

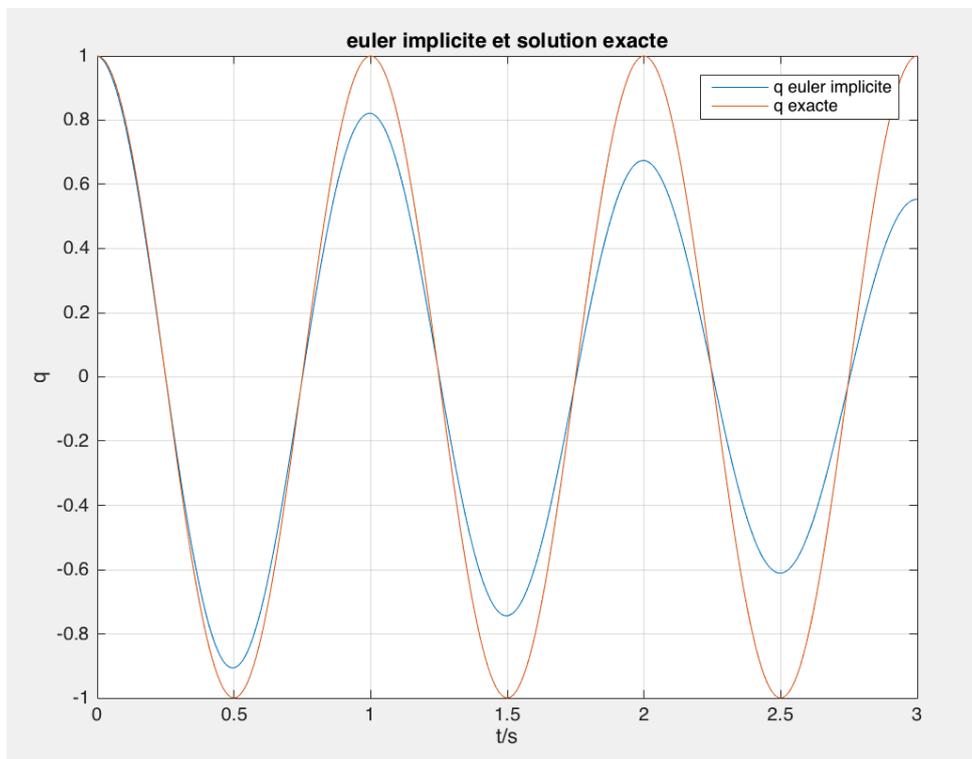
Mécanique Numérique DM3

3. EULER Implicite

3.1 En utilisant la méthode avec la matrice A, on peut avoir le MATLAB Script en dessous:

```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;dt=0.01;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
A=(1/(1+w0*w0*dt*dt))*[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
for i=2:nb
    q=A*q;
    q1b(i)=q(1);
end
plot(t,q1b)
hold on
plot(t,cos(2*pi*t))
grid on;
xlabel('t/s');
ylabel('q');
title('euler implicite et solution exacte')
legend('q euler implicite','q exacte')
```

avec ce script, on peut obtenir le graph



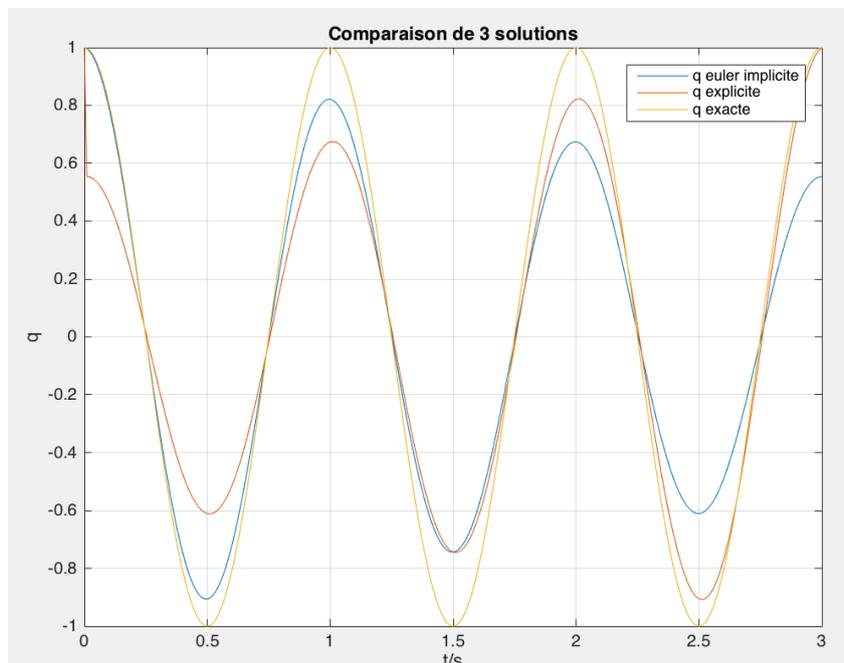
On peut voir qu'il y a une différence entre la solution exacte et la solution qui vient de schéma d'EULER implicite, et que cette différence évolue avec le temps.

