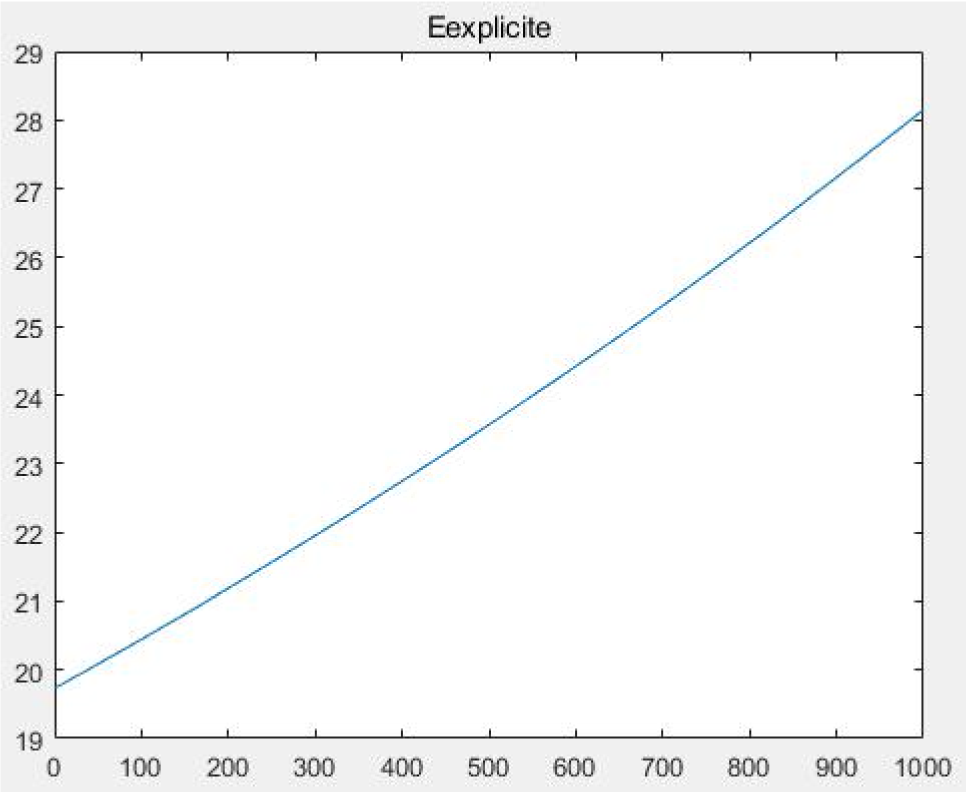

图 4 E(n=1000)

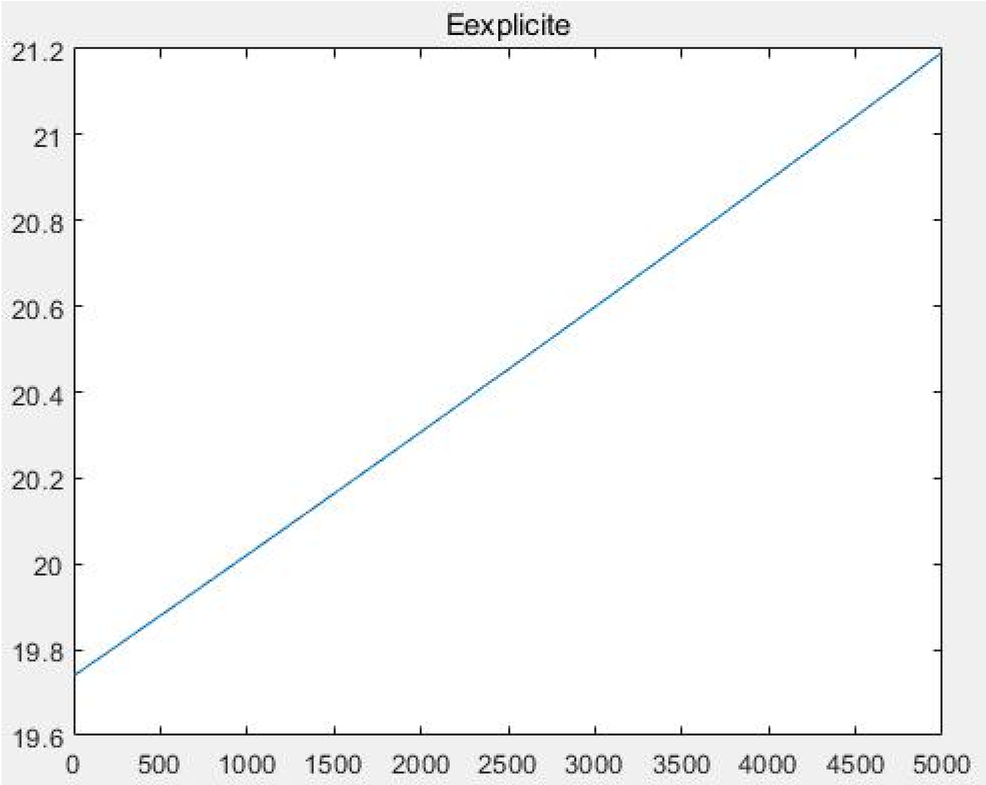

图 5 E(n=5000)

Comparer avec la solution exacte : $E^* = 2\pi^2 = 19.74$,ce résultat diverge.

Donc, on peut voir que plus le pas de temps Δt est petit, plus la réponse est correcte.

2.5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -\Delta t \\ \omega_0^2 \Delta t & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + \omega^2 \Delta t^2 = 0$$

On a $\lambda = \dfrac{2 \pm \omega_0 \Delta t i}{2}$

Les modules des deux valeurs propres sont supérieur à 1, donc il est instable.

