1. Solution analytique de l'équation (1)

1.1 Supposons que $q = A\sin 2\pi t + B\cos 2\pi t$

D'après les conditions initiales, on a $A=0$ et $B=1$

Donc, la solution analytique est $q = \cos 2\pi t$

1.2 $E^* = 2\pi^2$ est une constante, ne varie pas avec le temps.

2. Schéma d'EULER explicite

2.1

D'après (S) on a :

$$\begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t\, \dot{q}_j \\ \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t\, \ddot{q}_j \end{cases}$$

d'après (1) on a :

$$\ddot{q} = -W_0^2 q$$

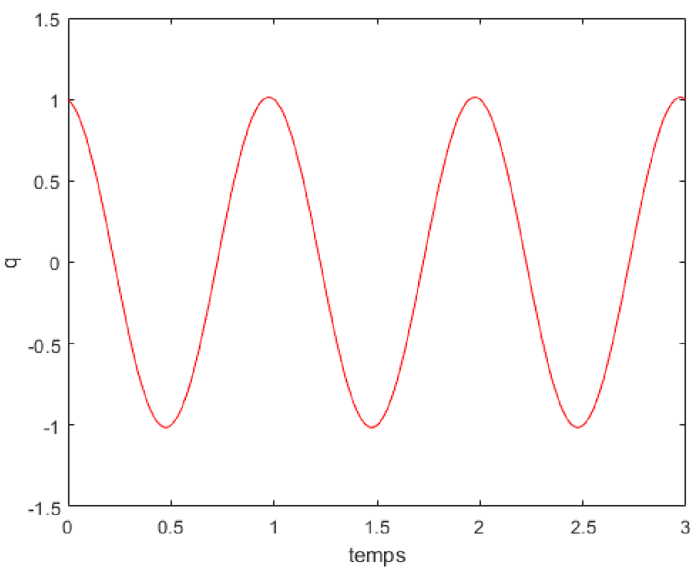
Alors $\ddot{q}_j = -W_0^2 q_j$

Alors : $$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t(-W_0^2 q_j)$$

Donc. $$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -W_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix}$$

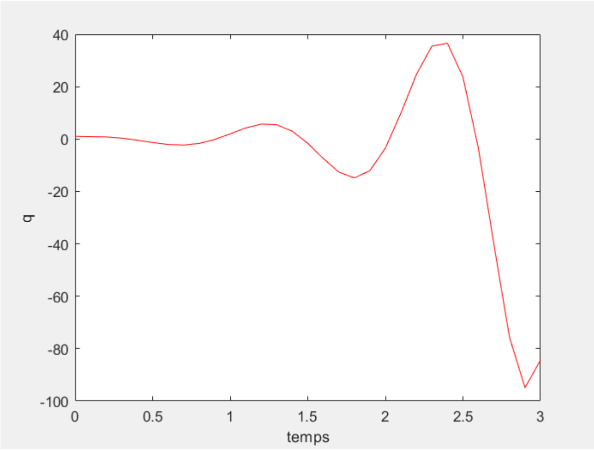
2.2

```
clear;
clc
w=2*pi;
h=0.00001;
t=0:h:3;
q(1)=1;
v(1)=-1;
a(1)=0;
for i=1:length(t)-1
    q(i+1)=q(i)+h*v(i);
    v(i+1)=v(i)+h*a(i);
    a(i+1)=-4*pi*pi*q(i+1);
end
plot(t,q,'r');
xlabel('temps');
ylabel('q');
```

