Mécanique Numérique DM2

2.1 Démonstration de matrice d'amplification

2.1

On montre cette relation :

d'après (1), on a $\ddot{q} + w_0^2 q = 0 \Rightarrow \ddot{q} = -w_0^2 q$.

d'après (5), on a $\left| \begin{matrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{matrix} \right. = \left| \begin{matrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{matrix} \right. + \Delta t \times \left| \begin{matrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{matrix} \right.$ avec $\ddot{q}_j = -w_0^2 q_j$.

Donc on a $\left| \begin{matrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{matrix} \right. = \left| \begin{matrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{matrix} \right. + \Delta t \times \left| \begin{matrix} \dot{q}_j \\ -w_0^2 q_j \end{matrix} \right.$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} q_{j+1} = q_j + \Delta t \times \dot{q}_j \\ \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j - w_0^2 \Delta t \, q_j \end{matrix} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -w_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}}_{\text{La matrice d'amplification}} \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$$

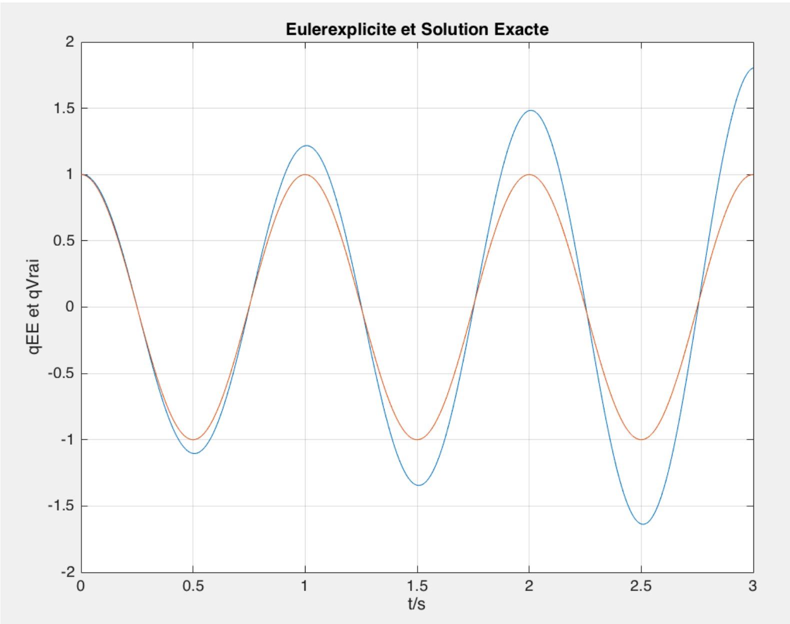
2.2 Programme de la solution en utilisant EULER explicite.

On a choisit la Méthode 2 pour le faire. Il faut utiliser la matrice A. Voici le Script Matlab pour ce problème：

```
clear all
T0=3;q0=1;dq0=0;w0=2*pi;dt=0.01;

%On fait le temps discret de 0 à T0 d'intervalle dt
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
A=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
for i=2:nb
        q=A*q;
        q1b(i)=q(1);
end
plot(t,q1b)
hold on
plot(t,cos(2*pi*t))
grid on;
xlabel('t/s');
ylabel('qEE et qVrai');
title('Eulerexplicite et Solution Exacte')
```

En utilisant ce script, on peut obtenir l’image.