3.2 On compare les trois solutions avec $dt=0.01$

On met tous les trois graphes dans un même graph avec le script :

```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;dt=0.01;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
A1=(1/(1+w0*w0*dt*dt))*[1,dt;-(w0*w0)*dt,1];
for i=2:nb
    q=A1*q;
    q1b(i)=q(1);
end
plot(t,q1b)
hold on
A2=[1,dt;-(w0*w0)*dt,1];
for i=2:nb
    q=A2*q;
    q1b(i)=q(1);
end
plot(t,q1b)
hold on
plot(t,cos(2*pi*t))
grid on;
xlabel('t/s');
ylabel('q');
title('Comparaison de 3 solutions')
legend('q euler implicite','q explicite','q exacte')
```

Donc on obtient le résultat :

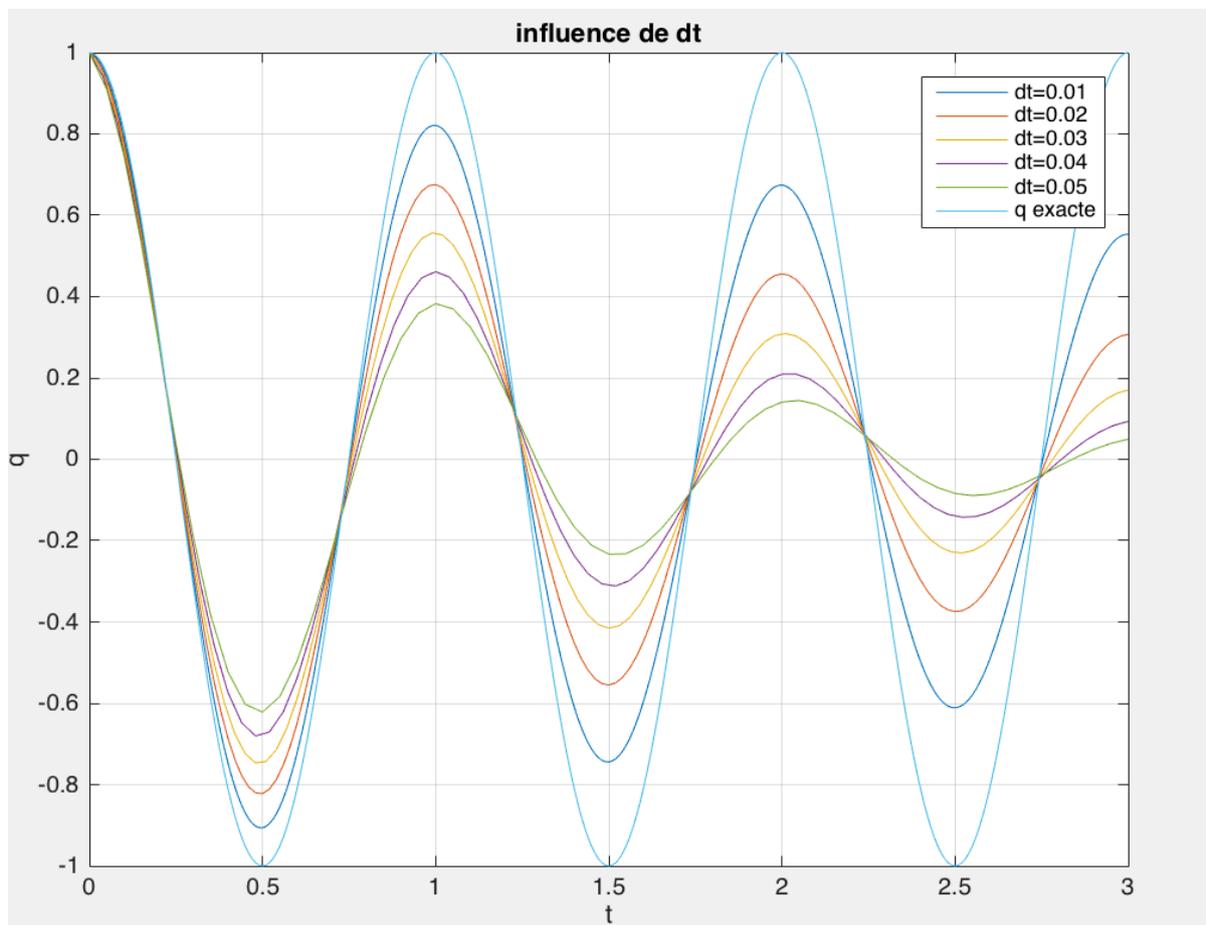


3.3 On teste 5 pas de temps: $dt=0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05$

Avec la méthode de cours, on peut obtenir:

```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;
for dt=[0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 ]
    t=(0:dt:T0)';
    nb=size(t,1);
    q=[q0;dq0];
    q1b=zeros(nb,1);
    q1b(1)=q0;
    A=(1/(1+w0*w0*dt*dt))*[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
    for i=2:nb
        q=A*q;
        q1b(i)=q(1);
    end
    plot(t,q1b),hold on
end
t=(0:0.01:3);
plot(t,cos(2*pi*t))
grid on;
xlabel('t');
ylabel('q');
title('influence de dt')
legend('dt=0.01','dt=0.02','dt=0.03','dt=0.04','dt=0.05','q exacte')
```

En dessiner le graph, on a



d'où on peut déduire que plus le pas de temps dt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