3

3.1

```
%Euler Implicite
A2 = inv([1,-dt;w0*w0*dt,1]);
U2(:,1) = [q0;dq0];
for i=1:n-1
    U2(:,i+1) = A2*U2(:,i);
end
```

```
plot(1:n,U2(1,:))
```

3.2

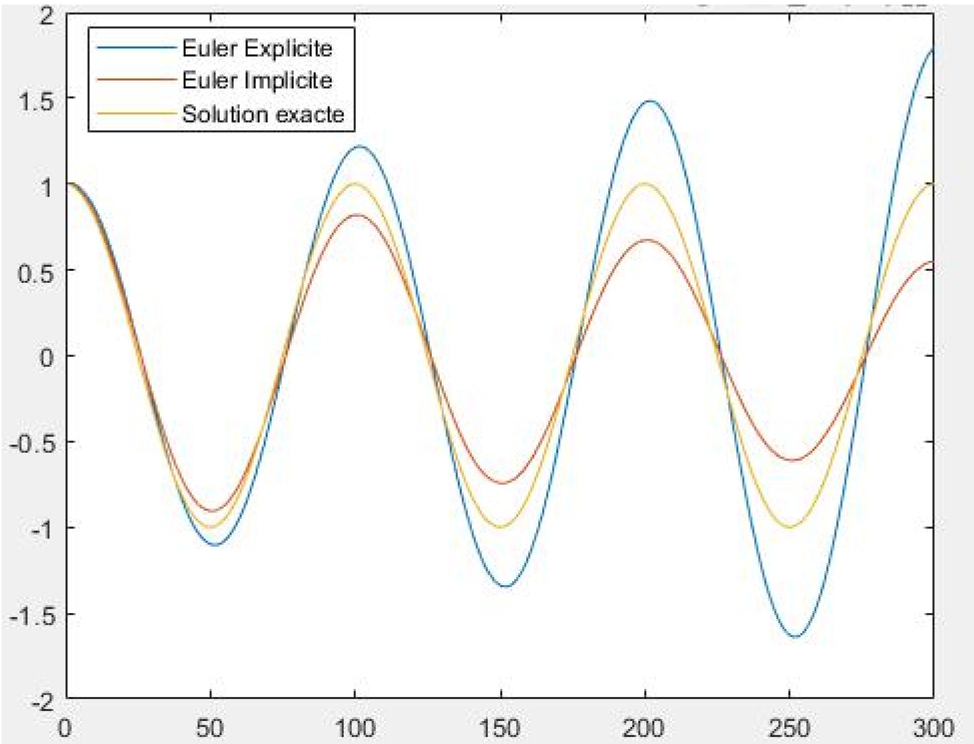

图 6

On peut voir que Euler Explicite diverge et Euler Implicite converge.