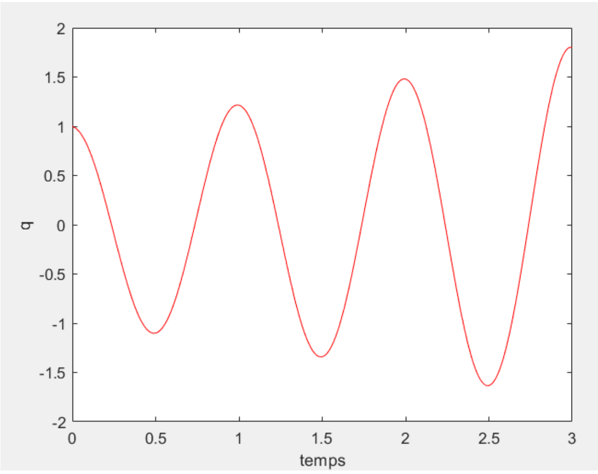


2.3

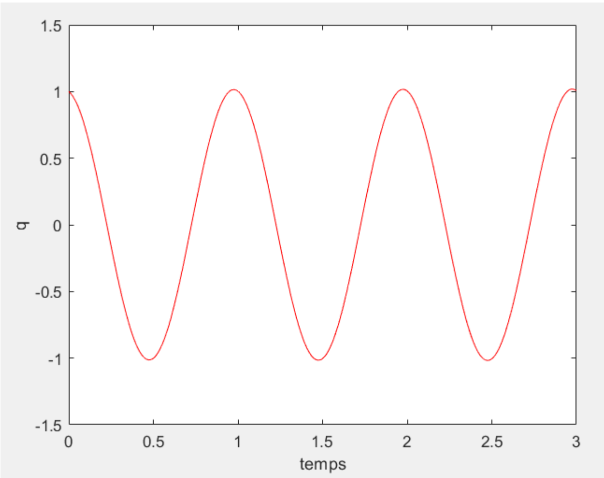
$\Delta t = 0.1$ diverge :




$\Delta t = 0.01$ Il diverge mais plus lentement :

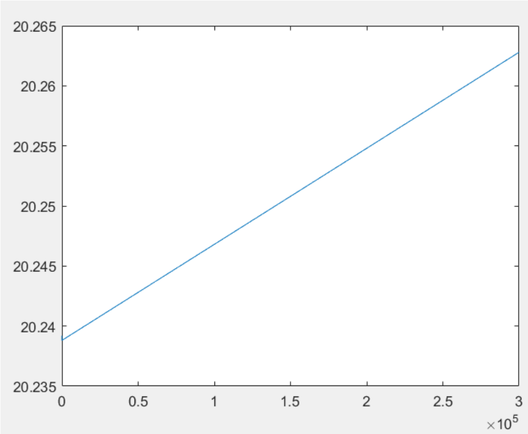



$\Delta t = 0.0001$ :




Donc, c'est évident que plus le pas de $\Delta t$ est petit, plus la divergence est lente.

2.4 E* augmente mais pas reste une constante.




($\Delta t = 0.0001$)

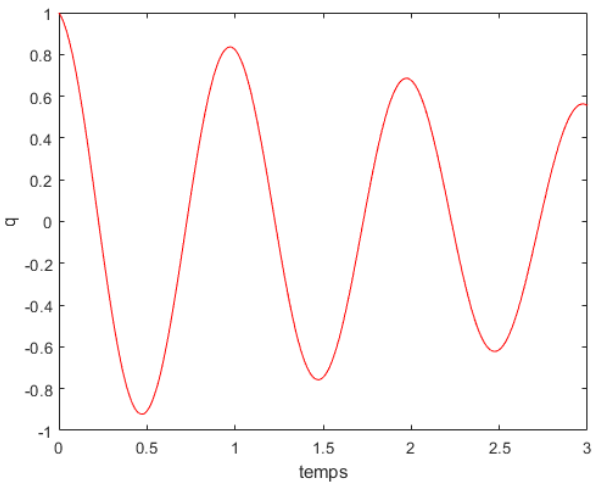
Quand $\Delta t$ devient petit, l'augmentation de E* devient plus linéairement.

2.5 Par le programme, je vois que quand la partie imaginaire des valeurs propres de la matrice d'amplification tends vers 0, le schéma devient plus stable.