3.4

3.4.1

On calcule l'énergie avec EULER Implicite. Et au même temps, on le compare avec EULER explicite et la valeur exacte.

Script MATLAB est ci-dessous:

```
clear all
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;dt=0.01;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(nb,1);
dq1b=zeros(nb,1);
E_etoile_euler_implicite=zeros(nb,1);
E_etoile_euler_explicite=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
dq1b(1)=dq0;
%graph de EULER implicite
E_etoile_euler_implicite(1)=2*pi*pi;
Ai=(1/(1+w0*w0*dt*dt))*[1,dt;-(w0*w0)*dt,1];
for i=2:nb
    q=Ai*q;
    q1b(i)=q(1);
    dq1b(i)=q(2);
    E_etoile_euler_implicite(i)=1/2*(dq1b(i).*dq1b(i)+(2*pi*q1b(i))^2);
end
plot(t,E_etoile_euler_implicite),hold on
%graph de EULER explicite
E_etoile_euler_explicite(1)=2*pi*pi;
Ae=[1,dt;-(w0*w0)*dt,1];
for i=2:nb
    q=Ae*q;
    q1b(i)=q(1);
    dq1b(i)=q(2);
    E_etoile_euler_explicite(i)=1/2*(dq1b(i).*dq1b(i)+(2*pi*q1b(i))^2);
end

plot(t,E_etoile_euler_explicite),hold on
plot(t,t*0+2*pi*pi)
grid on;
xlabel('t');
ylabel('E*');
title('E* et euler explicite /implicite (t=0.01s)')
legend('implicite','explicite','exacte')
```

Et d'après ces script, on peut obtenir le graph ci-dessous:

On peut voir clairement que l'énergie d'EULER implicite diminue avec temps, l'énergie d'EULER explicite augmente avec temps. Cependant, je ne sais pas pourquoi il y a un échelon pour l'explicite. D'après moi, je pense que l'explicite doit être augmenté de début.