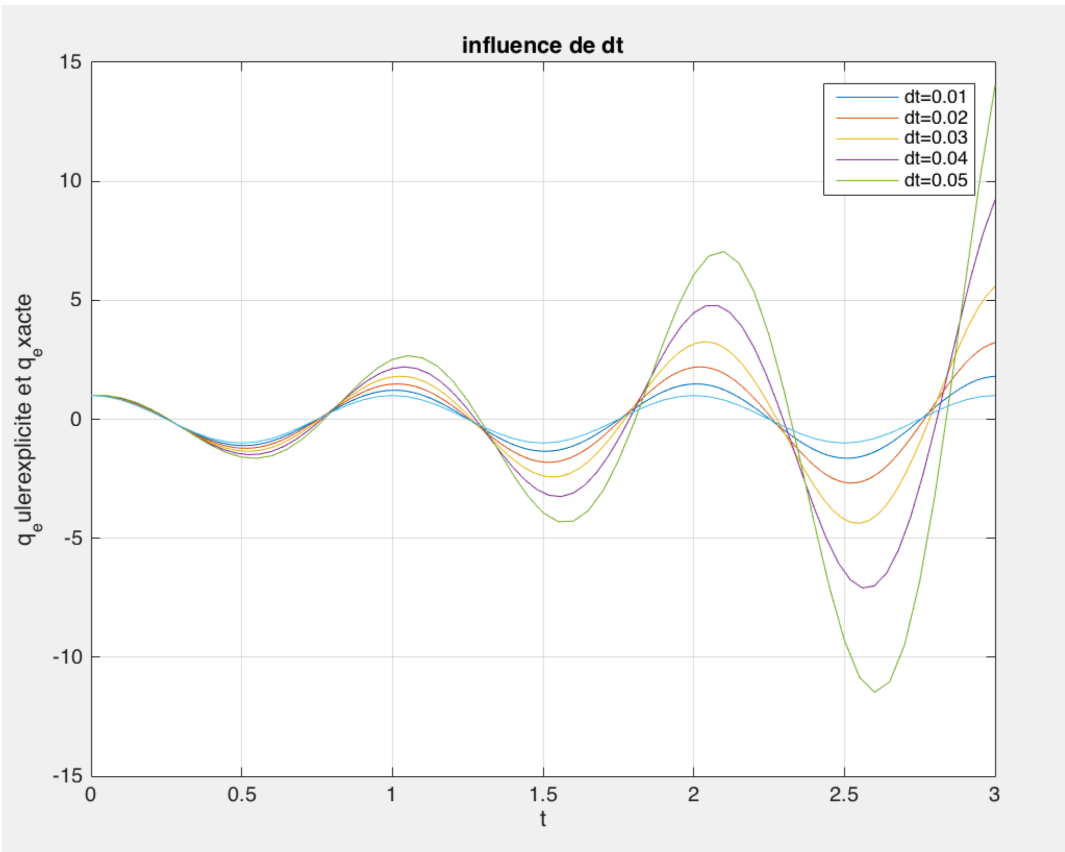
2.3 On résoud l’équation du mouvement sur l’intervalle [0,T0], avec différents pas de temps.

On a choisi 5 pas de temps：dt=0.01 0.02 0.03 0.04 et 0.05

alors on peut utiliser le script MATLAB :

```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;
for dt=[0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 ]
    t=(0:dt:T0)';
        nb=size(t,1);
        q=[q0;dq0];
        q1b=zeros(nb,1);
        q1b(1)=q0;
        A=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
        for i=2:nb
            q=A*q;
            q1b(i)=q(1);
        end
        plot(t,q1b),hold on
end
plot(t,cos(2*pi*t))
grid on;
xlabel('t');
ylabel('q_eulerexplicite et q_exacte');
title('influence de dt')
legend('dt=0.01','dt=0.02','dt=0.03','dt=0.04','dt=0.05')
```

en on peut obtenir les graphs de tous les pas différents ci-dessous :



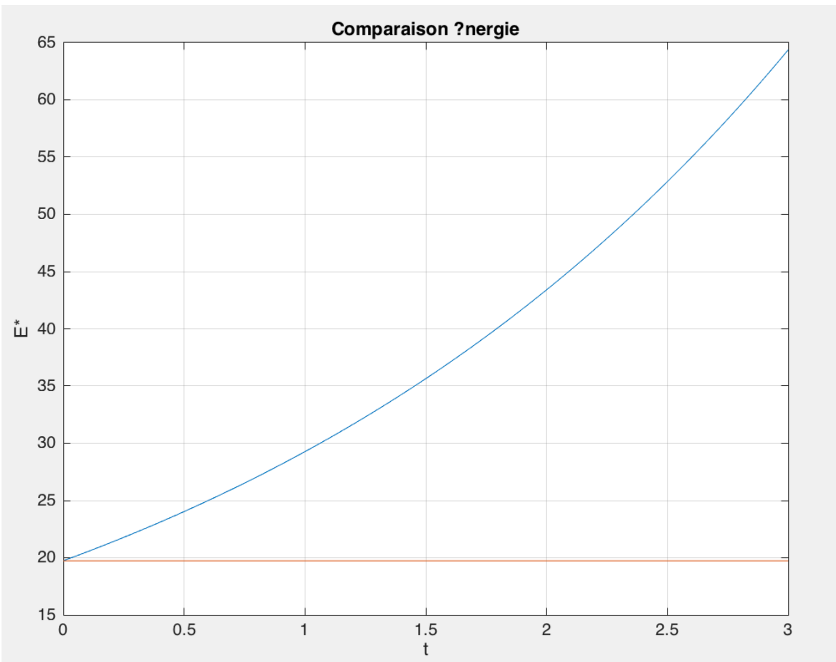
On peut voir dans le graph que, la solution numérique obtenue est divergente, et que quand dt augmente, la divergence augmente.