3.3

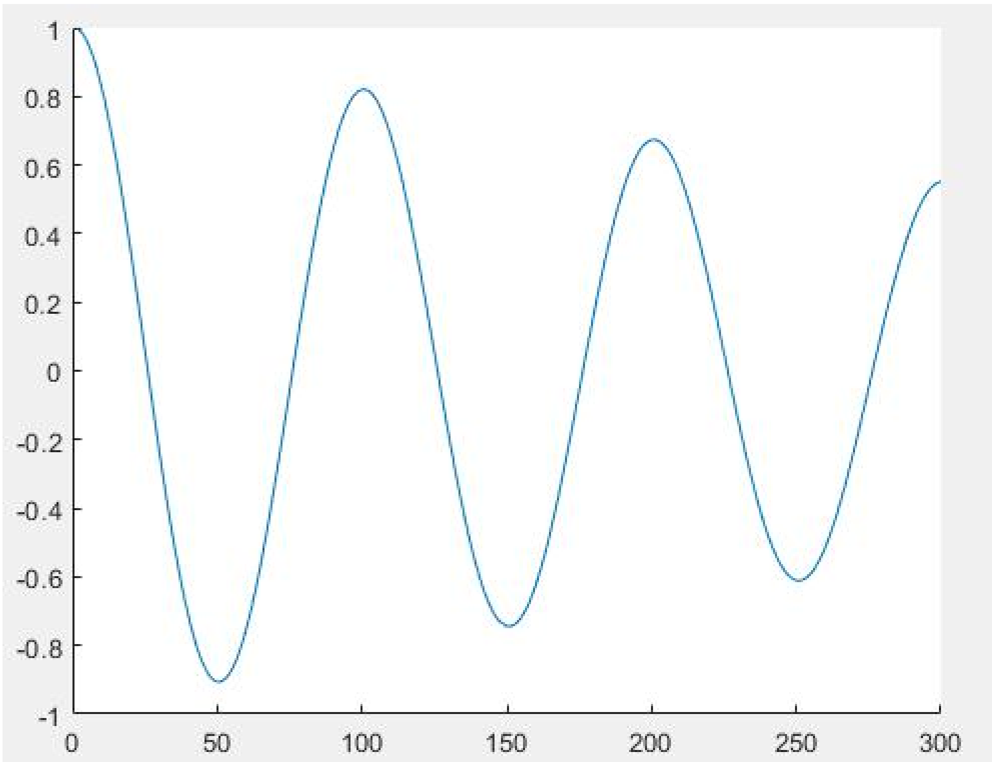

图 7 n=300

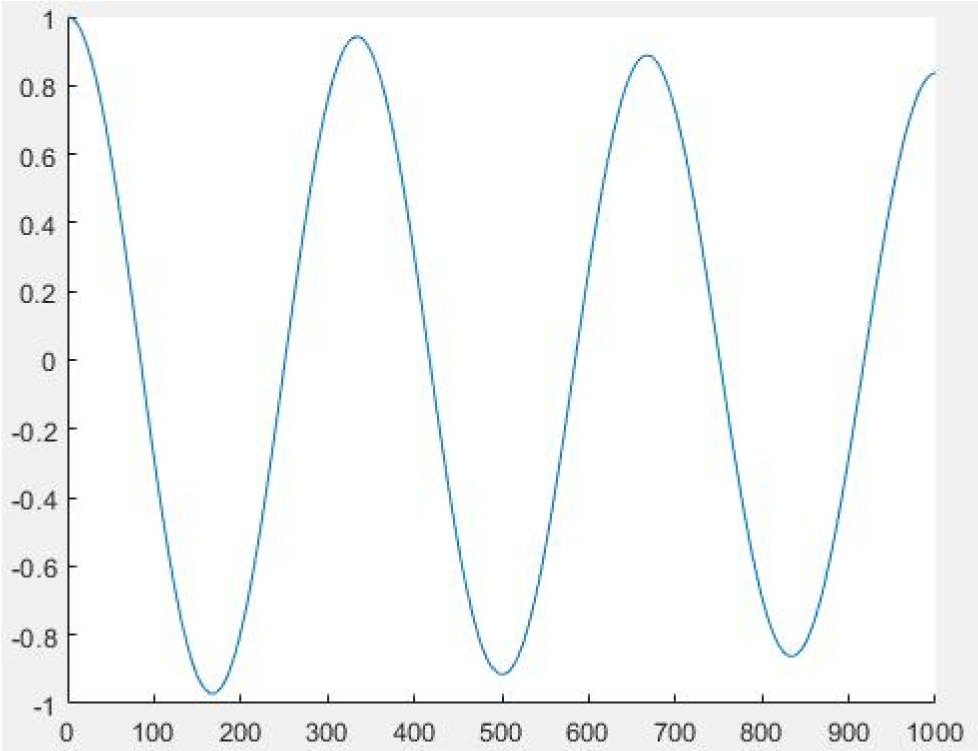

图 8 n=1000

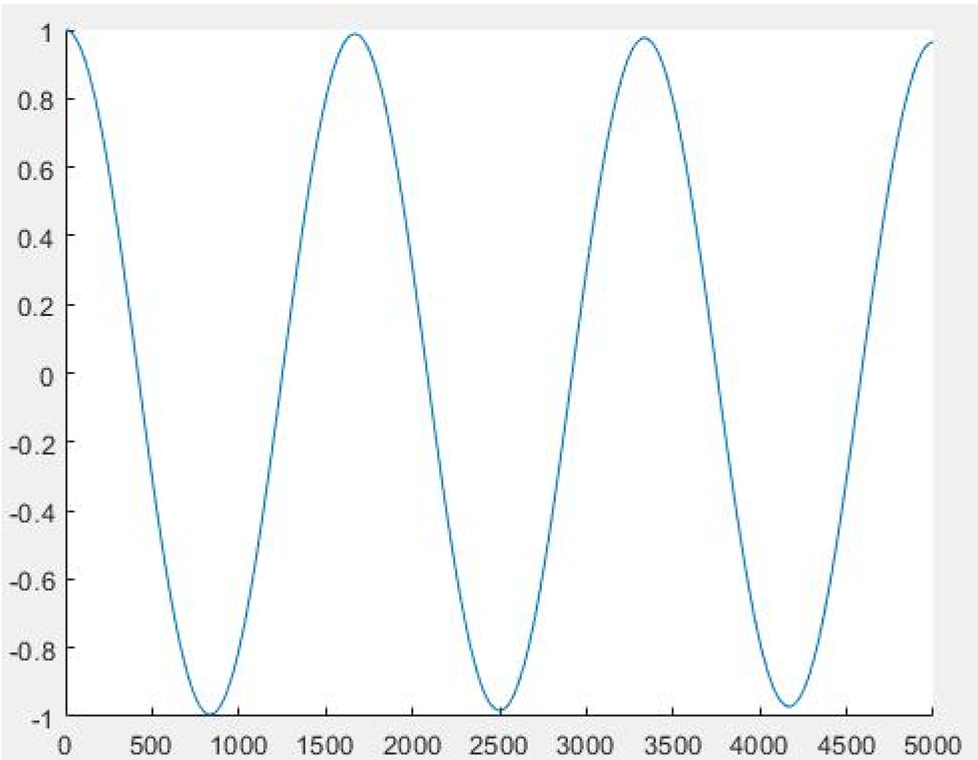

图 9 n=5000

On peut voir que plus le pas de temps Δt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

3.4

```
for j=1:n
    Eexplicite(j)=0.5*(U(2,j)*U(2,j)+4*pi*pi*U(1,j)*U(1,j));
end
plot(1:n,Eexplicite)
hold on;
for j=1:n
    Eimplicite(j)=0.5*((U2(2,j))^2+4*pi*pi*(U2(1,j))^2);
end
plot(1:n,Eimplicite)
hold on;
plot([0,5000],[2*pi*pi,2*pi*pi])
legend('Eeplicite','Eimplicite','Eexacte')
```