3.4.2 L'influence de dt

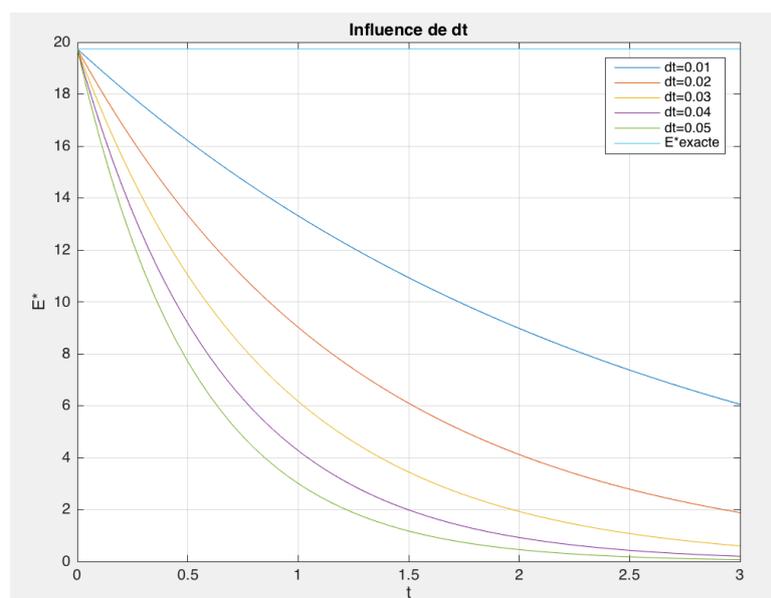
Pour comparer l'énergie de dt différents, on peut utiliser script en-dessous :

```

q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;
for dt=[0.01 0.02 0.03 0.04 0.05]
    t=(0:dt:T0)';
    nb=size(t,1);
    q=[q0;dq0];
    q1b=zeros(nb,1);
    dq1b=zeros(nb,1);
    E_etoile_euler_implicite=zeros(nb,1);
    q1b(1)=q0;
    dq1b(1)=dq0;
    E_etoile_euler_implicite(1)=2*pi*pi;
    A=(1/(1+w0*w0*dt*dt))*[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
    for i=2:nb
        q=A*q;
        q1b(i)=q(1);
        dq1b(i)=q(2);
        E_etoile_euler_implicite(i)=1/2*(dq1b(i).*dq1b(i)+(2*pi*q1b(i))^2);
    end
    plot(t,E_etoile_euler_implicite),hold on
end
plot(t,t*0+2*pi*pi)
grid on;
xlabel('t');
ylabel('E*');
title('Influence de dt')
legend('dt=0.01','dt=0.02','dt=0.03','dt=0.04','dt=0.05','E*exacte')

```

avec le graph :



On peut déduire que plus dt est petit, plus le graph est convexe.

3.5

Pour calculer les valeurs propres de matrice d'amplification, il faut utiliser le script :

```
syms dt w0
A=(1/(1+w0*w0*dt*dt))*[1 dt;-(w0*w0)*dt 1]
[z,d]=eig(A)
mo=abs(d)
```

On peut obtenir la valeur propre

```
d =
[ 1i/(dt*w0 + 1i),          0]
[          0, 1/(1 + dt*w0*1i)]
```

