SY1924133 Stéphanie Wangshuo

Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

1. Solution analytique de l'équation (1)

1.1 Supposons que $q = A\sin 2\pi t + B\cos 2\pi t$

D'après les conditions initiales, on a $A=0$ et $B=1$

Donc, la solution analytique est $q = \cos 2\pi t$

1.2 $E^* = 2\pi^2$ est une constante, ne varie pas avec le temps.

2. Schéma d'EULER explicite

2.1

D'après (5) on a :

$$\begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t\, \dot q_j \\ \dot q_{j+1} = \dot q_j + \Delta t\, \ddot q_j \end{cases}$$

d'après (1) on a :

$$\ddot q = -\omega_0^2 q$$

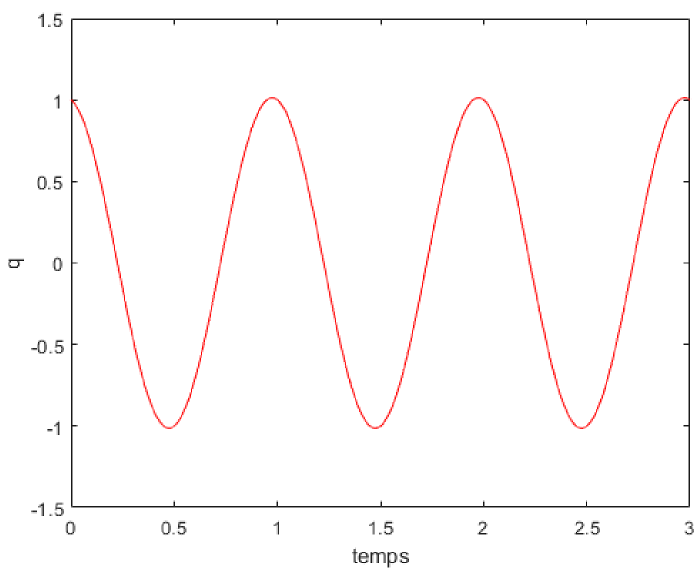
Alors $\ddot q_j = -\omega_0^2 q_j$

Alors : $\dot q_{j+1} = \dot q_j + \Delta t(-\omega_0^2 q_j)$

Donc. $\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot q_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_j \\ \dot q_j \end{vmatrix}$

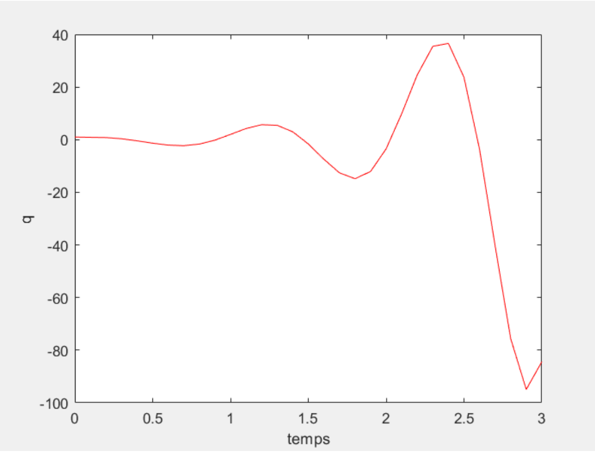
2.2

```
clear;
clc
w=2*pi;
h=0.00001;
t=0:h:3;
q(1)=1;
v(1)=-1;
a(1)=0;
for i=1:length(t)-1
    q(i+1)=q(i)+h*v(i);
    v(i+1)=v(i)+h*a(i);
    a(i+1)=-4*pi*pi*q(i+1);
end
plot(t,q,'r');
xlabel('temps');
ylabel('q');
```