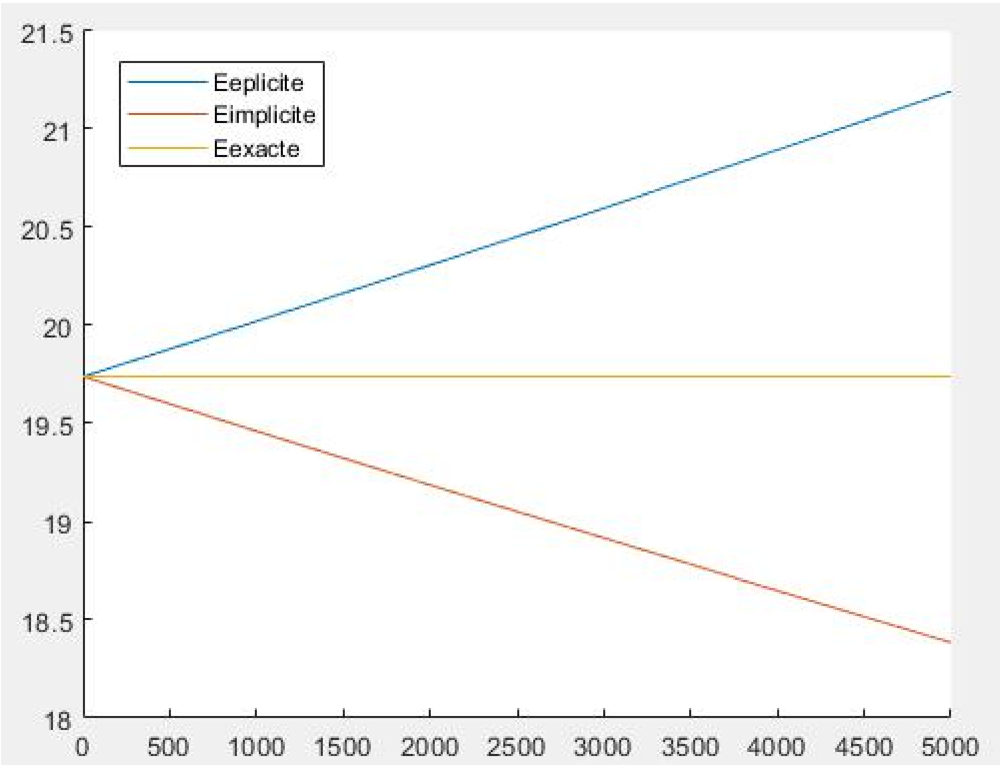

图 10 n=5000

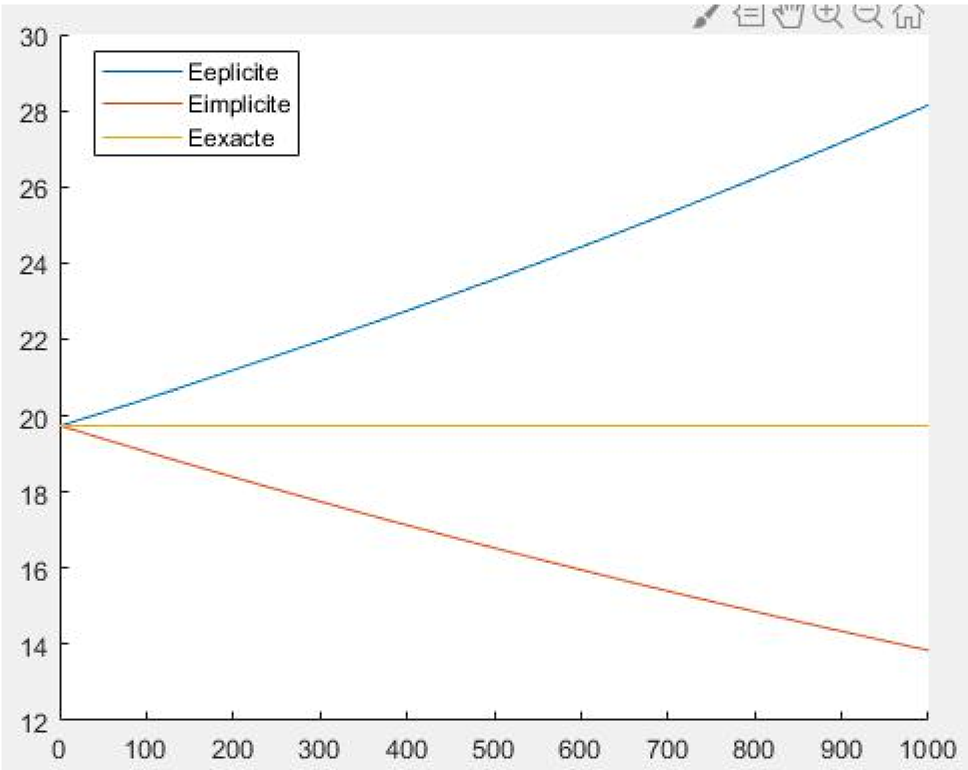

图 11 n=1000

On peut voir que la valeur de E^* de Euler Implicite diminue et de Euler Explicite augmente.

Donc, plus Δt est petit, plus la simulation est précis.

3.5

[x,y]=eig(A2)

y =

0.9996 + 0.0188i

0.9996 - 0.0188i

abs(y(1,1))

ans =

0.9980<1

Les valeurs propres de la matrice d'amplification sont de module intérieur à 1, donc il est stable.

4

4.1

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t \times \dot{q}_j \\ \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_{j+1} + \Delta t \times \ddot{q}_{j+1} \end{cases}$$

Donc, on a $\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$

4.2

```
%Runge Kutta
A3=[0,1;-w0*w0,0];
U3(:,1)=[q0;dq0];
for i=1:n-1
    k1=A3*U3(:,i);
    k2=A3*(U3(:,i)+0.5*dt*k1);
    k3=A3*(U3(:,i)+0.5*dt*k2);
    k4=A3*(U3(:,i)+dt*k3);
    U3(:,i+1)=U3(:,i)+1/6*dt*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end
plot(1:n,U3(1,:))
```