3. Schéma d'EULER implicite

3.1

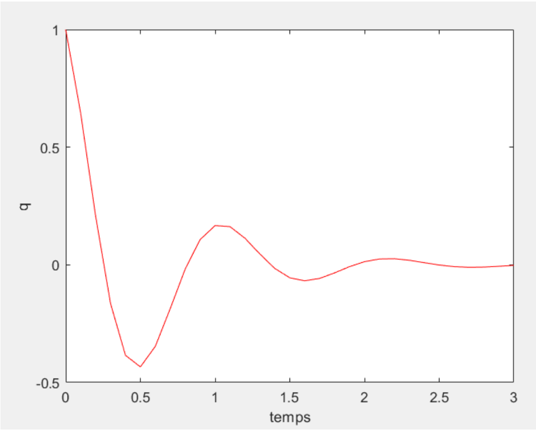
```
clear;
clc
w=2*pi;
h=0.01;
t=0:h:3;
q(1)=1;
v(1)=-1;
a(1)=0;
M=[1,h;-4*pi^2*h,1]
eig(M)
for i=1:length(t)-1
    q(i+1)=(q(i)+h*v(i))/(1+h^2*w^2);
    a(i+1)=-w^2*q(i+1);
    v(i+1)=v(i)+h*a(i+1);
   % E(i)=0.5*(v(i)^2+4*pi*pi*q(i)^2);
end
figure(1);
plot(t,q,'r');
xlabel('temps');
ylabel('q');
```



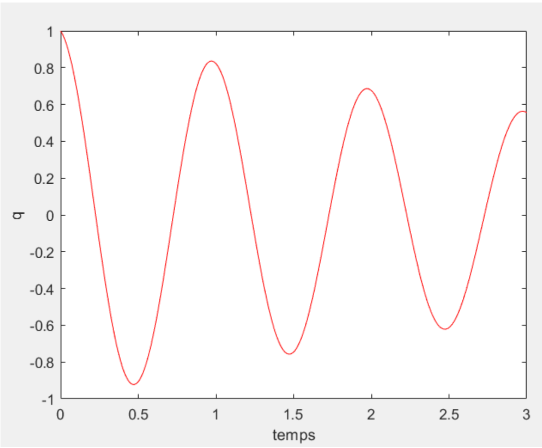
3.2 Au fil du temps, l'amplitude de schéma d'Euler implicite diminue. Au contraire, celui d'Euler explicite augment. Mais en fait, d'après la solution analytique, l'amplitude ne change pas selon le temps.

3.3

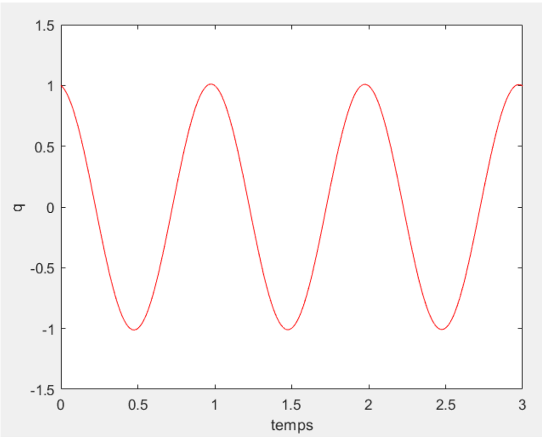
$\Delta t = 0.1$ : il y a de l'amortissement.




$\Delta t = 0.01$ :



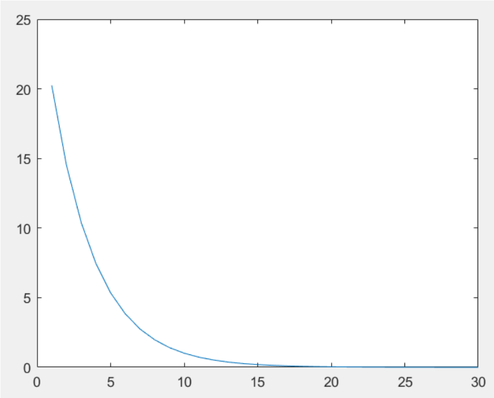

$\Delta t = 0.0001$ :




Donc, c'est évidant que plus le pas de $\Delta t$ est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

3.4

E* diminue mais pas reste une constante.




$(\Delta t = 0.1)$

Quand $\Delta t$ devient petit, la diminution de E* devient plus linéairement.

3.5 Par le programme, je vois que quand la partie imaginaire des valeurs propres de la matrice d'amplification tends vers 0, l'atténuation des oscillations est plus faible.