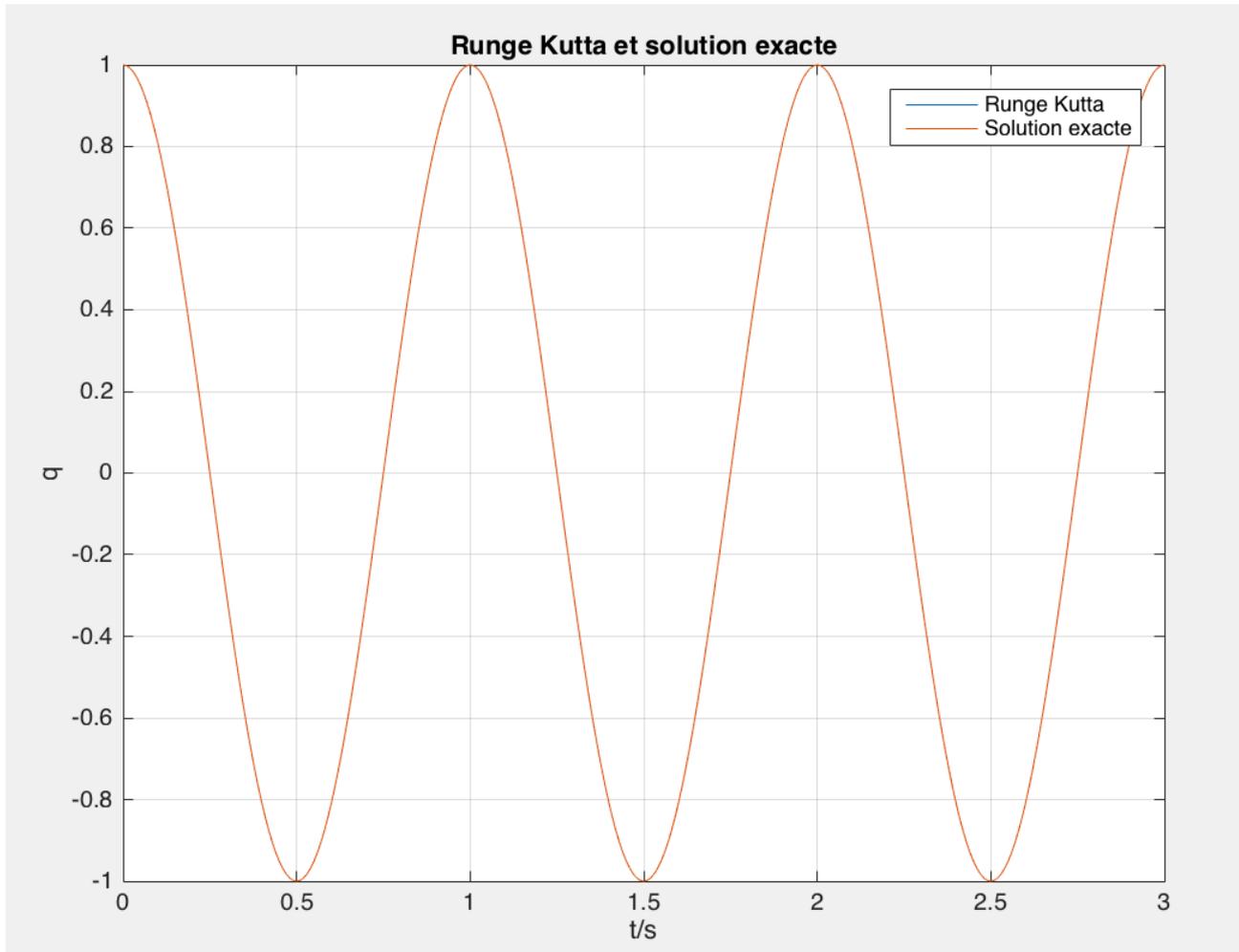
4. Résolution avec un schéma de Runge Kutta

4.1

4.2 Pour obtenir la solution avec un schéma de Runge Kutta, il faut utiliser le script ci-dessous

```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;dt=0.01;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
B=[0 1;-w0*w0 0];
for i=2:nb
    k1=B*q;
    k2=B*(q+k1*dt/2);
    k3=B*(q+k2*dt/2);
    k4=B*(q+k3*dt);
    k=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    q=q+k*dt;
    q1b(i)=q(1);
end
plot(t,q1b),hold on
plot(t,cos(2*pi*t))
grid on;
xlabel('t/s');
ylabel('q');
title('Runge Kutta et solution exacte')
legend('Runge Kutta','Solution exacte')
```

avec le schéma :



On peut voir que les deux graph sont presque même.

4.3 Comparaison des solutions

En utilisant les méthodes précédents, on peut obtenir un graph avec tous les types de solutions.