4.3

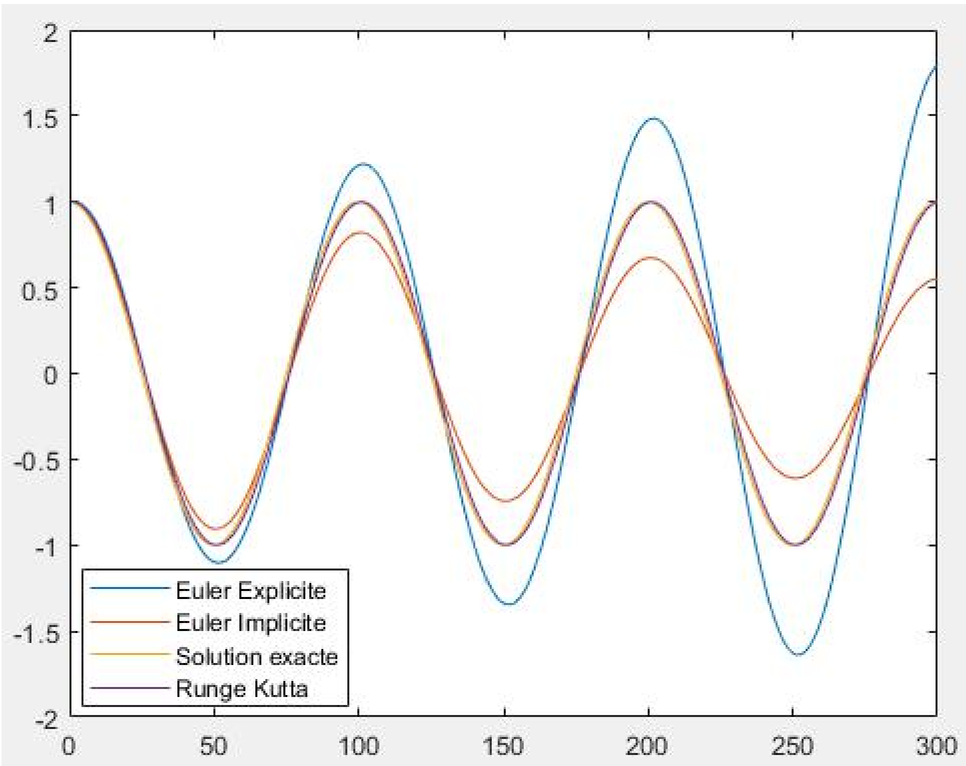

图 12

On peut voir que la méthode de Runge Kutta d’ordre 4 est plus précis par rapport à la solution exacte.

4.4

```
for j=1:n
    Eexplicite(j)=0.5*(U(2,j)*U(2,j)+4*pi*pi*U(1,j)*U(1,j));
end
plot(1:n,Eexplicite)
```

```
hold on;
for j=1:n
    Eimplicite(j)=0.5*((U2(2,j))^2+4*pi*pi*(U2(1,j))^2);
end
plot(1:n,Eimplicite)
hold on;
plot([0,300],[2*pi*pi,2*pi*pi])
hold on;
for j=1:n
    Erungekutta(j)=0.5*((U3(2,j))^2+4*pi*pi*(U3(1,j))^2);
end
plot(1:n,Erungekutta)
legend('Euler Explicite', 'Euler Implicite', 'Solution 
exacte','Erungekutta')
```

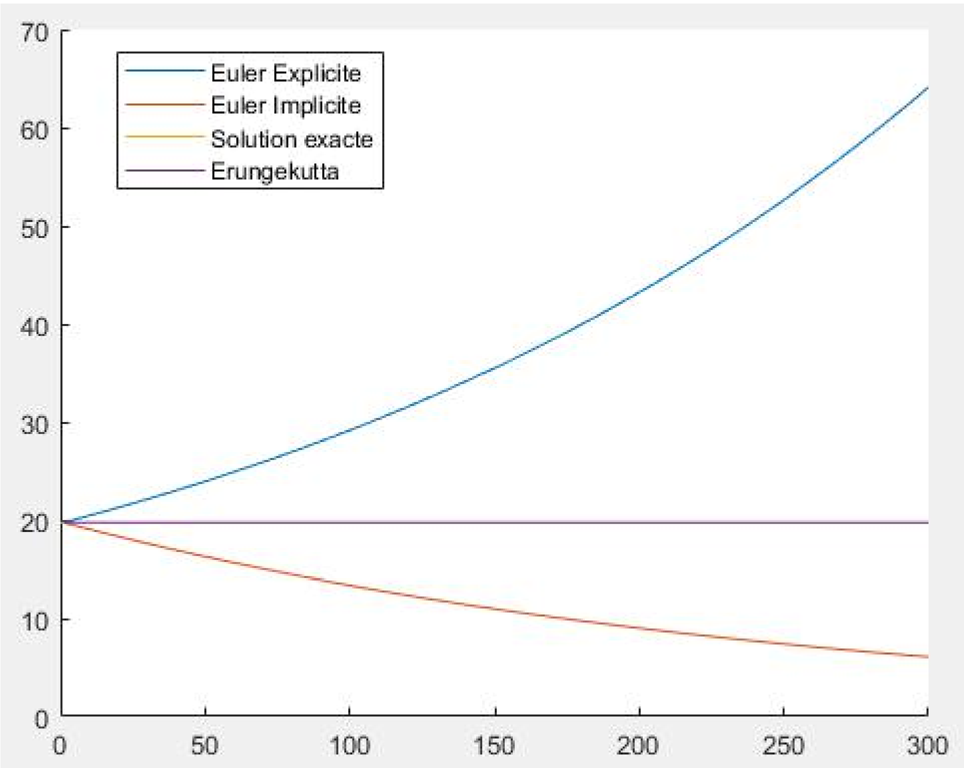

图 13

On peut voir que la quantité E^* de Runge Kutta d'ordre 4 est la plus précis.

5

5.1

5.1.1

```
%NEWMARK
gama=0.5;
beta=0.25;
B=[1+beta*dt*dt*w0*w0,0;gama*dt*w0*w0,1];
```

```
C=[1-(0.5-beta)*dt*dt*w0*w0,dt;-(1-gama)*dt*w0*w0,1];
A4=inv(B)*C;
U4(:,1)=[q0;dq0];
for i=1:n-1
    U4(:,i+1)=A4*U4(:,i);
end
plot(1:n,U4(1,:))
```