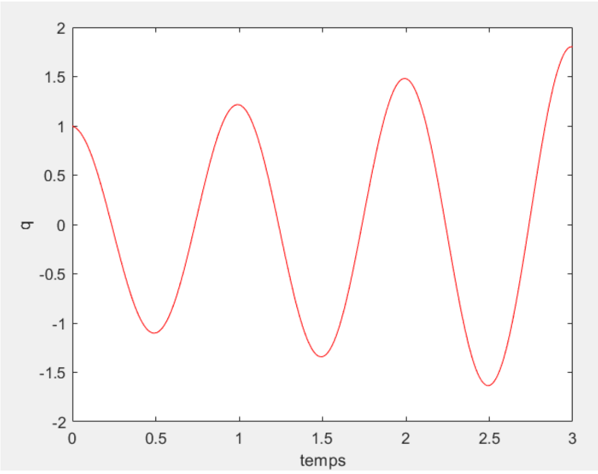


2.3

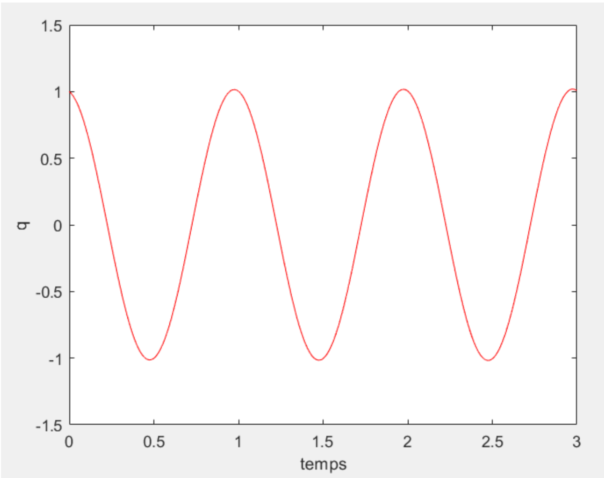
$\Delta t = 0.1$ diverge :



$\Delta t = 0.01$ Il diverge mais plus lentement :

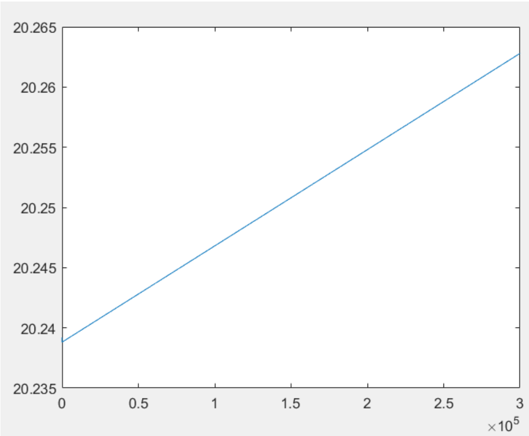


$\Delta t = 0.0001$:



Donc, c'est évident que plus le pas de Δt est petit, plus la divergence est lente.

2.4 E* augmente mais pas reste une constante.



($\Delta t = 0.0001$)

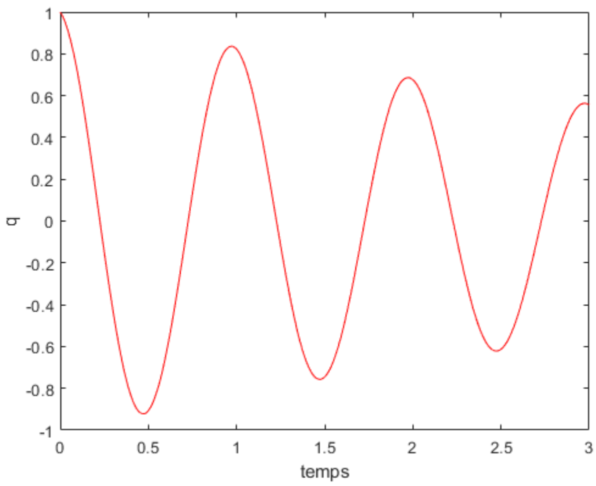
Quand Δt devient petit, l'augmentation de E* devient plus linéairement.

2.5 Par le programme, je vois que quand la partie imaginaire des valeurs propres de la matrice d'amplification tends vers 0, le schéma devient plus stable.