2.4

(1) On calcule E* associé au schéma d'EULER explicite et on le compare avec E* exacte.

```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;dt=0.01;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(nb,1);
dq1b=zeros(nb,1);
E_etoile=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
dq1b(1)=dq0;
E_etoile(1)=2*pi*pi;
A=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
for i=2:nb
        q=A*q;
        q1b(i)=q(1);
        dq1b(i)=q(2);
    E_etoile(i)=1/2*(dq1b(i).*dq1b(i)+(2*pi*q1b(i))^2);
end
plot(t,E_etoile),hold on
plot(t,t*0+2*pi*pi)
grid on;
xlabel('t');
ylabel('E*');
title('Comparaison énergie')
```

D'après le Script MATLAB au-dessus, on peut obtenir le graph



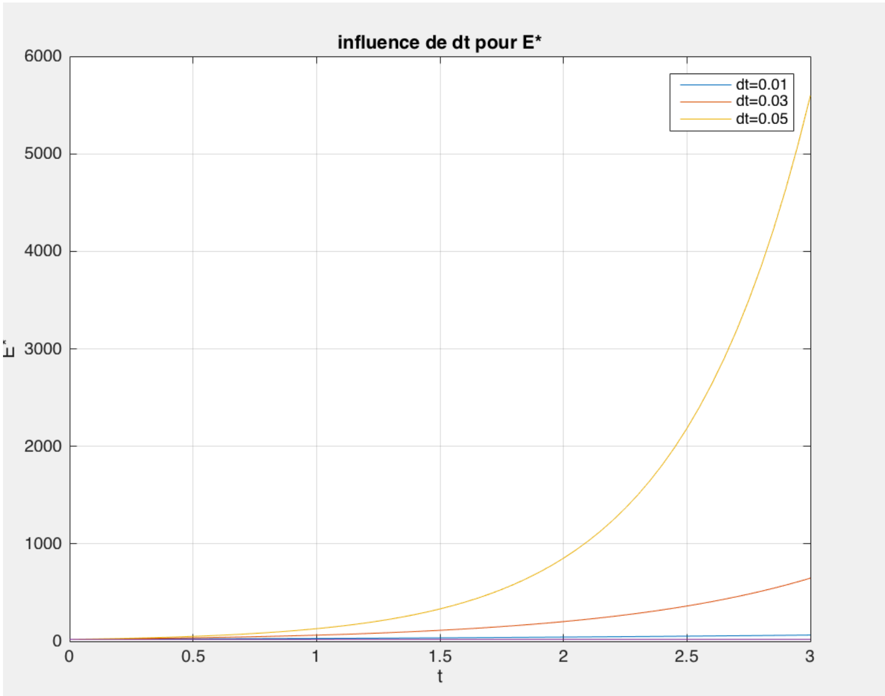
On peut déduire que E* exacte ne change pas avec le temps. Au revanche, E* du schéma d'EULER Explicit augmente par rapport au temps.

Concernant l'influence sur dt, c'est assez clair que, si dt augmente, E* augmentera, parce que d'après la question précédente, dt augmente, l'amplification de q augmente. Cependant, il vaut mieux qu'on fasse une expérience pour démontrer cela.

On fait varier dt et on les met dans un même graph.

```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;
for dt=[0.01 0.03 0.05]
        t=(0:dt:T0)';
        nb=size(t,1);
        q=[q0;dq0];
        q1b=zeros(nb,1);
        dq1b=zeros(nb,1);
        E_etoileee=zeros(nb,1);
        q1b(1)=q0;
        dq1b(1)=dq0;
        E_etoileee(1)=2*pi*pi;
        A=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
        for i=2:nb
            q=A*q;
            q1b(i)=q(1);
dq1b(i)=q(2); E_etoileee(i)=1/2*(dq1b(i).*dq1b(i)+(2*pi*q1b(i))^2);
        end
    plot(t,E_etoileee),hold on
end
plot(t,t*0+2*pi*pi)
grid on;
xlabel('t');
ylabel('E*');
title('influence de dt pour E*')
legend('dt=0.01','dt=0.03','dt=0.05')
```

avec le graph:



C’est le même qu’on a supposé.

2.5 Les valeurs propres

```
syms dt
A=[1,dt;-(2*pi)*(2*pi)*dt 1]
A=vpa(A,3)
[z,d]=eig(A)
z=vpa(z,3)
d=vpa(d,3)
mo=vpa(abs(d),3)
```

On a les valeurs propres

```
d =

[ 1.0 - dt*6.28i,              0]
[              0, 1.0 + dt*6.28i]
```