5.1.2

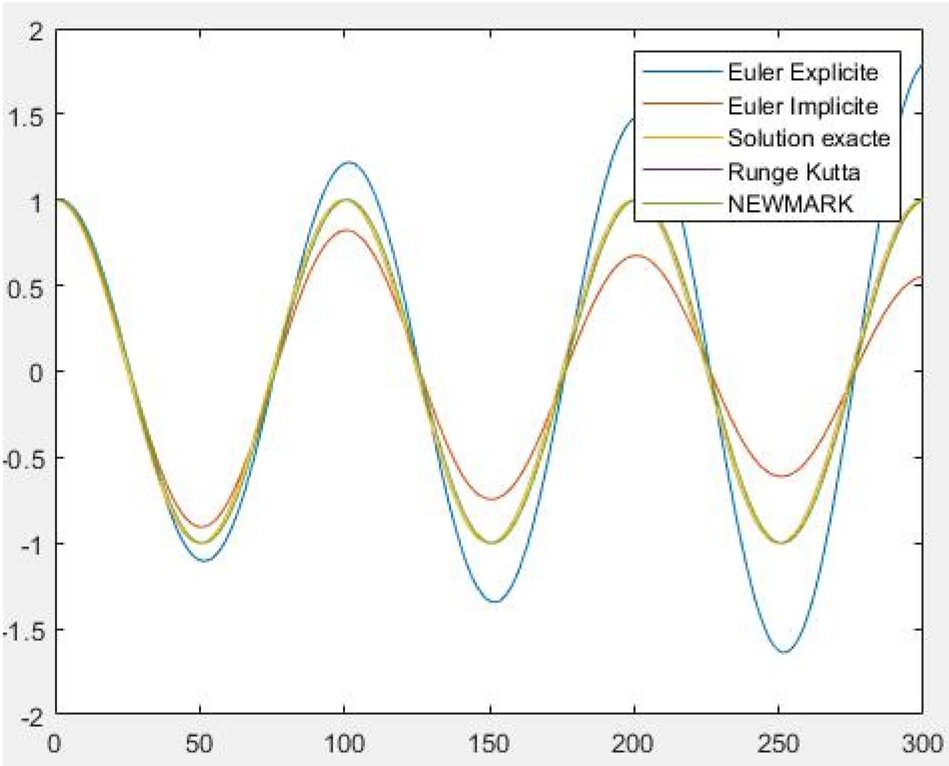

图 14

On peut voir que la méthode de NEWMARK est très précise.

5.1.3

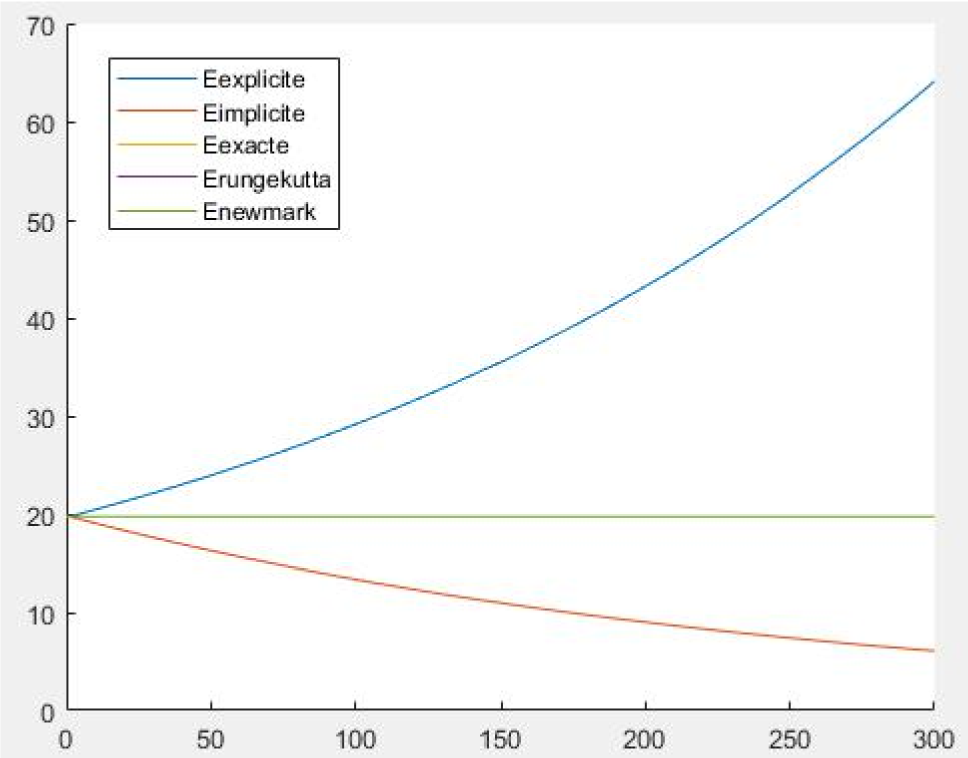

图 15

On peut voir que la méthode de NEWMARK est très précise.

5.1.4

[x,y]=eig(A4)

y =

0.9980 + 0.0628i 0.0000 + 0.0000i

0.0000 + 0.0000i 0.9980 - 0.0628i

abs(y(1,1))

ans =1

Donc, il est stable.

5.2

5.2.1

```
%NEWMARK
gama=0.5;
beta=0;
B=[1+beta*dt*dt*w0*w0,0;gama*dt*w0*w0,1];
C=[1-(0.5-beta)*dt*dt*w0*w0,dt;-(1-gama)*dt*w0*w0,1];
A4=inv(B)*C;
U4(:,1)=[q0;dq0];
for i=1:n-1
    U4(:,i+1)=A4*U4(:,i);
end
plot(1:n,U4(1,:))
```