3. Schéma d'Euler implicite

3.1

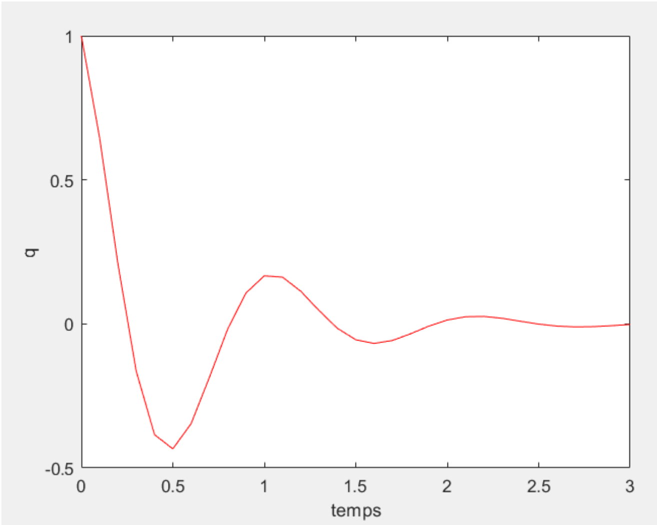
```
clear;
clc
w=2*pi;
h=0.01;
t=0:h:3;
q(1)=1;
v(1)=-1;
a(1)=0;
M=[1,h;-4*pi^2*h,1]
eig(M)
for i=1:length(t)-1
    q(i+1)=(q(i)+h*v(i))/(1+h^2*w^2);
    a(i+1)=-w^2*q(i+1);
    v(i+1)=v(i)+h*a(i+1);
   % E(i)=0.5*(v(i)^2+4*pi*pi*q(i)^2);
end
figure(1);
plot(t,q,'r');
xlabel('temps');
ylabel('q');
```



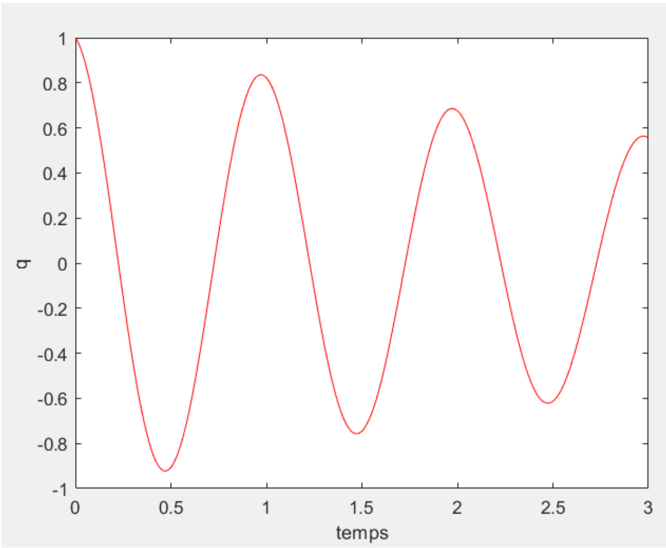
3.2 Au fil du temps, l'amplitude de schéma d'Euler implicite diminue. Au contraire, celui d'Euler explicite augment. Mais en fait, d'après la solution analytique, l'amplitude ne change pas selon le temps.

3.3

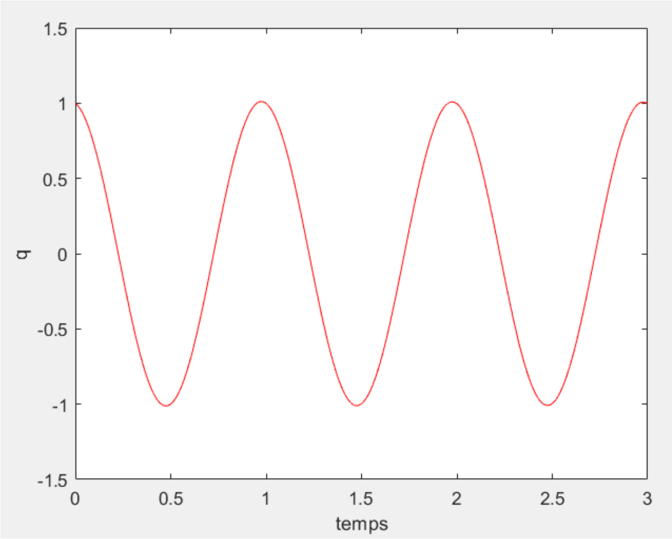
$\Delta t = 0.1$: il y a de l'amortissement.



$\Delta t = 0.01$:



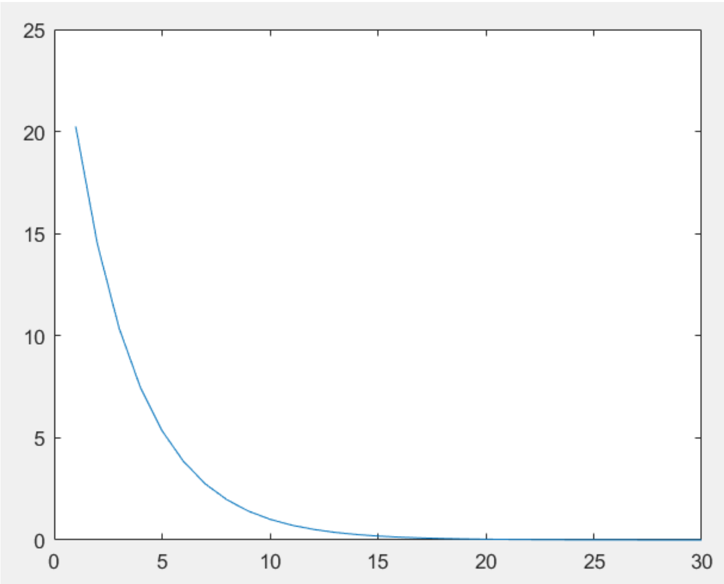
$\Delta t = 0.0001$:



Donc, c'est évidant que plus le pas de Δt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

3.4

E* diminue mais pas reste une constante. ($\Delta t = 0.1$):



Quand Δt devient petit, la diminution de E* devient plus lin éairement.

3.5 Par le programme, je vois que quand la partie imaginaire des valeurs propres de la matrice d'amplification tends vers 0, l'atténuation des oscillations est plus faible.

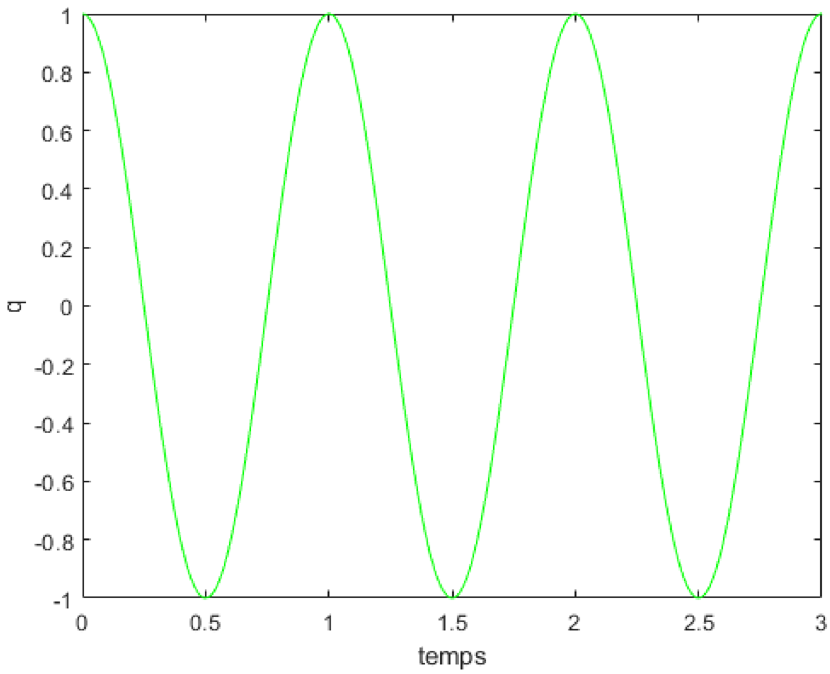
4. RUNGE KUTTA

4.1 $\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix}$

4.2

```
function [ dq ] = cal_f(q,t)
dq = zeros(2,1) ;
w0=2*pi;
dq(1)= q(2);
dq(2) = -w0^2*q(1);
end
```

```
clear;
clc
w0=2*pi;
h=0.01;
t=0:h:3;
q=zeros(2,length(t));
q(:,1)=[1;0];
for i=1:length(t)-1
    a=q(:,i);
    K1=cal_f(a,i);
    K2=cal_f(a+K1*h/2,i+h/2);
    K3=cal_f(a+K2*h/2,i+h/2);
    K4=cal_f(a+K3*h,i+h);
    K=(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
    q(:,i+1)=a+K*h;
    E(i)=0.5*(q(2,i)^2+4*pi*pi*q(1,i)^2);
end
ans=cos(w0*t);
figure(1);
plot(t,q(1,:),'r');
xlabel('temps');
ylabel('q');
hold on
plot(t,ans,'g');
hold off
figure(2);
plot(E);
```



4.3 De même pas de temps 0.01s, RUNGE KUTTA est beaucoup plus précis que Euler implicite et explicite et son schéma est exactement le même que celui de la solution analytique.
4.4 j'obtiens le schéma ci-dessus : E* diminue dans un intervalle très petit, donc on peut le considère comme une constante. Alors, la solution par RUNGE KUTTA est le plus précise que Euler implicite et explicite.