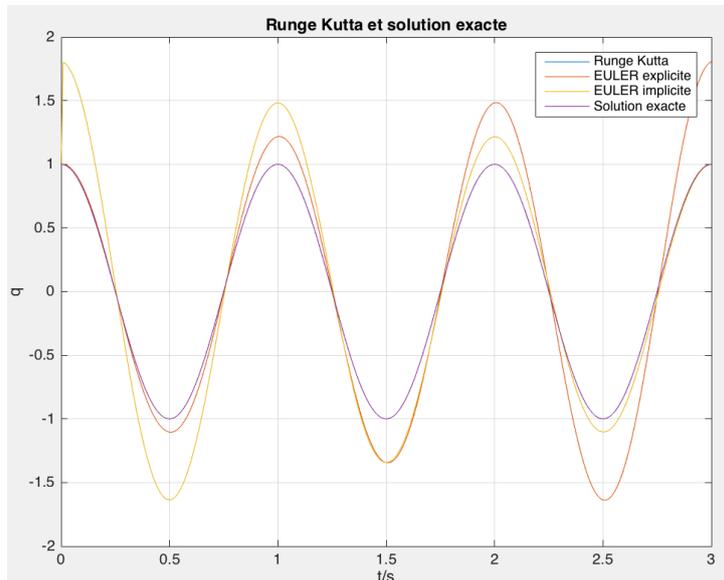
```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;dt=0.01;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
%RUNGE KUTTA
B=[0 1;-w0*w0 0];
for i=2:nb
    k1=B*q;
    k2=B*(q+k1*dt/2);
    k3=B*(q+k2*dt/2);
    k4=B*(q+k3*dt);
    k=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    q=q+k*dt;
    q1b(i)=q(1);
end
plot(t,q1b),hold on
%EULER EXPLICITE
A1=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
for i=2:nb
    q=A1*q;
    q1b(i)=q(1);
end
plot(t,q1b)
%EULER IMPLICITE
A2=(1/(1+w0*w0*dt*dt))*[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
for i=2:nb
    q=A2*q;
    q1b(i)=q(1);
end
```

```

plot(t,q1b)

%SOLUTION EXACTE
plot(t,cos(2*pi*t))
grid on;
xlabel('t/s');
ylabel('q');
title('Runge Kutta et solution exacte')
legend('Runge Kutta','EULER explicite','EULER implicite','Solution exacte')

```



On peut voir d'après l'image que la méthode de Runge Kutta est la plus exacte.

4.4 Comparaison des E*

Les scripts pour calculer l'énergie de schéma RUNGE KUTTA :

```

q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;dt=0.01;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(nb,1);
dq1b=zeros(nb,1);
E_etoile_rungekutta=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
B=[0 1;-w0*w0 0];
E_etoile_rungekutta(1)=2*pi*pi;
for i=2:nb
    k1=B*q;
    k2=B*(q+k1*dt/2);
    k3=B*(q+k2*dt/2);
    k4=B*(q+k3*dt);
    k=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    q=q+k*dt;
    q1b(i)=q(1);
    dq1b(i)=q(2);    E_etoile_rungekutta(i)=1/2*(dq1b(i).*dq1b(i)+(2*pi*q1b(i))^2);
end
plot(t,E_etoile_rungekutta),hold on
grid on;
xlabel('t');
ylabel('E*');
title('RUNGE KUTTA')

```

```

Pour les mettre dans un même image, on a
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;dt=0.01;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(nb,1);
dq1b=zeros(nb,1);
E_etoile_euler_implicite=zeros(nb,1);
E_etoile_euler_explicite=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
dq1b(1)=dq0;
%graph de EULER implicite
E_etoile_euler_implicite(1)=2*pi*pi;
Ai=(1/(1+w0*w0*dt*dt))*[1,dt;-(w0*w0)*dt,1];
for i=2:nb
    q=Ai*q;
    q1b(i)=q(1);
    dq1b(i)=q(2);
    E_etoile_euler_implicite(i)=1/2*(dq1b(i).*dq1b(i)+(2*pi*q1b(i))^2);
end
plot(t,E_etoile_euler_implicite),hold on
%graph de EULER explicite
E_etoile_euler_explicite(1)=2*pi*pi;
Ae=[1,dt;-(w0*w0)*dt,1];
for i=2:nb
    q=Ae*q;
    q1b(i)=q(1);
    dq1b(i)=q(2);
    E_etoile_euler_explicite(i)=1/2*(dq1b(i).*dq1b(i)+(2*pi*q1b(i))^2);
end
plot(t,E_etoile_euler_explicite),hold on
%RUNGE KUTTA
B=[0 1; -w0*w0 0];
E_etoile_rungekutta(1)=2*pi*pi;
for i=2:nb
    k1=B*q;

```

```

k2=B*(q+k1*dt/2);
k3=B*(q+k2*dt/2);
k4=B*(q+k3*dt);
k=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
q=q+k*dt;
q1b(i)=q(1);
dq1b(i)=q(2);  E_etoile_rungekutta(i)=1/2*(dq1b(i).*dq1b(i)+(2*pi*q1b(i))^2);
end
plot(t,E_etoile_rungekutta),hold on
plot(t,t*0+2*pi*pi)
grid on;
xlabel('t');
ylabel('E*');
title('E* et euler explicite /implicite (t=0.01s)')
legend('E* euler implicite','E* euler explicite','E* Runge Kutta','E* euler exacte')

```

avec l'image est