5.2.2

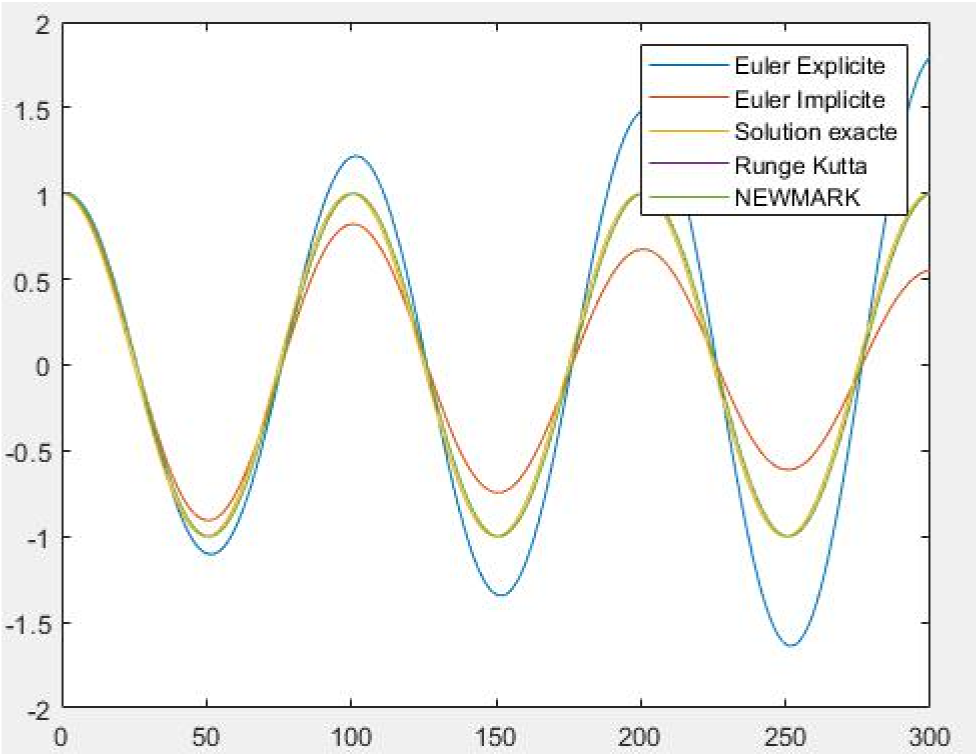

图 16

5.2.3

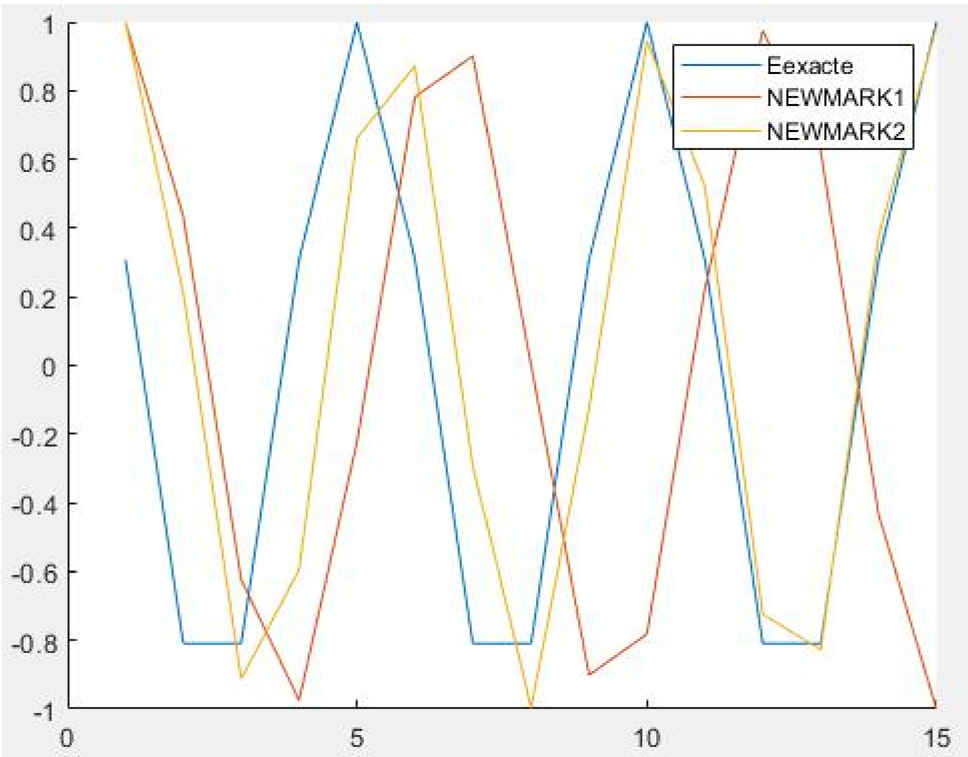

图 17 Δt =0.2s

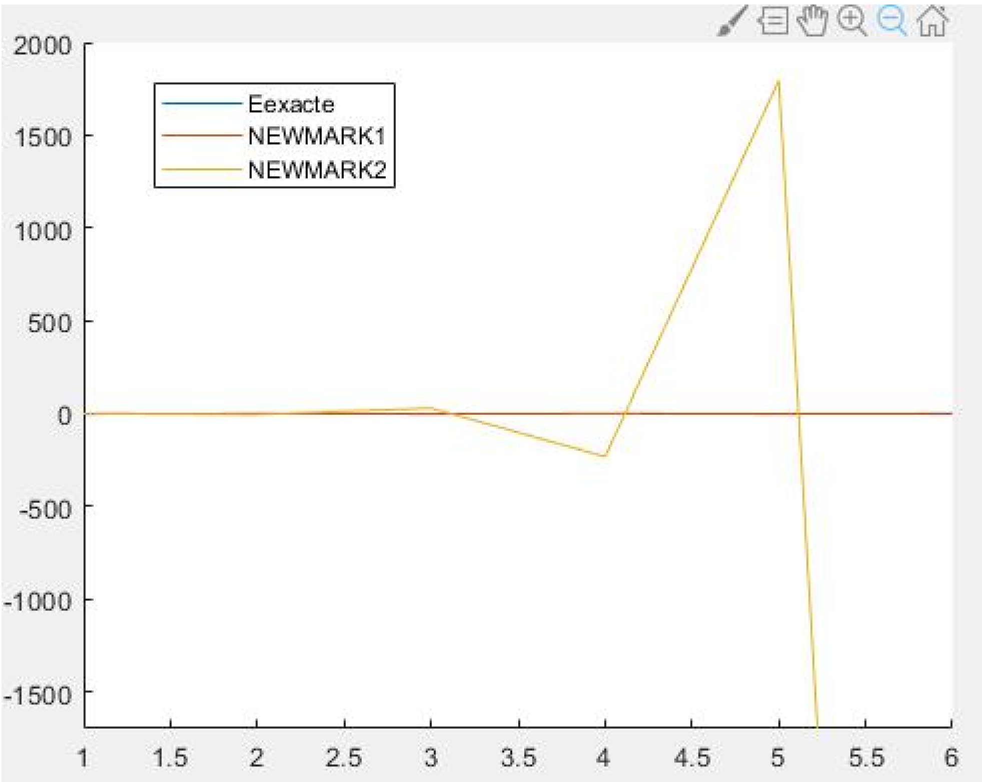

图 18 Δt =0.5s

Quand Δt est très grand, il diverge.

5.2.4

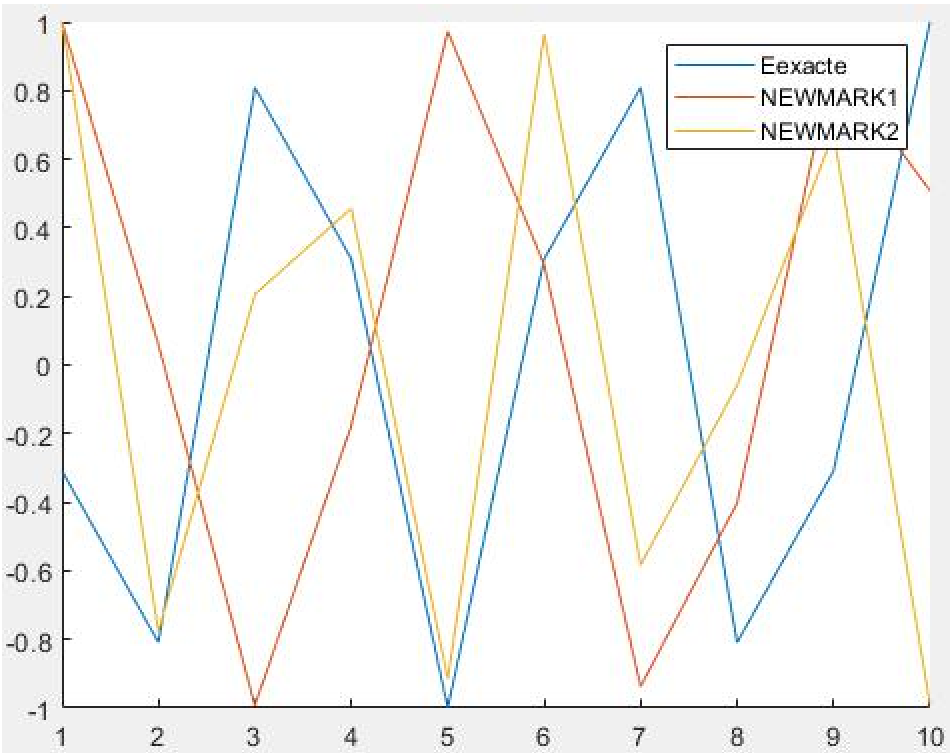

图 19 Δt =0.3s

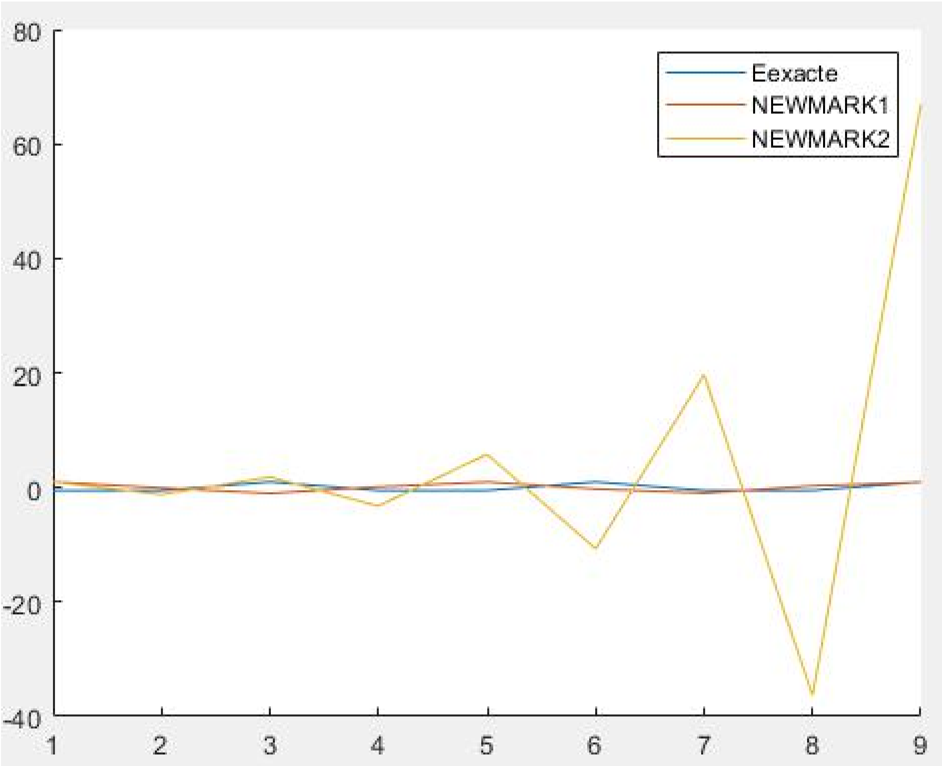

图 20 Δt =1/3s

Y =

-1.8443 0

0 -0.5422

ans =

1.8443

Quand on choisi Δt =1/3s, la module de valeur propre est 1.8, supérieur à 1.

Y =

-0.7765 + 0.6301i 0.0000 + 0.0000i

0.0000 + 0.0000i -0.7765 - 0.6301i

ans =

1.0000

Quand on choisi Δt =0.3s, la module de valeur propre est 1.

Donc, le pas de temps critique est 0.3s

$$\Delta t = \alpha \times \frac{2}{\omega_0}$$

$$\alpha = \frac{\Delta t \times \omega_0}{2} = 0.942$$